i v e r z i t e t   K o s o v a   u   P r i š t i n i

i r o d n o - m a t e m a t i č k i   f a k u l t e t

Mr Isljam A.Šehu

...IONALNA REŠIVOST APSTRAKTNE ELIPTIČKE JEDNAČINE DRUGOG R...
U HILBERTOVOM PROSTORU

D o k t o r s k a   d i s e r t a c i j a

Priština, 1985.

Ova disertacija je data na ocenu Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta Kosova u Prištini u cilju sticanja naučnog stepena doktora prirodnih nauka iz oblasti MATEMATIKA.

Disertacija je pripremljena na Katedri za funkcionalnu analizu Mehaničko-matematičkog fakulteta Beloruskog državnog univerziteta V.I.Lenjin u Minsku.

Osećam obavezu da na ovom mestu izrazim svoju duboku zahvalnost prof. dr Anatolju B.Antonjeviću ,koji mi je predložio ovu temu i svojim sugestijama i primedbama doprineo da ovaj rad uspešno privedem kraju.

Takode ,zahvaljujem se prof.dr Novaku Ivanovskom ,Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Skopje ,koji mi je dao korisne primedbe.

S A D R Ž A J

U V O D

U disertaciji su razmatrene neke jednačine u prostoru $L_2(\mathbb{R})$, koje sadrže operatore šifta

$$T_h u(x) = u(x+h) \tag{0.1}$$

operatore konvolucije

$$\phi u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x-y)\, u(y)\, dy \tag{0.2}$$

i operatore množenje funkcija. Klasa takvih jednačina je veoma opširna. Neke posebne klase vezane su sa različitim problemima iz mnogih oblasti matematike i njene primene. Toj klasi pripadaju diferencne jednačine oblika

$$\mathcal{b} u \equiv \sum_{k=1}^{m} a_k(x)\, u(x+h_k) = f(x) \tag{0.3}$$

koje imaju višestruku primenu kao npr. u teoriji diferencijalno-diferencnih jednačina. Takve jednačine nastaju prilikom matematičkog modeliranja procesa u kojima razvoj sistema zavisi ne samo od budućnosti več i od prošlosti.. Teoriji i primeni takvih jednačina posvećena je opširna literatura npr. [10,18,24, ,29].

Operatori oblika (0.3) koji figurišu u datoj diferencijalno-diferencnoj jednačini umnogome imaju svoju specifičnost. Jedna od osnovnih pitanja, vezano za primenu diferencijalno-diferencnih jednačina jeste objašnjenje činjenice da li je operator $\mathcal{b}$ oblika (0.3) invertibilan ili ne. Od primena spomenimo teoriju funkcija 30 , teoriju diferencijalnih jednačina beskonačnog reda 26 .Osim toga, sami opratori oblika (0.3) predstavljaju zanimljivu klasu sa aspekta opšte teorije operatora 16,17. Operatori oblika (0.3) razmatreni su u [5.10.12.13.25.28.33] itd.

Operatori konvolucije i integralne jednačine tipa konvolucije oblika

$$bu \equiv a(x)u(x) + \sum_{k=1}^{m} a_k(x)\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_k(x-y)u(y)dy = W(x) \qquad (0.4)$$

takođe imaju višestruku primenu i intenzivno se proučavaju [2,15,19-21,36-38]. Složenost ispitivanja operatora oblika (0.3) i operatora oblika (0.4) u značajnoj meri zavisi od ponašanja koeficienata. U slučaju kada su koeficienti konstantni, takve jednačine se ispituju dosta jednostavno pomoću Fourierovih transformacija.

U opštem slučaju kod takvih operatora ne možemo ispitivati invertibilnost; dobijanje uslova invertibilnosti opštih operatora oblika (0.3) ekvivalentno je nizu drugih složenih problema, za koje je poznato da nemaju efektivnih rešenja. Prema tome prilikom ispitivanja obično se uzima jedna specijalna klasa operatora, za koje se mogu dobiti efektivni uslovi invertibilnosti. Neke od takvih novih klasa posmatraćemo u nastavku disertacije.

Ispitivanja u disertaciji zasnivaju se na opštoj teoriji funkcijonalnih operatora, koja se nalazi u radovima sovjetskih matematičara A.B.Antonjevića, A.V.Lebedejeva, A.K.Kitovera i V.V.Brenera [1-9,22,27]. U toj teoriji dobijen je niz opštih teorema o svjstvima jedne klase C^*-algebre - algebre generirane dinamičkim sistemima. U toj klasi algebre pripadaju C^*-algebre generirane operatorima oblika (0.3), C^*-algebre generirane pomoću nekoliko vrsta operatora tipa konvolucije i još nekim drugim.

Najviše su ispitivani dvočlani operatori oblika

$$\mathcal{L}u(x) = a_0(x)u(x) + a_1(x)\,u(g(x))\,,\; x\in X \qquad (0.5)$$

gde je $g: X \to X$ zadato preslikavanje. Uslovi invertibilnosti operatora oblika (0.5) izražavaju se kroz prostor M_A maksimalnih ideala C^*-algebre A, generiranu pomoću koeficienata operatora (0.5), kroz Gelfandovog preslikavanja te algebre i kroz geometrijske sredine koeficienata u odnosu na meru na prostoru M_A, invarijantno i ergodičnu u odnosu na homeomorfizam $\alpha: M_A \to M_A$, generiran preslikavanjem g.

U disertaciji će biti razmotrene višečlane diferencne jednačine oblika (0.3) kao i jednačine tipa konvolucije oblika (0.4) kao i uopštenje integro-diferencne jednačine oblika

$$\mathcal{L}u(x) \equiv \sum_{k=1}^{m} a_k(x)\,u(x+\omega_k) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{l} a_{kj}(x)\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x-y)\,u(y+\omega_k)\,dy = W(x) \qquad (0.6)$$

Takođe će biti razmatrene i analogne jednačine u više dimenzionalnom prostoru R^n. Kako je več primećeno, u slučaju proizvoljnih koeficienata, takve jednačine i operatori nisu pogodni za efektivna ispitivanja.

Posebno će biti izdvojena jedna klasa koeficienata a_k i a_{kj} koji pripadaju operatoru (0.6) a za koje se mogu izvršiti ispitivanja višečlanih operatora, gde je m broj sabiraka veći od 2. Tu klasu karakteriše uslov da koeficienti imaju oblik

$$a_k^0(x) + a_k^1(x)\,e^{i h x}$$

gde su a_k^0 i a_k^1 konstantni ili u beskonačnosti imaju limes. Koeficienat te klase oscilira oko nekog srednjeg položaja. Nekoliko takvih jednačina razmatrene su u [2,19-21]

Ispitivanja u ovoj disertaciji biće sprovedena po opštoj shemi. U početku problem se svodi na razmatrenje pomoćnog dvočlanog funkcionalnog operatora oblika (0.5). Zatim se konstruiše prostor maksimalnih ideala odgovarajuće algebre koeficienata. Nadalje, konstruiše se izomorfizam $\alpha : M_A \to M_A$ i opisuju se invarijantne mere. Konkretni rezultati slede iz opšte teoreme. Takvom metodom su ispitivane jednačine oblika (0.3), oblika (0.4), oblika (0.6) i analogne jednačine u $\mathbb{R}^n$. U višedimenzionalnom slučaju ($n > 1$) razmatraju se takođe operatori sa složenijim ponašanjem koeficienata.

Primetimo da je prostor maksimalnih ideala posmatrane C^*-algebre konstruisan veoma složeno(npr. M_A je unija p-dimenzionalnog torusa $\mathbb{T}^p$ i prostora $\mathbb{R}$ koji se namota na torusu $\mathbb{T}^p$) i njen oblik zavisi od teorijsko-brojnih svojstava brojeva

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m \quad i \quad h .$$

U prvoj glavi disertacije izložene su osnovne činjenice opšte teorije neophodne za daljnja ispitivanja .Originalni rezultati su izloženi u drugoj i trećoj glavi.

I GLAVA

U ovoj glavi izložićemo nekoliko opštih rezultata o funkcionalnim operatorima i algebri generiranoj pomoću njih. Ti rezultati nalaze se u radovima [1-9,22] i čine osnovu za daljnja ispitivanja u glavama II i III.

§ I.1. C^*-ALGEBRE GENERIRANE POMOĆU DINAMIČKIH SISTEMA

Funkcionalnim operatorom nazivamo operator oblika

$$bu(x) \equiv \sum a_k(x)\, u(g_k(x)) \qquad (I.1.1)$$

gde su a_k date funkcije na skupu X, $g_k : X \to X$ zadata preslikavanja. Operator se razmatra na nekom prostoru $F(X)$ funkcija na skupu X. Dole formulisani rezultati uglavnom se odnose na operatore iz prostora $L_2(X,\mu)$, gde je μ neka mera na X. U slućaju kada su preslikavanja g_k invertibilna, operatori oblika (I.1.1) generišu C^*-algebru koja poseduje specijalnu strukturu. Ta algebra pripada klasi C^*-algebri, koja se zasniva na dole navedenim aksiomima. Takve algebre nazivamo C^*-algebrama generirane dinamičkim sistemima. Dejstvo grupe G na skupu X zove se preslikavanje $\Phi : G \times X \to X$ takvo da je

$$\Phi(e,x) = x\,, \quad \Phi(gh,x) = \Phi(g, \Phi(h,x))\,.$$

Ako je grupa G topološka grupa i X topološki prostor, tada treba dodati da preslikavanje $\Phi : G\times X \to X$ bude neprekidno. Ako je X prostor mere, tada treba dodati da preslikavanje $g(x)$ bude merljivo. Dinamički sistem je dejstvo grupe na nekom prostoru kao i razmatrene algebre vezana sa nekim zadatim dejstvom iste.

Definicija I.1.1. Neka je B Banachova algebra, G - diskretna grupa. Banachova algebra B je algebra tipa $B(A, G, T_g)$

ili algebra B generirana podalgebrom A i reprezentacijom grupe G ,ako je data zatvorena podalgebra A u B i zadato reprezentacija T_g grupe G u B tako da važe sledeće aksiome:

1. $T_g A T_g^{-1} \in A$ za proizvoljno $a \in A$ i $g \in G$,

2. Skup B^0 konačnih suma

$$\sum a_g T_g \ , \quad a_g \in G \ ,$$

je gust po normi u B .

Ako su A i B C^*-algebre i reprezentacija T_g unitarna, tada kažemo da je B algebra tipa $C^*(A, G, T_g)$.

<u>Primer I.1.1</u>. Neka je (X, Σ, μ) prostor mere, $g_i : X \to X$ inverzno merljivo preslikavanje, koje čuva klasu mere μ . Preslikavanje g čuva meru μ , ako za bilo koji merljiv skup ω iz X važi

$\mu(\omega) = 0$ tada i samo tada, ako je $\mu(g^{-1}(\omega)) = 0$.

Neka je G grupa preslikavanja skupa X , generirana pomoću preslikavanja g_i , $i = 1, 2, \dots, m$. Svakom preslikavanju g iz grupe G pridružimo operator šifta, koji deluje u prostoru $L_p(X, \mu)$ formulom

$$T_g u(x) = \left[\gamma_g(x) \right]^{1/p} u(g^{-1}(x)) \qquad (I.1.2)$$

gde je $\gamma_g(x) = d\mu_g / d\mu$ Radon-Nikodimov izvod, μ_g mera na X definisana pomoću formule $\mu_g(\omega) = \mu(g^{-1}(\omega))$. Lako je videti da je operator T_g invertibilni operator i izometrija u prostoru $L_p(X, \mu)$. S obzirom da je

$\gamma_{gh}(x) = \gamma_g(h(x)) \, \gamma_h(x)$, tada $T_g T_h = T_{gh}$

odakle sledi da operatori T_g zadaju reprezentaciju grupe G. Neka je A algebra operatora množenje funkcija iz prostora $L_\infty(X, \mu)$, tj. operatora oblika

$$(au)(x) = a(x) u(x) \ , \quad a \in L_\infty(X, \mu) \ .$$

Za proizvoljno g iz G i a iz A imamo

$$T_g a T_g^{-1} = a(g^{-1}(x)) \qquad (I.1.3)$$

pa je aksiomal Definicije I.1.1, ispunjena.

Neka je B° skup funkcionalnih operatora, predstavljenih u obliku konačnih suma $\sum a_g T_g$, $a_g \in A$, B - najmanja Banachova podalgebra u $L(L_p(X,\mu))$, koja sadrži B°. Tada je B algebra tipa $B(A,G,T_g)$, a za $p=2$ algebra tipa $C^*(A,G,T_g)$.

Navedimo primer algebre tipa $B(A,G,T_g)$ u kojoj operatori koji daju reprezentaciju grupe nisu operatori šifta. Teorija omogučava ispitivanje i takvih algebra, analognih algebrama funkcionalnih operatora.

Primer I.1.2. Neka je A C^*-algebra operatora u prostoru $L_2(\mathbb{R})$ generirana operatorima konvolucije sa funkcijama iz $L_1(\mathbb{R})$ i operatorima množenje neprekidnih funkcija, za koje postoji limes kada $x \to +\infty$ i kada $x \to -\infty$.

Operatori $T_g u(x) = \exp[i g(x)] u(x)$ množenje funkcija $\exp[i g(x)], g \in \mathbb{R}$ zadaju reprezentaciju grupe $\mathbb{R}$. Pokažemo da svaki operator T_g generira automorfizam algebre A. Zaista, za operator množenje funkcija a očigledno važi $T_g a T_g^{-1} = a$, dok za operator konvolucije Φ sa funkcijom φ imamo

$$T_g \Phi T_g^{-1} u(x) = e^{igx} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-y) e^{-igy} u(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x-y) u(y) dy ,$$

gde je $\varphi_1(x) = e^{igx}\varphi(x)$ tj. $T_g \Phi T_g^{-1}$ je operator konvolucije. Na taj način, C^*-algebra B generirana algebrom A i operatorima T_g je algebra tipa $C^*(A,\mathbb{R},T_g)$. Elementi te algebre su operatori tipa konvolucije sa oscilirujućim koeficientima.

Neka je $\mathcal{B}$ algebra tipa $C^*(A,G,T_g)$. Preslikavanja

$$\hat{T}_g : a \to T_g a T_g^{-1}$$

su automorfizmi C^*-algebre A i daju odnosno definišu dejstvo grupe G na A. Trojka (A,G,T_g) koja se sastoji iz C^*-algebre A, grupe G i dejstva grupe G na A automorfizmima $\hat{g}$, zove se C^*-dinamiči sistem [11].

Prema tome sa algebrom $\mathcal{B}$ vezan je C^*-dinamički sistem $(A,G,\hat{T}_g)$. Činjenicu da dve C^*-algebre tipa $C^*(A,G,T_g)$ generiraju izomorfne dinamičke sisteme nije teško proveriti .

Postavlja se pitanje: definiše li C^*-dinamički sistem (A,G,T_g) jednoznačnu algebru $\mathcal{B}$? odgovor je u opštem slučaju negativan. Zaista neka su date dve C^*-algebre $\mathcal{B} = C^*(A,G,T_g)$ i $\mathcal{B}_1 = C^*(A_1,G,U_g)$ sa istom grupom G i neka je dat izomorfizam $\varphi: A \to A_1$ C^*-algebre takav da za proizvoljno $a \in A$ i $g \in G$ važi

$$\varphi(T_g a T_g^{-1}) = U_g \varphi(a) U_g^{-1} \qquad (I.1.4)$$

tj. C^*-dinamički sistemi (A,G,T_g) i (A_1,G,T_g) su izomofni. Trebaobjasniti činjenicu da li se pridruživanje

$$\psi : \sum a_g T_g \to \sum \varphi(a_g) U_g \qquad (I.1.5)$$

zadato na skupu $\mathcal{B}^0$ konačnih suma može proširiti do izomorfizma C^*-algebrih $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}_1$. U opštem slučaju odgovor je negativan.

<u>Primer I.1.3.</u> Neka je A algebra operatora množenje neprekidnih periodičnih funkcija sa periodom 1 u prostoru $L_2^1(\mathbb{R})$, koji se sastoji iz periodičnih funkcija, koje lokalno pripadaju $L_2(\mathbb{R})$. Definišemo operator šifta T: $Tu(x) = u(x-h)$. C^*-algebra $\mathcal{B}$ generirana pomoću A i T je algebra tipa $C^*(A,\mathbb{Z},T^k)$. Neka je $\mathcal{B}_1$ C^*-algebra operatora u prostoru $L_2(\mathbb{R})$ generirana algebrom $\hat{A}_1$ operatora množenja neprekidnih perio-

[illegible] i o[illegible] šifta

dičnih (sa periodom 1) funkcija i operatorima šifta $Vu(x)=u(x-h)$. Tada je B algebra tipa $C^*(A_1,\mathbb{Z},V^k)$ i dejstvom izomorfizma $\varphi:A\to A_1$ važi jednakost (I.1.4). Međutim, ako je broj $h=\ell/N$ racionalan, tada pridruživanje

$$\sum a_k T_k \longrightarrow \sum a_k V^k \qquad (I.1.6)$$

ne definiše izomorfizam između algebri B i one B_1. Zaista, prema formuli (I.1.6) operatoru T^N odgovara operator V^N, pri čemu $T^N=I$ a $V^N\neq I$ što znači da nema izomorfizma. Što više, pridruživanje (I.1.6) čak ne predstavlja ni preslikavanje sa B^0 u B^1, jer desna strana zavisi od načina reprezentiranja elementa u obliku sume a u algebri B takvo reprezentiranje nije jednoznačno.

Kako se vidi iz gornjeg primera problem egzistencije izomorfizma se deli na dva problema:

Definiše li pridruživanje (I.1.6) algebarski izomorfizam između (ne zatvorenim) podalgebrama B^0 i B^1 koje se sastoje iz konačnih suma? i

Može li se na jedinstven način uvesti C^*-norma na B^0 koordinirana sa postojećem strukturom, koja se poklapa sa definisanom normom na A takva da je $\|T_g\|=1$?

Primeri pokazuju da je odgovor na pitanje jedinstvenosti normih u opštem slučaju negativan.

Primer I.1.4. Neka je B^0 algebra trigonometrijskih polinoma oblika

$$b(t)=\sum a_k e^{ikt}$$

Ako umesto A uzmemo polje $\mathbb{C}$ kompleksnih brojeva, stavimo $G=\mathbb{Z}$ i $T_k=e^{ikt}$, algebra B^0 pripada razmotrenoj klasi algebri i jeste algebra tipa $C^*(\mathbb{C},\mathbb{Z},T_k)$. Na B^0 možemo uvesti dve

C^*-norme: $\|b\|_1 = \max\limits_{0\le t\le 1} |b(t)|$, $\|b\|_2 = \max\limits_{0\le t\le 2\pi} |b(t)|$

Za te norme važi $\|a_k\|_1 = \|a_k\|_2 = |a_k|$, $\|e^{it}\|_1 = \|e^{it}\|_2 = 1$.

Međutim te norme su različite. Specijalno, kompletiranje C^*-algebra B° po normi $\| \ \|_1$ je algebra $C_{[0,1]}$ neprekidnih funkcija na segmentu, dok komletiranje B° po normi $\| \ \|_2$ je algebra $C(S^1)$ neprekidnih funkcija na kružnici i kompletiranja B i B_1 nisu izomorfna.

Primer I.1.5. Neka je G diskretna grupa, T_g njena leva regularna reprezentacija na prostoru $l_2(G)$, tj. reprezentacija koja deluje po formuli

$$T_g u(h) = u(g^{-1}h)$$

Neka je B° algebra operatora u $l_2(G)$, koja se sastoji iz konačnih suma $\sum a_g T_g$ sa konstantnim koeficientima. Ako umesto A uzmemo polje $\mathbb{C}$, tada algebra B° imaće gornju pomenutu strukturu. Na algebri B° postoji prirodna norma $\|b\|_1$ norma operatora u Hilbertovom prostoru $l_2(G)$. Postoji takođe norma $\|b\|_2$ koja je jača od C^*-norme na B° , definisana formulom

$$\|b\|_2 = \sup_{\pi} \|\pi(b)\|$$

gde se supremum bira preko skupa svih reprezentacija π algebre B° u Hilbertovom prostoru, koje udovoljavaju uslov

$$\|\pi(b)\| \leq c \sum |a_g|$$

Među svim prebrojivim grupama odvojimo podklasu grupa takozvane amenoabelne [14]. Ove grupe poseduju niz „dobrih svojstava". U klasu amenoabelnih grupa pripadaju sve komutativne grupe i sve razrešive grupe. Slobodna grupa sa dva generatora nije amenoabelna. Poznato je da $\|b\|_1 = \|b\|_2$

tada i samo tada, kada je grupa G amenoabelna [14]. Prema tome ako grupa G nije amenoabelna, tada na algebri B° postoje bar dve različite norme. U [3,4,7,9] ukazano je na uslove grupe G i na karakter njenog dejstva na algebri . Ako su ti uslovi ispunjeni, tada je odgovor na pitanje egzistencije izomorfizma pozitivan. Formulišemo te uslove i odgovarajuće rezultate. Ukazujemo na klasu grupa, za koje je dokazana teorema o izomorfizmu.

Za konačan podskup F iz grupe G označimo sa $|F|$ broj različitih elemenata tog skupa, dok sa F^n skup elemenata predstavljenih u obliku proizvoda od n elemenata iz F.

<u>Definicija I.1.2.</u> Grupu G sa konačnim brojem generatora $g_1, g_2, \ldots, g_l$ nazivamo <u>subeksponencijalnom</u>, ako za skup

$$F_0 = \{e, g_1, \ldots, g_l, g_1^{-1}, \ldots, g_l^{-1}\}$$

važi jednakost

$$\lim_{n\to\infty} |F_0^n|^{1/n} = 1 .$$

Elementi skupa F_0^n su slova dužine n i po definiciji u subeksponencijalnoj grupi broj slova dužine n raste sporije nego $e^{\varepsilon n}$ za bilo koji $\varepsilon > 0$.

<u>Definicija I.1.3.</u> Grupu G nazivamo <u>dopustivom</u> ako za bilo koji konačni podskup F iz G postoji niz podgrupa

$$G_0 = \{e\} \subset G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset G_p ,$$

tako da $F \subset G_p$,svaka podgrupa G_{k-1} je normalna u G_k i svaka faktor grupa G_k / G_{k-1} je subeksponencijalna.

U klasi dopustivih grupa pripadaju, specijalno sve razrešive grupe. Ubuduće sve grupe sa kojima se susrećemo su komutativne odakle i dopustive.

Neka je A komutativna C^*-algebra. Kao što je poznato [32] postoji kanonični izomorfizam između algebre A i algebre $C(M_A)$ neprekidnih funkcija na prostoru M_A maksimalnih ideala algebre A. Taj izomorfizam nazivamo Gelfandovo preslikavanje. Funkcija koja prilikom tog izomorfizma odgovara elementu a zove se Gelfandovo preslikavanje elementa a i označava se sa $\hat{a}(\xi)$, $\xi \in M_A$.

Svaki automorfizam $\tau: A \to A$ generira neki homeomorfizam $\alpha_\tau: M_A \to M_A$. Pri tome dejstvo automorfizma vezano je sa α_τ jednakošću

$$\widehat{\tau(a)}(\xi) = \hat{a}(\alpha_\tau(\xi)) \qquad (I.1.7)$$

Specijalno, svaki automorfizam $\hat{T}_g: a \to T_g a T_g^{-1}$ generira homeomorfizam $\alpha_g: M_A \to M_A$. Homeomorfizam α_g, $g \in G$ definiše dejstvo grupe G na M_A.

Definicija I.1.4. Kažemo da grupa G deluje na M_A topološki slobodno pomoću preslikavanja α_g, ako za bilo koji otvoreni skup $W \subset M_A$ i bilo koji konačni izbor F elemenata iz G postoji tačka $\xi_0 \in W$, tako da su slike $\alpha_g(\xi_0)$, $g \in F$ dva po dva različite.

U tom slučaju, takođe kažemo da grupa G deluje na algebri A pomoću automorfizama $\hat{T}_g$ topološki slobodno.

Teorema I.1.1. (Teorema o izomorfizmu) Neka je B C^*-algebra tipa $C^*(A, G, T_g)$, B_1 je C^*-algebra tipa $C^*(A_1, G, T_g)$ i neka su im generirani C^*-dinamički sistemi izomorfni tj. postoji izomorfizam $\varphi: A \to A_1$ takav da je

$$\varphi(T_g a T_g^{-1}) = U_g \varphi(a) U_g^{-1} \qquad (I.1.8)$$

Ako je grupa G dopustiva, algebra A komutativna i grupa G deluje automorfizmima na A topološki slobodno, tada pridruživanje

$$\Phi : \sum a_g T_g \longrightarrow \sum \varphi(a_g) U_g \qquad (I.1.9)$$

proširuje se sa skupa B^o konačnih suma do izomorfizma C^*-algebri B i B_1.

U drugoj varijanti teoreme uslov dejstva topološki slobodno zamenjuje se sa nekoliko nejednakosti. Tu varijantu teoreme primenjujemo u slučaju narušenja uslova dejstva topološki slobodno.

<u>Teorema I.1.2.</u> Neka je B C^*-algebra tipa $C^*(A,G,T_g)$ B_1 je C^*-algebra tipa $C^*(A_1,G,U_g)$ i neka su im generirani C^*-dinamički sistemi izomorfni, tj. postoji izomorfizam $\varphi : A_1 \to A_1$ takav da važi (I.1.8).

Ako je grupa G subeksponencijalna, A proizvoljna C^*-algebra i za konačne sume važe nejednakosti

$$\| \sum a_g T_g \| \geq \| a_e \| \ , \quad a_g \in A \qquad (I.1.10)$$

$$\| \sum a_g U_g \| \geq \| a_e \| \ , \quad a_g \in A_1 \qquad (I.1.11)$$

tada pridruživanje (I.1.5) proširuje se sa skupa B^o konačnih suma do izomorfizma C^*-algebri B i B_1.

Vezu izmedu uslova dejstva topološki slobodno i nejednakosti (I.1.10) utvrduje sledeća teorema

<u>Teorema I.1.3.</u> Neka je B algebra tipa $C^*(A,G,T_g)$ gde je A izomorfna sa $C(M)$ i komutativna. Grupa G deluje na A automorfizmima topološki slobodno.

Tada za bilo koji elemenat b iz B^o oblika

$$b = \sum_{g \in F} a_g T_g$$

gde je F konačan skup iz G, važi

$$\| \sum a_g T_g \| \geq \| a_e \| .$$

§ I.2. SPEKTRALNI RADIJUS OPERATORA TEŽINSKOG ŠIFTA

Prilikom ispitivanja spektralnih svojstva funkcijonalnih operatora, prvi korak je izračunavanje spektralnog radiusa. Takvo izračunavanje u slučaju operatora težinskog šifta, tj. operatora oblika

$$\mathcal{b}u(x) \equiv a(x)u(g(x)) \qquad (I.2.1)$$

je veoma bitno, jer u tipičnim slučajima spektar operatora oblika (I.2.1) je prsten ili krug i spektralni radius daje sve informacije o spektru . Formulu spektralnog radiusa možemo dobiti ne samo za C^*-algebre, več i u slučaju kada je A uniformna algebra [6,22,27] .

Neka je $\mathcal{X}$ kompaktan. Posmatrajmo uniformnu algebru A na $\mathcal{X}$, tj. uniformnu zatvorenu podalgebru algebre $C(\mathcal{X})$. Neka je $\pi: A \to L(E)$ izometrička reprezentacija algebre A u algebru linearnih ograničenih operatora u Banachovom prostoru E , T invertibilni operator i izomtrija u E takav da je

$$T\pi(A)T^{-1} = \pi(A) .$$

Automorfizam $\hat{T}: \pi(A) \to \pi(A)$ definisan formulom

$$\hat{T}(\mathcal{b}) = T\mathcal{b}T^{-1} \quad , \quad \mathcal{b} \in \pi(A) \quad ,$$

generira homeomorfizam $\alpha: M \to M$ prostora maksimalnih ideala algebre A: $\quad \hat{T}(a)(m) = a(\alpha(m))$, $m \in M$.

Definicija I.2.1. Podskup V prostora M nazivamo granicom za A [6,32], ako za proizvoljnu funkciju $f \in A$ maksimum modula dostiže se na V . Presek svih zatvorenih granica za A je granica za A i nazivamo je granicom Šilova ∂A algebre A .

Primetimo da $\partial A \subset X \subset M$. Pošto je homeomorfizam α generiran pomoću automorfizama algebre A, tada za bilo koju granicu V slika $\alpha(V)$ takođe je granica a isto tako je i $\alpha^{-1}(V)$. Prema tome ∂A je invarijantna u onosu na α.

<u>Definicija I.2.2.</u> Neka je $(\mathcal{Y}, \nu)$ prostor sa konačnom merom, $b \in L^{\infty}(\mathcal{Y})$. Geometrijskom sredinom funkcije b po meri ν zovemo broj

$$S_{\nu}(b) = \exp \int_{\mathcal{Y}} \ln |b(y)| d\nu$$

i stavljamo $S_{\nu}(b)=0$, ako je $\ln|b(y)|$ ne sumabilna funkcija.

Neka je $\beta : (\mathcal{Y}, \nu) \to (\mathcal{Y}, \nu)$ merljivo preslikavanje. Mera ν zove se <u>invarijantna</u> u odnosu na preslikavanje β ako je

$$\nu(\beta^{-1}(\omega)) = \nu(\omega)$$

za bilo koji merljiv skup ω; Verovatnoćna(tj. $\nu(\mathcal{Y})=1$) invarijantna mera ν zove se <u>ergodična</u>, ako je $\nu(\omega)=0$ ili $\nu(\omega)=1$ za bilo koji merljiv skup ω takav da

$$\nu(\omega \vartriangle \beta^{-1}(\omega)) = 0 .$$

(Simbolom $\omega_1 \vartriangle \omega_2$ označavamo simetričnu razliku

$$(\omega_1 \setminus \omega_2) \cup (\omega_2 \setminus \omega_1) \quad [23]).$$

Setimo se da <u>nosačem</u> mere ν na topološkom prostoru $\mathcal{Y}$ (oznaka $\mathrm{supp}\,\nu$) nazivamo najmanji zatvoreni skup takav da je

$$\nu(\mathcal{Y} \setminus \mathrm{supp}\,\nu) = 0 .$$

<u>Teorema I.2.1.</u> Neka je A uniformna algebra, $\alpha : \partial A \to \partial A$ homeomorfizam granice Šilova ∂A, generiran automorfizmom $a \to TaT^{-1}$. Za spektralni radius $r(\pi(a)T)$ operatora $\pi(a)T$, $a \in A$ važi formula

$$r(\pi(a)T) = \max_{\nu\in\Lambda} S_\nu(a) \qquad (I.2.2)$$

gde je Λ skup mera na ∂A, ergodičnih u odnosu na homeomorfizam α.

Da bi primenili tu teoremu i dobili neke opšte rezultate, potrebno je naći ergodične mere za konkretnu klasu preslikavanja.

Razmotrimo nekoliko primera, gde se izračunava spektralni radius operatora tipa težinskog šifta, pomoću Teoreme I.2.1.

Primer I.2.1. Neka je $S^1 = \mathbb{R}^1 (\mathrm{mod}\, \mathbb{Z})$, $\alpha : S^1 \to S^1$ homeomorfizam kružnice. Budući da postoji očigledna klasifikacija homeomorfizama kružnice [31], tada je moguće opisati sve ergodične mere. Istovremeno, niz karateristističnih svojstava operatora težinskih šiftova realizuju se tek u prostijim slučajima, kada se takvi operatori posmatraju u prostoru funkcija na kružnicu.

Podsetimo se nekih pojmova iz teorije preslikavanja kružnice [31].

Tačka $p \in S^1$ zove se nelutajuća tačka za homeomorfizam α, ako za bilo koju njenu okolinu U postoji takav broj $n \in \{\mathbb{Z} \setminus 0\}$ takav da je

$$[\alpha^n(U) \cap U] \neq \emptyset$$

Neka je $\mathcal{N}(\alpha)$ skup nelutajućih tačaka za α. Očigledno $\mathcal{N}(\alpha)$ je invarijantan i zatvoren skup. Nosač bilokoje ergodične mere u odnosu na homeomorfizam α leži u $\mathcal{N}(\alpha)$.

Ako homeomorfizam α čuva orjentaciju, tada njemu možemo pridružiti broj $\tau(\alpha)$, $0 \leq \tau(\alpha) \leq 1$, takozvani broj rotacija.

Broj $\tau(\alpha)$ je racionalan tada i samo tada, kada se $\Omega(\alpha)$ sastoji samo iz **neperiodičnik** tačaka.

U slućaju kada je $\tau(\alpha)$ iracionalan razlikujemo dva oblika homeomorfizma:

i) trnzitivni, kada je $\Omega(\alpha) = S^1$.

ii) netrnzitivni, kada je $\Omega(\alpha)$ perfektan i nigde gust skup.

Ako je α difeomorfizam, pri čemu je izvod α' neprekidan i ograničene varijacije a $\tau(\alpha)$ iracijonalan broj, tada je po Teoremi Danžua [24] α tranzitivan.

Primer I.2.2. U prostoru $C(S^1)$ posmatrajmo operator

$$[(aT)f](x) = a(x)f(\alpha(x))$$

gde $a(x) \in C(S^1)$, α homeomorfizam od S^1 . Neka je $A = C(S^1)$, tada je $\partial A = S^1$, $\pi : A \to \mathcal{L}(C(S^1))$, $[\pi(a)f](x) = a(x)f(x)$ - je izometrička reprezentacija algebre A .

$T : C(S^1) \to C(S^1)$, $[Tf](x) = f(\alpha(x))$ je izometrija i invertibilni operator u $C(S^1)$, pri čemu

$$T\pi(a)T^{-1} = \pi\, a(\alpha(x)), \quad a \in A .$$

Na taj način ispunjavaju se uslovi Teoreme I.2.1.

a) $\tau(\alpha) = \frac{M}{N}$, gde je $\frac{M}{N}$ neskratljivi razlomak. U tom slućaju najmanji period svake neperiodične tačke iz $\Omega(\alpha)$ jednak je N [31]. Svakoj tački $x \in \Omega(\alpha)$ možemo pridružiti ergodičnu meru μ_x:

$$\mu_x(x) = \mu_x(\alpha(x)) = \cdots = \mu_x(\alpha^{N-1}(x)) = \frac{1}{N} .$$

a meru od ostalog dela od S^1 uzmemo nula. Očigledno, da bilo koja mera koja je ergodična u odnosu na α ima takav oblik. Prema tome ako je $\tau(\alpha)=\frac{M}{N}$ tada se spektralni radijus operatora aT izračunava poformuli

$$r(aT)=\max_{x_0\in\Omega(\alpha)} \exp\int_{S^1} \ln|a(x)|d\mu_{x_0}=\max_{x_0\in\Omega(\alpha)}\left[\prod_{i=0}^{N-1}|a(\alpha^i(x_0))|\right]^{\frac{1}{N}}$$

Ako su sve tačke kružnice periodične, $\alpha^N(x)=x$ tada u tom slučaju imamo

$$r(aT)=\max_{x\in S^1}\left[\prod_{i=0}^{N-1}|a(\alpha^i(x))|\right]^{1/N}.$$

b) α - Tranzitivni homeomorfizam ($\Omega(\alpha)=S^1$)

Neka je $\theta_{\tau(\alpha)}$ rotacija kruga za ugao $\tau(\alpha)$, koji se dobija iz šifta na pravoj $t\to t+\tau(\alpha)$. Poznato je u tom slučaju da je preslikavanje α topološki konjugovano rotaciji $\theta_{\tau(\alpha)}$, [31], tj. postoji homeomorfizam $h: S^1\to S^1$ takav da je sledeći dijagram komutativan

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{\alpha} & S^1 \\ h\downarrow & & \downarrow h \\ S^1 & \xrightarrow{\theta_{\tau(\alpha)}} & S^1 \end{array}$$

Ako je ν invarijantna mera za α, tada se mera μ definiše formulom

$$\mu(\omega)=\nu(h^{-1}(\omega)),\quad \omega\subset S^1,$$

i invarijantna je u odnosu na $\theta_{\tau(\alpha)}$. Očigledno je da se na taj način uspostavlja uzajamno jednoznačno pridruživanje između ergodičnih mera u odnosu na α i ergodičnih mera u odnosu na $\theta_{\tau(\alpha)}$. Međutim za $\theta_{\tau(\alpha)}$ postoji jedinstvena Borelova invarijantna mera - mera Lebega. U tom slučaju formula spektralnog radijusa je oblika

$$r(aT) = \exp\int_{S^1} \ln|a(h^{-1}(x))|\,dx$$

gde smo stavili

$$\exp\int_{S^1} \ln|a(h^{-1}(x))|\,dx = 0 \,,$$

ako integral na desnoj strani divergira.

Za $a(x) \neq 0$ na S^1 iz formule

$$\max_{\Lambda} S_\nu(a) \geqslant |\lambda| \geqslant \min_{\Lambda} S_\nu(a)$$

sledi da spektar operatora aT leži na kružnici radiusa

$$\exp\int_{S^1} \ln|a(h^{-1}(x))|\,dx \,.$$

<u>Primedba I.2.1.</u>

a) Ako je α rotacija kružnice $\alpha = \theta_{\tau(\alpha)}$ tada je $h(x) = x$ i

$$\tau(aT) = \exp\int_{S^1} \ln|a(x)|\,dx$$

b) Neka je α tranzitivni homeomorfizam (gde je $\Omega(\alpha)$ nigde gust skup). Označimo sa

$\Omega_1(\alpha) = \{$ levi krajevi komplemenata od $\Omega(\alpha)$ intervala$\}$,

$\Omega_2(\alpha) = (\Omega(\alpha) \setminus \Omega_1(\alpha))$.

Zna se [31] da u tom slučaju postoji uzajamno jednoznačno neprekidno preslikavanje $h : \Omega_2(\alpha) \to S^1$ (topologija na $\Omega_2(\alpha)$ inducirana sa S^1) takvo da je sledeći dijagram komutativan:

$$\begin{array}{ccc}
\Omega_2(\alpha) & \xrightarrow{\alpha} & \Omega_2(\alpha) \\
h \downarrow & & h \downarrow \\
S^1 & \xrightarrow{\theta_{\tau(\alpha)}} & S^1
\end{array}$$

Primetimo da je $\mathcal{B}_1(\alpha)$ prebrojiv skup i invarijantan u odnosu na α koji se sastoji iz ne periodinih tačaka (Ako je $\tau(\alpha)$ iracijonalan, tada homeomorfizam α nema periodičnih tačaka). Odakle za bilo koju meru ν ergodičnu u odnosu na α imamo $\nu(\mathcal{B}_1(\alpha))=0$. Primetimo da nosać bilo koje takve mere leži u $\mathcal{B}(\alpha)$. Prema tome $\nu(\mathcal{B}_2(\alpha))=1$. Na isti način kao i kod slućaja b) postoji uzajamno jednoznačno pridruživanje koje je ergodično u odnosu na α i ergodično u odnosu na $\theta_{\tau(\alpha)}$

$$\left(\mu(\omega)=\nu(h^{-1}(\omega))\ ,\ \omega\subset S^1\right).$$

Budući da jedinstvena ergodična mera u odnosu na $\theta_{\tau(\alpha)}$ je mera Lebega, tada dobijamo

$$r(aT)=\exp\int_{S^1}\ln|a(x)|\,dx\quad,$$

gde je ν mera sa nosaćem na $\mathcal{B}(\alpha)$, definisana po meri Lebega na S^1.

Tu formulu možemo napisati i drugaćije. Uvedimo funkciju $\tilde{a}$ na S^1, zadatu uslovom $\tilde{a}(x)=a(h^{-1}(x)),\ x\in S^1$. Tada je

$$r(aT)=\exp\int_{S^1}\ln|\tilde{a}(x)|\,dx$$

U slućaju kada je $a(x)\neq 0$ na S^1 , na isti način kao u tački b), ustanovimo da spektar $\sigma(aT)$ operatora aT leži na krugu radijusa

$$\exp\int_{S^1}\ln|a(x)|\,d\nu$$

c) Neke homeomorfizam $\alpha: S^1\longrightarrow S^1$ menja orjentaciju. U tom slućaju [31] $\mathcal{B}(\alpha)$ se sastoji iz dve fiksne tačke x_1 i x_2 i moguće tačaka periode 2 (skup takvih tačaka označimo sa $\mathcal{B}_1(\alpha)$). Zaključivši isto kao kod slućaja a) imamo

$$r(aT) = \max\left\{|a(x_1)|, |a(x_2)|, \max_{x \in \partial b_1(\alpha)} |a(x)\cdot a(\alpha(x))|^{\frac{1}{2}}\right\}$$

Primer I.2.3. U prostoru $L^p(S^1)$, $1 \le p \le \infty$ posmatrajmo operator

$$[(aT)f](x) = a(x)\left[\alpha'(x)\right]^{1/p} f(\alpha(x)),$$

gde $a(x) \in C(S^1)$, α-homeomorfizam od S^1, koji čuva klasu ekvivalentnostiLebegove verovatnoćne mere, $\frac{1}{\infty}=0$, $\alpha'(x)$ izvod Radona-Nikodima mere $\alpha(dx)$ po meri Lebega dx (ako α ima izvod u tački x_0, tada možemo uzeti da se $\alpha'(x_0)$ poklapa sa vrednošću izvoda α u tački x_0).

Umesto A uzmemo $C(S^1)$, $\partial A = S^1$, $\pi: A \to L(L^p(S^1))$, $[\pi(a)f](x) = a(x)f(x)$ je izometrička reprezentacija algebre A. Operator $T: L^p(S^1) \to L^p(S^1)$ definišemo po formuli

$$[Tf](x) = \left[\alpha'(x)\right]^{1/p} f(\alpha(x)).$$

Tada je T izometrija i invertibilni operator, pri čemu

$$T\pi(a)(x)T^{-1} = \pi(a(\alpha(x))).$$

Kako su mere invarijantne u odnosu na α iste kao kod PrimeraI.2.4. , tada koristeči slučajeve a),b),c) i d) dobijamo formulu spektralnog radijusa operatora oblika aT.

Primer I.2.4. U prostoru H^p, $1 \le p \le \infty$ posmatrajmo operator

$$[(aT)f](x) = a(x)\left[\alpha'(x)\right]^{1/p} f(\alpha(x)),$$

gde je $a(x)$ analitička funkcija u D, neprekidna u $\bar{D}$, α homeomorfizam sa $\bar{D}$ na $\bar{D}$, koji je analitičan u D, $\alpha'(x)$ je izvod od α u D, $\frac{1}{\infty}=0$.

Neka je A algebra neprekidnih funkcija na $\bar{D}$ i analitičkih u D. A je nuiformna algebra na S^1 i $\partial A = S^1$,

$\pi: A \to L(H^p)$, $[\pi(a)f](x) = a(x)f(x)$ - je izometrička reprezentacija od A. Operator $T: H^p \to H^p$ definisan sa

$$[Tf](x) = [\alpha'(x)]^{1/p} f(\alpha(x))$$

je izometrija i invertibilni operator u H^p, pri čemu

$$T\pi(a(x))T^{-1} = \pi(a(\alpha(x))) .$$

Na taj način, primenivši TeoremuI.2.1. i PrimerI.3.1. , dobijamo formulu spektralnog radijusa za operatore oblika aT.

<u>Primedba I.2.2.</u> Zbog analitičnosti preslikavanja $\alpha: S^1 \to S^1$ i teoreme Danžuaa [24], u datom primeru ne može se realizirati slučaj b) Primera I.3.1. - ne tranzitivni homeomorfizam.

<u>Primer I.2.5.</u> Neka je $\mathbb{T}^m$ torus realiziran kao prostor R^m po mod 1 po svakoj promenljivoj. U prostoru $C(\mathbb{T}^m)$ ($L^p(\mathbb{T}^m)$, $1 \leq p \leq \infty$) definišemo operator šifta po formuli $[Tf](x) = f(\alpha(x))$, $\alpha(x) = x + h$, $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ je dati vektor.

Posmatrajmo operatore aT gde je a operator množenje neprekidne funkcije $a(x) \in C(\mathbb{T}^m)$. Kao algebru A izaberimo algebru neprekidnih funkcija

$$A = C(\mathbb{T}^m), \ \partial A = \mathbb{T}^m$$

Očigledno, ispunjeni su uslovi TeoremeI.2.1. .

Označavamo sa B_x zatvarač od $\mathbb{T}^m$ skupa tačaka oblika $\{x + kh : k = 0, \pm 1, \ldots\}$ gde je x fiksiran. B_x je podmnogostrukost čiji je rang p jednak broju racionalno nezavisnih među brojeva $1, h_1, h_2, \ldots, h_m$. Svaka podmnogostrukost B_x je ili torus $\mathbb{T}^p$ ili unija konačnog broja torusa. Torus $\mathbb{T}^n$ se posmatra na skupu B_x na kome je definisana realna mera μ_x, koja je invarijantna u odnosu na šift α. Te mere su ergodične u odnosu na α. Zaista neka je ν neka ergodična mera u odnosu na α . Ako je $x \in supp\,\nu$, tada i $\beta_x \subset supp\,\nu$. Neka je W neka invarijantna okolina skupa β_x i $\varphi \in C(\mathbb{T}^m)$ realna funkcija, koja ispunjava uslove:

(i) $0 \le \varphi(y) \le 1$, $y \in \mathbb{T}^m$

(ii) $\varphi(y) = 1$, $y \in \beta_x$

(iii) $\varphi(y) = 0$, $y \in \overline{W}$

Po teoremi Birkhofa [23] imamo

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\varphi(\alpha^k(y)) \longrightarrow \int_{\mathbb{T}^m}\varphi(y)\,d\nu > 0$$

skoro svuda. Pošto je $\varphi(x)=1$, tada je $\int_{\mathbb{T}^m}\varphi(y)\,d\nu > 0$. Otuda sledi (zbog uslova (iii) i invarijantnosti okoline W u odnosu na α), da $supp\,\nu \subset \overline{W}$. Ali W je bilo koja invarijantna okolina od β_x . Odakle $supp\,\nu = \beta_x$.

U skupu β_x imamo prirodno strukturu kompaktne topološke grupe sa jednim generatorom (npr. kao jedinica može se izabrati tačka x a kao generator tačka $x+h$). Budući da je mera μ invarijantna u odnosu na šiftove $y \to y+kh$, $k=0,\pm 1,\pm 2,\dots$ (tj. invarijantna u odnosu na šiftove, generiranih generatorima grupe β_x), tada je ona invarijantna u odnosu na proizvoljne šiftove na grupu β_x, odakle je normirana mera Haara na β_x tj. poklapa se sa μ_x . Prema tome dobijamo formulu spektralnog radiusa

$$r(aT) = \max_{\beta_x} \exp\int_{\beta_x} \ln|a(y)|\,d\mu_x$$

U slučaju kada je $a(x) \neq 0$ na $\mathbb{T}^m$, spektar $\sigma(aT)$ leži na prsten:

$$\min_{\beta_x} \exp\int_{\beta_x}\ln|a(y)|\,d\mu_x \le \lambda \le \max_{\beta_x} \exp\int_{\beta_x}\ln|a(y)|\,d\mu_x .$$

Primer I.2.6. Neka je na mnogostrukost X dato dejstvo kompaktne grupe G tj. neprekidno preslikavanje $\Phi : G \times X \to X$ za koje su ispunjeni uslovi

$$e(x)=x\,,\ g_1(g_2(x))=(g_1 g_2)(x)\,,\ g_i \in G\,, x \in X \quad \text{gde je} \quad g(x)=\Phi(g,x).$$

Neka je $g_0 \in G$ fiksirani elemenat iz G_0 -- minimalna zatvorena podgrupa koja sadrži g_0. Zadajemo na X Rimanovu metriku invarijantnu u odnosu na dejstvo grupe G. Ta metrika generira invarijantnu meru μ. U prostoru $L^p_\mu(X)$ posmatrajmo operator aT_{g_0} definisan formulom:

$$((aT_{g_0})f)(x) = a(x)f(g_0(x))\,, \quad \text{gde je} \quad a \in C(X) = A$$

Primetimo da je prethodni primer je specijalan slučaj pomenute konstrukcije, ako stavimo $X = \mathbb{T}^m$, $G = \mathbb{T}^m$ i dato je standardno dejstvo $g(x) = g + x$

Primenimo na PrimeruI.2.6. TeoremuI.2.1. . Zato ispisujemo sve ergodične mere. Neka je ν neka ergodična mera Kao kod PrimeraI.2.5. možemo pokazati da postoji tačka x_0, za koju $\operatorname{supp} \nu = \beta_{x_0}$, gde je

$$\beta_{x_0} = \{g_0^k(x_0) : \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\} = \{g(x_0),\ g \in G_0\}.$$

Po funkciji $f \in C(X)$ i tačke x konstruišemo funkciju $f_x \in C(G_0)$ po formuli

$$f_x(g) = f(g(x))\,, \quad g \in G_0$$

Označimo sa G_{x_0} stacionarnu podgrupu G_0 tačke x_0, $G' = G_0 / G_{x_0}$, gde je f'_{x_0} funkcija na G generirana funkcijom f_{x_0} na G_0. Definišemo meru ν' na G' formulom

$$\int_X f(x)\,d\nu = \int_{G'} f'_{x_0}(g)\,d\nu' \qquad (I.2.3)$$

Mera ν' je invarijantna u odnosu na dejstvo grupe G', jer je mera ν invarijantna u odnosu na dejstvo grupe G_0. Od toga da je preslikavanje $f \to f'_{x_0}$ izomorfizam $C(\beta_{x_0}) \cong C(G')$ sledi da je ν' normirana mera Haara na G'.

Primetimo da za bilo koju tačku $x_0 \in X$ formula (I.3.1), gde je ν' normirana mera Haara na G', definiše neku ergodičnu meru ν na X takvu da je $supp\,\nu = \beta_{x_0}$. Pošto je

$$\int_{G'} f'_{x_0} d\nu' = \int_{G_0} f_{x_0} dg \quad ,$$

gde je dg normirana mera Haara na G_0, imamo

$$\int_X f(x) d\nu = \int_{G_0} f'_{x_0}(g) dg \quad .$$

Odakle spektralni radius operatora aT_{g_0} izražava se pomoću formule

$$r(aT_{g_0}) = \max_{x \in X} \exp \int_{G_0} \ln |a(gx)| dg \quad .$$

§ I.3. USLOV INVERTIBILNOSTI FUNKCIONALNIH OPERATORA

U ovom paragrafu formulisat ćemo potrebne i dovoljne uslove [2,5,6,7,27] invertibilnosti operatora oblika

$$b = a_0 + a_1 T$$

u slučaju kada je A komutativna C^*-algebra sa jedinicom koja sadrži operatore, koji deluju u Hilbertovom prostoru, T je unitarni operator takav da je $TAT^* = A$, i zadovoljava sledeći uslov $(*)$. Takvi operatori generišu algebru tipa $C^*(A,\mathbb{Z},T^k)$.

<u>Definicija I.3.1.</u> Kažemo da operator T (ili odgovarajući automorfizam $\tilde{T}: A \to A$, ili homeomorfizam $\alpha: M \to M$ prostora M maksimalnih ideala algebre A) zadovoljava uslov $(*)$, ako za bilo koji $n \in \{\mathbb{Z} \setminus 0\}$ skup $U_n = \{m \in M : \alpha^n(m) = m\}$ nema unutrašnost.

Uslov $(*)$ je ekvivalentan sa sledećim uslovima:

a) Skup periodičnih tačaka homeomorfizma $\alpha: M \to M$ je skup prve kategorije Bera ili

b) Skup neperiodičnih tačaka

$$U_\infty = \left[M \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n\right]$$

je svuda gust u M. Taj uslov znači da grupa $\mathbb{Z}$ deluje automorfizmima $\hat{T}^k$ na algebru A topološki slobodno.

<u>Definicija I.3.2.</u> Neka je M topološki prostor, $\alpha: M \to M$ neprekidno preslikavanje. Prostor M nazivamo α-vezanim ako ga ne možemo predstaviti u obliku $M = M_1 \cup M_2$ gde su M_1 i M_2 zatvoreni skupovi i invarijantni u odnosu

na α i $M_1 \cap M_2 = \phi$.

Teorema I.3.1. Neka α zadovoljava uslov (*) i neka je prostor M α-vezan.

Operator $\mathcal{B} = a_0 + a_1 T$ je invertibilan tada i samo tada ako važi jedan od sledećih uslova

1) a_0 -invertibilan operator
$S_\nu(a_0) > S_\nu(a_1)$ za meru $\nu \in \Lambda_\alpha$.

2) a_1 -invertibilni operator i
$S_\nu(a_1) > S_\nu(a_0)$ za bilo koju meru $\nu \in \Lambda_\alpha$, gde je Λ_α skup mera na prostoru maksimalnih ideala algebre A ,ergodičnih u odnosu na α ,

Primer I.3.1. U prostoru $L^2(S^1)$ posmatrajmo operator $\mathcal{B}$ koji deluje po formuli

$$[\mathcal{B}f](t) = a_0(t)f(t) + a_1(t)|\alpha'(t)|^{\frac{1}{2}} f(\alpha(t)) \quad ,$$

gde je $a_i \in C(S^1)$, $i = 0, 1$, α je homeomorfizam od S^1,koji zadovoljava uslov (*) i čuva klasu ekvivalentnosti verovatnočne Lebegove mere dt , $\alpha'(t)$ je Radon-Nikodimov izvod mere $\alpha(dt)$ po meri dt .

a) $\tau(\alpha) = \frac{M}{N}$ je neskratljivi razlomak. Koristeći rezultate iz PrimeraI.2.2. a) i TeoremeI.3.1. , zaključujemo da je operator $\mathcal{B}$ invertibilan onda i samo onda kada važi jedan od ova dva uslova:

1) $a_0(t) \neq 0$ za $t \in S^1$ i

$$\prod_{i=0}^{N-1} |a_0(\alpha^i(t'))| > \prod_{i=0}^{N-1} |a_1(\alpha^i(t'))| \quad \text{za} \quad t' \in \Omega(\alpha)$$

2) $a_1(t) \neq 0$ za $t \in S^1$ i

$$\prod_{i=0}^{N-1}|a_1(\alpha^i(t'))| > \prod_{i=0}^{N-1}|a_0(\alpha^i(t'))| \quad \text{za} \quad t'\in \mathcal{N}(\alpha).$$

b) α je tranzitivni homeomorfizam.

Koristeći oznake iz PrimeraI.2.2. b) i TeoremeI.3.1. dobijamo sledeći rezultat: operator $\mathcal{B}$ je invertibilan tada i samo tada ako važi jedan od ova dva uslova:

1) $a_0(t)\neq 0$ za $t\in S^1$ i

$$\int_{S^1} \ln|a_0(h^{-1}(t))|dt > \int_{S^1} \ln|a_1(h^{-1}(t))|dt$$

2) $a_1(t)\neq 0$ za $t\in S^1$ i

$$\int_{S^1} \ln|a_1(h^{-1}(t))|dt > \int_{S^1} \ln|a_0(h^{-1}(t))|dt ,$$

c) α je netranzitivni homeomorfizam.

koristeći oznake iz PrimeraI.2.2. b) i TeoremeI.3.1. zaključujemo: operator $\mathcal{B}$ je invertibilan tada i samo tada ako važi jedan od ova dva uslova:

1) $a_0(t)\neq 0$ za $t\in S^1$ i

$$\int_{S^1} \ln|\tilde{a}_0(t)|dt > \int_{S^1} \ln|\tilde{a}_1(t)|dt$$

2) $a_1(t)\neq 0$ za $t\in S^1$ i

$$\int_{S^1} \ln|\tilde{a}_1(t)|dt > \int_{S^1} \ln|\tilde{a}_0(t)|dt .$$

d) homeomorfizam α menja orjentaciju.

U tom slučaju $\mathcal{N}(\alpha)$ sastoji se iz fiksnih tačaka t_1 , t_2 i tačaka periode 2 (skup poslednjih tačaka označavamo sa $\mathcal{N}_2(\alpha)$).

Koristeći rezultate iz PrimeraI.2.2. b) i TeoremeI.3.1. imamo: operator $\mathcal{B}$ je invertibilan tada i samo tada ako važi jedan od ova dva uslova

1) $a_0(t) \neq 0$ za $t \in S^1$ i $|a_0(t_i)| > |a_1(t_i)|$; $i=1,2$:

$$|a_0(t')\cdot a_0(\alpha(t'))| > |a_1(t')\cdot a_1(\alpha(t'))|, \quad t' \in \mathcal{O}b_1(\alpha),$$

2) $a_1(t) \neq 0$ za $t \in S^1$ i $|a_1(t_i)| > |a_0(t_i)|$; $i=1,2$;

$$|a_1(t')\cdot a_1(\alpha(t'))| > |a_0(t')\cdot a_0(\alpha(t'))| \quad, t' \in \mathcal{O}b_1(\alpha).$$

Primer I.3.2. U prostoru $L^2(\mathbb{T}^n)$ ($\mathbb{T}^n$ je n-dimenzionalni torus prostora $\mathbb{R}^n$ uzet po modulu 1 po svakoj promenljivoj) razmotrimo operator $\mathcal{B}$ zadat formulom:

$$[\mathcal{B}f](x) = a_0(x)f(x) + a_1(x)f(x+h) \quad ,$$

gde je $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ dati vektor takav da bar jedan od brojeva h_i, $i=1,2,\dots,n$ iracionalan (u tom slučaju preslikavanje $\alpha: \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$, $\alpha(x) = x+h$ zadovoljava uslov (*) .

Koristeći oznake iz PrimeraI.2.5. i TeoremaI.3.1., dolazimo do sledećeg rezultata: operator $\mathcal{B}$ je invertinilan tada i samo tada, kada važi jedan od ova dva uslova

1) $a_0(x) \neq 0$ za $x \in \mathbb{T}^n$ i

$$\int_{\beta_x} \ln|a_0(y)|\,d\mu_x > \int_{\beta_x} \ln|a_1(y)|\,d\mu_x \quad \text{za sve } x \in \mathbb{T}^n$$

2) $a_1(x) \neq 0$ za $x \in \mathbb{T}^n$ i

$$\int_{\beta_x} \ln|a_1(y)|\,d\mu_x > \int_{\beta_x} \ln|a_0(y)|\,d\mu_x \quad \text{za sve } x \in \mathbb{T}^n.$$

Navedimo još dve klase funkcijonalnih operatora za koje su očigledne poznate uslovi invertibilnosti [5].

Operatori sa konveksnim racionalno nezavisnom sistemom šiftova

Posmatrajmo operatore oblika

$$\mathscr{b}u(x) \equiv \sum_{k=1}^{n} a_k(x)\, u(x+h_k) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n$$

u prostoru $L_2(\mathbb{R}^n)$, gde je $h_k \in \mathbb{R}^n$.

Definicija I.3.3. Sistem vektora $(h_1, h_2, \dots, h_m)$ iz $\mathbb{R}^n$ nazivamo racijonalno nezavisnim, ako su vektori

$$h_2 - h_1 \, , \; h_3 - h_1 \, , \; \dots \, , \; h_m - h_1$$

linearno nezavisni nad poljem racionalnih brojeva.

Definicija I.3.4. Sistem vektora $h_1, h_2, \dots, h_m$ iz $\mathbb{R}^n$ nazivamo konveksnim , ako su sve tačke h_j , $j = 1, 2, \dots, m$ temena nekog konveksnog poliedra.

Teorema I.3.2. Neka su koeficienti a_k ograničeni i neka postoji limes $\lim_{x\to\infty} a_k(x) = a_k(\infty)$. Ako je sistem vektora $h_1, h_2, \dots, h_m$ konveksan i racionalno nezavisan, tada je operator $\mathscr{b}$ invertibilan u prostoru $L_2(\mathbb{R}^n)$ tada i samo tada kada za neki indeks k_0 , $1 \leq k_0 \leq m$, važe uslovi

1) $$|a_{k_0}(\infty)| > \sum_{k \neq k_0} |a_k(\infty)|$$

2) $$a_{k_0}(x) \neq 0 \, , \qquad x \in \mathbb{R}^n \, .$$

Navedimo drugu klasu operatora vezanih sa još jednom varijantom Teoreme o izomorfizmu.

Neka u grupi G postoji normalna komutativna podgrupa G_0 takva da u algebri $\mathcal{B}$ tipa $C^*(A, G, T_g)$ važi uslov

$$T_g \, a \, T_g^{-1} = a \quad \text{za sve} \quad g \in G_0 \, , \; g \in A \, .$$

Neka pri tome grupa G_o ima konačan indeks, tj. faktor grupa $\Gamma = G/G_o$ je konačna. Neka je A_o komutativna C^*-algebra, generirana algebrom A i elementom T_g, $g \in G_o$. Ta algebra je izomorfna sa algebrom $C(M_o)$ neprekidnih funkcija na njenom prostoru maksimalnih ideala.

Neka je $\Gamma = G/G_o$. Za svako $g \in G$ preslikavanje $\hat{T}_g : a \to T_g a T_g^{-1}$ je automorfizam algebre A, pri čemu taj automorfizam zavisi samo od susedne klase elementa g. Samim time je definisano dejstvo grupe Γ automorfizmima na A. Zbog normalnosti podgrupe G_o, grupa Γ deluje takode automorfizmima na C^*-algebri A_o. Neka je $\alpha_g : M_{A_o} \to M_{A_o}$ homeomorfizam generiran automorfizmoma $\hat{T}_g : A_o \to A_o$.

Kažemo da <u>grupa Γ deluje na A_o topološki slobodno</u> ako za $e \neq \gamma \in \Gamma$ skup α_γ nema unutrašnjih tačaka.

U svakoj klasi γ odaberimo predstavnik $\tau(\gamma)$, i za jedinicu $e \in \Gamma$ stavljamo $\tau(e) = e \in G$.

Elemenat $b = \sum a_g T_g \in B^o$ napišemo u obliku

$$b = \sum_{\gamma \in \Gamma} \Big(\sum_{g \in G_o} a_g^\gamma T_g \Big) T_{\tau(\gamma)} = \sum_{\gamma \in \Gamma} a^\gamma T_\gamma \ , \quad a^\gamma \in A_o \ .$$

Za elemenat $b \in B^o$ odredimo neprekidnu matričnu funkciju $\tilde{b}$ dimenzije k (k je red grupe Γ) na prostoru M_{A_o} na sledeći način. Matrične elemente matrice $\tilde{b}$ numerirati ćemo ih pomoću elemenata grupe Γ. Stavimo

$$\tilde{b}_{(\delta,\gamma)} = \Big(T_\delta \Big(\sum_{g \in G_o} a^{\delta^{-1}\gamma} T_g \Big) T_\delta^{-1} c(\delta, \delta^{-1}\gamma) \Big)^\wedge = \Big(T_\delta \, a^{\delta^{-1}\gamma} \, T_\delta \ \hat{c}(\delta, \delta^{-1}\gamma) \Big) \quad (I.3.1)$$

gde su $C(\delta,\gamma)=T_\delta T_\gamma T_{\delta\gamma}^{-1}$ zadati elementi grupe $\mathcal{U}A_0$ unitarnih elemenata C^*-algebre A_0. Znak $\wedge$ označava Gelfandovu preslikavanje algebre A_0.

Označimo sa $\widetilde{\mathcal{B}}$ C^*-algebru neprekidnih matričnih funkcija na M_{A_0}, generiranoj pompću matrica oblika $\widetilde{b}$.

Teorema I.3.3. [8] Neka je $\mathcal{B}$ C^*-algebra tipa $C^*(A,G,T_g)$, za koju važe gornje predpostavke i grupa Γ deluje na A_0 topološki slobodno. Tada pridruživanje $b\to\widetilde{b}$ proširuje se sa $\mathcal{B}^0$ do izomorfizma C^*-algebre $\mathcal{B}$ i $\widetilde{\mathcal{B}}$.

Element $b\in\mathcal{B}$ je invertibilan, tada i samo tada, ako je $\det\widetilde{b}(m)\neq 0$ za sve $m\in M_{A_0}$.

II G L A V A

JEDNAČINE SA OSCILIRUJUĆIM KOEFICIJENTIMA NA PRAVOJ

§ II.1. Diferencne jednačine sa oscilirujućim koeficijentima na pravoj

Jedno od osnovnih pitanja prilikom ispitivanja konkretnih klasa jednačina jeste objašnjenje činjenice, da li je jednačina jednoznačno razrešiva za proizvoljnu desnu stranu zadato iz prostora funkcija; zatim da li je operator definisan na levoj strani jednačine invertibilan. U ovom paragrafu to pitanje razmotričemo za diferencne jednačine u prostoru $L_2(\mathbb{R})$ oblika

$$\mathcal{L}u \equiv \sum_k a_k(x)\, u(x+\omega_k) = f \qquad (\text{II}.1.1)$$

gde su $a_k(x)$ zadate funkcije, ω_k dati brojevi.

Pitanje razrešivosti jednačine (II.1.1) jeste u suštini pitanje invertibilnosti operatora $\mathcal{L}$, definisanog na levoj strani jednačine (II.1.1).

Ako su koeficijenti a_k konstantni, tada ispitivanje invertibilnosti operatora $\mathcal{L}$ u prostoru $L_2(\mathbb{R})$ nije složen problem. Uslovi invertibilnosti tog operatora su sledećeg oblika:

$$\inf_{\xi\in\mathbb{R}} |S(\xi)| > 0 \text{ , gde je } S(\xi) = \sum a_k e^{i\omega_k \xi} \qquad (\text{II}.1.2)$$

U slučaju kada su koeficijenti promenljive, o opštim operatorima oblika (II.1.1) zna se vrlo malo. Prilikom ispitivanja invertibilnosti operatora oblika (II.1.1) koji sadrže dva sabirka [6,7] primećeno je da operatori oblika (II.1.1) koji sadrže tri i više sabiraka u opštem slučaju su nepogodni za efikasno ispitivanje.

Ovde se posmatra jedna klasa operatora oblika (II.1.1) sa promenljivim koeficijentima i više sabiraka kod kojih se mogu dobiti potrebni i dovoljni uslovi invertibilnosti. Osnovna predpostavka sastoji se u tome da koeficijenti imaju oblik

$$a_k(x) = a_{k0} + a_{k1}\, e^{i2\pi\omega x}$$

gde su a_{k0} i a_{k1} konstante, ω dati broj, dakle svi koeficijenti osciliraju sa datom periodom ω .

Da bi formulisali osnovni rezultat uvedimo nekoliko pomćnih pojmova. Uslov invertibilnosti operatora $\mathcal{L}$ zavisi od relacija izmedu brojeva ω_k i ω .

Kažemo da su brojevi $h_1, \dots, h_p$ <u>racijonalno nezavisni</u>, ako važi jednakost

$$\sum_{k=1}^{p} c_k h_k = 0\,,\ c_k \in \mathbb{Z} \quad \text{samo za} \quad c_k = 0\,.$$

Medu brojevima ω_k odaberimo maksimalni izbor racionalno nezavisnih brojeva $h_1, \dots, h_p$. Tada su brojevi $\tau_k = \omega h_k$ $k = 1, 2, \dots, p$ takode racijonalno nezavisni. Nadalje ispitajmo da li izmedu tih brojeva postoji relacija oblika

$$\sum_{k=1}^{p} c_k \tau_k = c_0\ ,\ c_k \in \mathbb{Z}\,.$$

Tvrdimo da postoji samo jedna takva relacija, jer postojanje dve različite relacije dovodi nas do racijonalnih relacija izmedu brojeva h_k . Najpogodniji slučaj za daljnja ispitivanja jeste kada se pomenuta relacija svodi k tome da jedan od brojeva h_k bude racijonalan. Od tog slučaja možemo preći u opšti slučaj, ako odaberimo specijalni oblik racijonalno nezavisnih brojeva $h_1, h_2, \dots, h_p$.

Zaista, neka je $\sum C_k h_k = C_0$, gde je $C_{K_0} \neq 0$, $C_0 \neq 0$. Kao nove generatore uzmemo brojeve

$$\frac{h_1}{C_{K_0}}, \dots, \frac{h_{K_0-1}}{C_{K_0}}, \frac{h_{K_0+1}}{C_{K_0}}, \dots, \frac{h_p}{C_{K_0}}, \frac{C_0}{C_{K_0}}$$

Tada broj h_{K_0} izražava se preko tih brojeva u oliku kombinacije sa celim koeficijentima

$$h_{K_0} = -\sum_{k \neq 0} \frac{C_K}{C_{K_0}} h_K + \frac{C_0}{C_{K_0}}$$

U novom izboru generatora, prvi (p-1) brojevi su racijonalno nezavisni, a poslednji broj je racijonalan. Prema tome, bez narušenja opštosti možemo uzeti da su izabrani nezavisni brojevi $h_1, h_2, \dots, h_p$ takvih da svaki od broja ω_K predstavi u obliku linearne kombinacije

$$\omega_K = \sum_{j=1}^{p} C_{Kj} h_j, \quad k = 1, 2, \dots, m; \; C_{kj} \in \mathbb{Z},$$

i da su brojevi $\tau_K = h_K \omega$ racijonalno nezavisni ili da jedan od njih recimo τ_p bude racijonalan.

Neka je $\mathbb{T}^p = \{(z_1, z_2, \dots, z_p) : |z_j| = 1\}$ p-dimenzionalni torus. Elemenat torusa $z = (z_1, z_2, \dots, z_p)$ možemo takode zadati pomoću reprezentacije

$$z_j = e^{i 2\pi \varphi_j}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \; : \; z = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p) \in \mathbb{R}^p.$$

U reprezentaciji preko z_j grupna operacija u torus jeste množenje po koordinatama. U reprezentaciji preko φ_j grupna operacija u torusu jeste sabiranje po koordinatama po mod.1.

Prema operatoru $\mathcal{b}$ konstruišemo funkcije na torus

$$a_0(z) = \sum_{k=1}^{m} a_{k0} z_1^{c_{k1}} z_2^{c_{k2}} \dots z_p^{c_{kp}}$$

$$a_1(z) = \sum_{k=1}^{m} a_{k1} z_1^{c_{k1}} z_2^{c_{k2}} \dots z_p^{c_{kp}}$$

Neka je $S_p(a)$ geometrijska sredina funkcije a na torus

$$S_p(a) = \exp \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{\mathbb{T}^p} \ln|a(z)|\, d|z_1|\, d|z_2| \dots d|z_p| =$$

$$= \exp \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 \ln|a(z)|\, d\varphi_1 \dots d\varphi_p$$

<u>Teorema II.1.1.</u> Neka su brojevi $1, \tau_1, \dots, \tau_p$ racijonalno nezavisni. Operator $\mathcal{b}$ oblika (II.1.1) s koeficijentima

$$a_k = a_{k0} + e^{i2\pi\omega x} a_{k1}$$

je invertibilan u prostoru $L_2(\mathbb{R})$ tada i samo tada, kada je ispunjen jedan od uslova a) ili b):

a) $a_0(z) \neq 0$, $S_p(a_0) > S_p(a_1)$

b) $a_1(z) \neq 0$, $S_p(a_0) < S_p(a_1)$.

<u>Teorema II.1.2.</u> Neka je broj $\tau_p = \frac{l}{N}$ racijonalan, a brojevi $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{p-1}$ iracijonalni i racijonalno nezavisni. Operator $\mathcal{b}$ oblika (II.1.1) sa koeficijentima

$$a_k = a_{k0} + e^{i2\pi\omega x} a_{k1}$$

je invertibilan u prostoru $L_2(\mathbb{R})$, tada i samo tada, ako važi jedan od uslova a) ili b)

a) $a_0(z) \neq 0$, $\prod_{k=0}^{N-1} \tilde{a}_0(\varepsilon^j z_p) > \prod_{k=0}^{N-1} \tilde{a}_1(\varepsilon^j z_p)$, $|z_p| = 1$

b) $a_1(z)\neq 0,\ \prod_{k=0}^{N-1}\tilde{a}_0(\varepsilon^j z_p)<\prod_{k=0}^{N-1}\tilde{a}_1(\varepsilon^j z_p)\ ,\ |z_p|=1$

gde je $\varepsilon^j=\exp\left(i\frac{2\pi}{N}\right)$, a funkcija $\tilde{a}(z_p)$ za $p\geq 2$ definisana je formulom

$$\tilde{a}(z_p)=\exp\frac{1}{(2\pi)^{p-1}}\int_{\mathbb{T}^{p-1}} \ln|a(z)|d|z_1|\cdots d|z_{p-1}| \ .$$

Za $p=1$ dobijamo $\tilde{a}(z_1)=|a(z_1)|$.

Dokaz oba tvrdenja je osnovan na svodenja problema na razmatranje operatora oblika

$$\mathcal{B}_1 v(z)\equiv a_0(z)v(z)+a_1(z)v(Wz) \qquad (II.1.4)$$

na torus $\mathbb{T}^p$, i prilikom ispitivanja primenimo rezultate iz [§ I.3] , pomoću algebarskih procenjivanja , jer operatori $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}_1$ koji deluju u suštini u različitim prostorima nisu pogodni. Naša ispitivanja zasnivaju se na Teoremu I.1.1 (Teorema o izomorfizmu).

Označujemo sa $\mathcal{D}$ algebru operatora u $L_2(\mathbb{R})$ generiranu operatorima oblika

$$T_k u(x)=u(x+k_1h_1+k_2h_2+\cdots+k_ph_p)$$

gde je $k=(k_1,\ldots,k_p)\in\mathbb{Z}^p$. Sa $\mathcal{D}_1$ označujemo algebru $C(\mathbb{T}^p)$ neprekidnih funkcija na torus $\mathbb{T}^p$.

<u>Lema II.1.1.</u> Preslikavanje

$$\psi:\ \sum a_k T_k \longrightarrow \sum a_k z_1^{k_1} z_2^{k_2}\cdots z_p^{k_p}$$

zadaje izomorfizam algebre $\mathcal{D}$ i algebre $\mathcal{D}_1=C(\mathbb{T}^p)$.

<u>Dokaz</u>. Pošto su konačne sume oblika $\sum a_k T_k$, $a_k\in\mathbb{C}$ guste u $\mathcal{D}$ i operatori T_k zadaju reprezentaciju grupe $\mathbb{Z}^p$, algebra $\mathcal{D}$ ima opisanu strukturu, tj. $\mathcal{D}=C^*(\mathbb{C},\mathbb{Z}^p,T_k)$.

Osim toga, kako sledi iz TeoremeI.1.3 pošto grupa $\mathbb{Z}^p$ deluje na $\mathbb{C}$ automorfizmima topološki slobodno, tada važi nejednakost

$$\left\| \sum a_k T_k \right\| \geqslant |a_0|$$

U algebri $\mathcal{D}_1$ izdvojimo funkciju $u_k = z_1^{k_1} z_2^{k_2} \cdots z_p^{k_p}$, $k \in \mathbb{Z}^p$. Te funkcije daju reprezentaciju grupe $\mathbb{Z}^p$. Osim toga skup polinoma tj. skup linearnih kombinacija funkcija u_k sa komleksnim koeficijentima je svuda gust u $\mathcal{D}_1$. Odakle algebra $\mathcal{D}_1$ ima strukturu algebre generirane dinamičkim sistemima sa grupom $\mathbb{Z}^p$, tj. $\mathcal{D}_1 = C^*(\mathbb{C}, \mathbb{Z}^p, U_k)$. U algebri $\mathcal{D}_1$ važi nejednakost (I.1.11), tj. nejednakost

$$\max_{\mathbb{T}^p} \left| \sum_k a_k z_1^{k_1} z_2^{k_2} \cdots z_p^{k_p} \right| \geqslant |a_0| \qquad (II.1.5)$$

Zaista, broj a_0 je srednja vrednost polinoma i nejednakost (II.1.5) označava da srednja vrednost ne prelazi maksimum modula.

Primenimo sada k algebrama $\mathcal{D}$ i $\mathcal{D}_1$ TeoremuI.1.2 (Teorema o izomorfizmu). Uslov (I.1.8) važi jer je

$$T_k a T_k^{-1} = a \quad i \quad U_k a U_k^{-1} = a$$

i prema teoremi o izomorfizmu, preslikavanje

$$\psi : \sum a_k T_k \longrightarrow \sum a_k U_k$$

proširuje se do izomorfizma C^*-algebre $\mathcal{D}$ i $\mathcal{D}_1$. Lema je dokazana.

<u>Posledica II.1.1</u>. Diferencni operator sa konstantnim koeficijentima $\mathcal{b} = \sum a_k T_k$ je invertibilan tada i samo kada je

$$\sum a_k z_1^{k_1} z_2^{k_2} \cdots z_p^{k_p} \neq 0 \ , \ z \in \mathbb{Z}^p .$$

Primetimo da je taj uslov ekvivalentan uslovu (II.1.2) koji je zgodan za proveru.

Predemo sada na razmatranje diferencnih jednačina sa oscilirajućim koeficijentima. Neka je B C^*-algebra generirana operatorima oblika (II.1.1) sa koeficijentima oblika (II.1.3). Označujemo sa V operator množenje funkcija $e^{i2\pi\omega x}$. Operatori V^n zadaju unitarnu reprezentacije grupe $\mathbb{Z}$.

Za operator V i operator $d=\sum a_k T_k$ važi

$$VdV^* = \sum a_k \exp[i2\pi\omega(k_1h_1+\dots+k_p h_p)]\, T_k \in \mathcal{D} \quad (II.1.6)$$

tj. važi aksiomal, DefinicijeI.1.1. Prema konstruisanoj algebri B skup konačnih suma $\sum d_k V^k$, $d_k \in \mathcal{D}$ je gust u B. Premaa tome $B = C^*(\mathcal{D}, \mathbb{Z}, V^n)$.

Sa B_1 označujemo C^*-algebru operatora u $L_2(\mathbb{T}^p)$, generiranu operatorima oblika $\sum a_n(z) U^n$, gde je U operator šifta, koji deluje po formuli

$$U v(z) = v(z\cdot W) \ , \quad a_n \in C(\mathbb{T}^p) \qquad \text{gde je}$$

$$W = \left(e^{i2\pi\omega k_1 h_1}, e^{i2\pi\omega k_2 h_2}, \dots, e^{i2\pi\omega k_p h_p}\right).$$

Pošto je

$$U a(z) U^{-1} = a(z\cdot W) \in C(\mathbb{T}^p) \qquad (II.1.7)$$

imamo

$$B_1 = C^*(C(\mathbb{T}^p), \mathbb{Z}, U^n).$$

K algebrama B i B_1 primenimo TeoremuI.1.1(Teorema o izomorfizmu). Zaista iz (II.1.6) i (II.1.7) očigledno je da prilikom izomorfizma $\varphi: \mathcal{D} \to \mathcal{D}_1$ važi

$$\varphi(VdV^{-1}) = U\varphi(d)U^{-1}, \ d \in \mathcal{D} \qquad (II.1.8)$$

:o medu brojevima τ_k ima iracijonalnih, tada preslikavan- $\alpha_\tau(z)=Wz$ nema periodičnih tačaka i važi uslov topolo- i slobodno dejstva grupe $\mathbb{Z}$. Primenivši Teoremu o izomor- zmu(TeoremaI.1.1) dobijamo sledeću tvrdnju:

Lema II.1.2. Ako medu brojevima τ_k ima iracijo- lnih, tada preslikavanje

$$\psi: \sum d_k V^k \longrightarrow \sum \varphi(d_k) U^k$$

je izomorfizam C^*-algebrih B i B_1.

Posledica II.1.2. Operator $\mathcal{B}$ oblika (II.1.1) je vertibilan tada i samo tada, ako je invertibilan operator oblika (II.1.4).

Dokaz. Neposredna provera pokazuje da je $\psi(\mathcal{B})=\mathcal{B}_1$ tvrdnja je očigledna, budući da prilikom izomorfizma in- rtibilni elemenat prelazi u invertibilni element.

Prema tome, u slučaju kada medu brojevima ima ira- jonalnih, diferencna jednaěina operatora u $L_2(\mathbb{R})$ se svodi ispitivanje funkcijonalnog operatora $\mathcal{B}_1$ u prostoru $L_2(T^p)$. kvi operatori razmotreni su u [§ I.3]. Tvrdenje TeoremeII.1.1 TeoremeII.2.2 dobijamo sada iz rezultata paragrafa[§ I.3]. lovi invertibilnosti operatora $\mathcal{B}_1$ zavise od racijonalnih lacija izmedu koeficijenata vektora $(1,\tau_1,\dots,\tau_p)$. Zbog ecifičnog oblika τ u razmotrenoj situaciji moguća su no tri slučaja:

1. Brojevi $\tau_1,\dots,\tau_p$ su iracijonalni i racijona-) nezavisni. Rezultat za ovaj slučaj formuliran je u Teore- [I.2.1.

2. $p\geq 2$, broj τ_p je racijonalan, dok brojevi

$\tau_1, \dots, \tau_{p-1}$ iracijonalni i racijonalno nezavisni. Rezultat za ovaj slučaj formuliran je u TeoremiII.2.2 .

3. $p=1$ i broj τ_1 je racijonalan.

Ovaj slučaj je prostiji. Tvrdenje u tom slučaju se dobija niže, prema toku dokaza TeoremeII.2.1 . U tom slučaju možemo ispitivati i operatore sa složenijim koeficijentima. Detalnije ovaj slučaj je razmotren u [§ III.3].

§ II.2. O JEDNOJ KLASI INTEGRO-DIFERENCNIH JEDNAČINA TIPA KONVOLUCIJE SA OSCILIRUJUĆIM KOEFICIJENTIMA NA PRAVOJ

U prostoru $L_2(\mathbb{R})$ posmatrajmo integro-diferencnu jednačinu oblika

$$\mathcal{b}u \equiv \sum_{k=1}^{m} a_k(x)u(x+\omega_k)+\sum_{k=1}^{m} a_{kj}(x)\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_{kj}(x-y)u(y+\omega_k)dy=w \qquad (II.2.1)$$

gde su $\Phi_{kj}\in L_1(\mathbb{R})$, a_k, a_{kj} date neprekidne funkcije. Jednačine (II.2.1) su opšteg oblika i njihovo ispitivanje rešivosti ili njoterovosti u opštem slučaju za proizvoljne koeficijente je veoma složen problem. Složenost ovog problema u velikoj meri zavisi od ponašanja koeficijenata a_k i a_{kj}. U ovom paragrafu dobijeni su uslovi njoterovosti operatora uz predpostavku kada koeficijenti imaju sledeći specijalni oblik

$$a_k(x)=a_k^0+a_k^1 e^{i2\pi\omega x} \quad \text{gde su } a_k^0, a_k^1\in\mathbb{C},\ h\neq 0 \qquad (II.2.2)$$

$$a_{kj}(x)=a_{kj}^0(x)+a_{kj}^1(x)e^{i2\pi\omega x} \qquad (II.2.3)$$

gde su funkcije $a_{kj}^0(x)$ i $a_{kj}^1(x)$ merljive, ograničene funkcije za koje postoji limes u beskonačnosti: $a_{kj}^0(\infty)$ i $a_{kj}^1(\infty)$. Ako u jednačini oblika (II.2.1) ne figurišu periode ω_k, uslovi njoterovosti dobijeni su u [2]. U razmotrenoj situaciji ispitivanje je u suštini složenije nego u [2]. Specijalno uslov njoterovosti operatora $\mathcal{b}$ zavisi od racijonalnih relacija među brojevima ω_k i ω.

Da bi formulisali osnovni rezultat uvedimo niz pomoćnih pojmova.

Definicija II.2.1. Brojevi $h_1, \dots, h_p$ zovu se racijonalno nezavisni ako jednakost

$$\sum c_j h_j = 0 \quad , \; c_j \in \mathbb{Z}$$

samo u slučaju kada je $c_j = 0$.

Neka je p maksimalni broj racijonalno nezavisnih medu brojevima ω_k. Tada postoje racijonalno nezavisni brojevi $h_1, h_2, \dots, h_p$ takvih da je

$$\omega_k = \sum_{j=1}^{p} c_{kj} h_j \quad , \; c_{kj} \in \mathbb{Z}$$

Brojevi $\omega h_1, \dots, \omega h_p$ takode su racijonalno nezavisni. Svojstvo operatora b zavisi od toga da li medu brojevima $\omega h_1, \dots, \omega h_p$ postoji relacija oblika

$$\sum c_j \omega h_j = c_0 \quad , \; c_j \in \mathbb{Z}$$

tj. da li su racijonalno nezavisni brojevi $1, \omega h_1, \dots, \omega h_p$. Ako takva relacija postoji, tada možemo odabrati drugi izbor racijonalno nezavisni brojeva $\tilde{h}_j$, takvih da ta relacija ima oblik $c_p \tilde{h}_p = c_0$, tj. da broj h_p bude racijonalan.

Prema tome su moguće samo dva slučaja:

I. Brojevi $1, \omega h_1, \dots, \omega h_p$ su racijonalno nezavisni.

II. brojevi $1, \omega h_1, \dots, \omega h_{p-1}$ su racijonalno nezavisni, a broj $\omega h_p = \frac{l}{N}$ je racijonalan.

Slučaj $p=1$ u ovom paragrafu za razliku od paragrafa [§ II.1] nije specijalan.

Neka je

$$\mathbb{T}^p = \{ z = (z_1, \dots, z_p) : z_j \in \mathbb{C} \; , \; |z_j| = 1 \}$$

p-dimenzionalni torus. Po elementu b konstruišemo dve funkcije na torusu $\mathbb{T}^p$ i dve funkcije na $\mathbb{R}$:

$$a_0(z)=\sum a_k^0 z_1^{c_{k1}} z_2^{c_{k2}} \dots z_p^{c_{kp}}, \; z\in \mathbb{T}^p, \qquad (II.2.4)$$

$$a_1(z)=\sum a_k^1 z_1^{c_{k1}} z_2^{c_{k2}} \dots z_p^{c_{kp}}, \; z\in \mathbb{T}^p. \qquad (II.2.5)$$

$$b_0(\xi)=\sum_k a_k^0 e^{i\omega_k \xi}+\sum_k \sum_j a_{kj}^0(\infty) e^{i\omega_k \xi} \psi_{kj}(\xi), \; \xi\in R \qquad (II.2.6)$$

$$b_1(\xi)=\sum_k a_k^1 e^{i\omega_k(\xi-2\pi\omega)}+\sum_k \sum_j a_{kj}^1(\infty) e^{i\omega_k(\xi-2\pi\omega)} \psi_{kj}(\xi-2\pi\omega), \qquad (II.2.7)$$

$\xi\in \mathbb{R}$,

gde je $\psi_{kj}(\xi)$ Fourijerova transformacija funkcije $\bar{\varphi}_{kj}$.

Geometrijska sredina funkcije a na torusu $\mathbb{T}^p$ zove se broj

$$S_p(a)=\frac{1}{(2\pi)^p} \exp \int\int_{\mathbb{T}^p}\cdots\int \ln|a(z)|\, d|z_1|\cdots d|z_p|.$$

Za funkciju $a\in C(\mathbb{T}^p)$ uvedimo takode njenu geometrijsku sredinu po prvoj koordinati

$$S_{p-1}(a)=\frac{1}{(2\pi)^{p-1}} \exp \int\int_{\mathbb{T}^{p-1}}\cdots\int \ln|a(z)|\, d|z_1|\cdots d|z_{p-1}'|$$

$$\tilde{a}(z_p)=\prod_{j=0}^{N-1} S_{p-1}(a)\left(\varepsilon^j z_p\right), \quad \varepsilon=\exp\frac{i2\pi}{N}$$

<u>Teorema II.2.1</u>. Neka je b integro-diferencnih operator oblika (II.2.1) sa koeficijentima oblika (II.2.2) i (II.2.3).

Operator b je njoterov u prostoru $L_2(\mathbb{R})$ tada i samo tada, ako važi jedan od uslova a) ili b):

a) $a_0(z)\neq 0$, $z\in\mathbb{T}^p$, $b_0(\xi)\neq 0$, $\xi\in\mathbb{R}$;

i u slućaju I važi važi nejednakost

$$S_p(a_0) > S_p(a_1)$$

a u slućaju II nejednakost

$$\tilde{a}_0(z_p) > \tilde{a}_1(z_p)\ ,\ |z_p| = 1$$

b) $a_1(z) \neq 0,\ z \in \mathbb{T}^p;\ b_1(\xi) \neq 0,\ \xi \in \mathbb{R}$

i u slućaju I važi nejednakost

$$S_p(a_0) < S_p(a_1)$$

a u slućaju II nejednakost

$$\tilde{a}_0(z_p) < \tilde{a}_1(z_p)\ ,\ |z_p| = 1$$

Ako su koeficijenti a^0_{kj} i a^1_{kj} u (II.2.3) konstantni, tada su gornji uslovi takode potrebni i dovoljni za invertibilnost operatora $\mathcal{B}$.

Tvrdenje teoreme dobijamo pomoću rezultata opštete teorije funkcijonalnih jednačina izloženoj u prvoj glavi.

Razmatrenje njoterevosti operatora $\mathcal{B}$ se svodi na ispitivanje invertibilnosti funkcijonalnog operatora

$$\tilde{\mathcal{B}} v(\xi) = b_0(\xi) v(\xi) + b_1(\xi) v(\xi - 2\pi\omega)$$

u prostoru $L_2(\mathbb{R})$. Oblik uslova invertibilnosti operatora $\tilde{\mathcal{B}}$ zavisi od prostora maksimalnih ideala C^*-algebre A ,generiranu koeficijentima b_0 i b_1 , koji zavise od ponašanja koeficijenata. Za koeficijente b_0 i b_1 oblika (II.2.6) i (II.2.7) pokazuje se da prostor M_A maksimalnih ideala se sastoji iz p-dimenzionalnog torusa $\mathbb{T}^p$ i prave $\mathbb{R}$, pri čemu topologiji na uniji $\mathbb{T} \cup \mathbb{R}$ odgovara situacija kada se prava namotava na torusu koji je približan iracijonalnom omotaču torusa. Sami uslovi invertibilnosti izražavaju se kroz geometrijske sredine koeficijenata po normiranim merama na M_A invarijantne i ergodične u odnosu na homeomorfizam $\alpha : M_A \to M_A$ generiran pomoću operatora šifta

$$T:\ b(\xi) \longrightarrow b(\xi - 2\pi\omega)$$

Naime, oblik invarijantnih ergodičnih mera zavisi od postojeće relacije izmedu h_k i ω i razlikuju se u slučaju I i II.

Dokaz Teoreme II.2.1. Zamenimo u jednačinu (II.2.1) poznati oblik koeficijenata:

$$\sum_{k=1}^{m} a_k(x)\, u(x+\omega_k) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{l} a_{kj}(x)\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_{kj}(x-y)\,u(y+\omega_k)\,dy = W$$

$$\sum_{k=1}^{m}\left(a_k^0 + a_k^1 e^{i2\pi h x}\right) u(x+\omega_k) +$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{l}\left[a_{kj}^0(x) - a_{kj}^1(x)\, e^{i2\pi h x}\right]\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_{kj}(x-y)\,u(y+\omega_k)\,dy = W$$

$$\sum_{k=1}^{m} a_k^0\, u(x+\omega_k) + \sum_{k=1}^{m} a_k^1\, e^{i2\pi h x} u(x+\omega_k) \ +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{l} a_{kj}^0(x)\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_{kj}(x-y)\,u(y+\omega_k)\,dy \ +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{l} a_{kj}^1(x)\, e^{i2\pi h x}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(x-y)\,u(y+\omega_k)\,dy = \omega\ .$$

Transformišimo ovu jednačinu. Budući da je

$$a_{kj}^0(x)\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_{kj}(x-y)\,u(y+\omega_k)\,dy = a_{kj}^0(\infty)\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_{kj}(x-y)\,u(y+\omega_k)\,dy \ +$$

$$+\left[a_{kj}^0(x) - a_{kj}^0(\infty)\right]\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_{kj}(x-y)\,u(y+\omega_k)\,dy\ ,\ \text{itd.}$$

imamo

$$\sum_{k=1}^{m} a_k^0\, u(x+\omega_k) + \sum_{k=1}^{m} a_k^1\, e^{i2\pi h x} u(x+\omega_k) \ +\ ,\ \text{itd.}$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{l}\left\{a_{kj}^0(\infty)\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_{kj}(x-y)\,u(y+\omega_k)\,dy\ +\right.$$

$$+\left[a^{0}_{kj}(x)-a^{0}_{kj}(\infty)\right]\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_{kj}(x-y)\,u(y+\omega_k)\,dy\Big\}+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{l}\Big\{a^{1}_{kj}(\infty)\,e^{i2\pi hx}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_{kj}(x-y)\,u(y+\omega_k)\,dy\;+$$

$$+\left[a^{1}_{kj}(x)-a^{1}_{kj}(\infty)\right]e^{i2\pi hx}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_{kj}(x-y)\,u(y+\omega_k)\,dy\Big\}=W.$$

S obzirom da je

$$\lim_{x\to\infty}\left[a^{0}_{kj}(x)-a^{0}_{kj}(\infty)\right]=0\,,\quad \lim_{x\to\infty}\left[a^{1}_{kj}(x)-a^{1}_{kj}(\infty)\right]=0$$

i $\Phi_{kj}\in L_1(\mathbb{R})$, tada su integralni operatori

$$A_1u(x)=\left[a^{0}_{kj}(x)-a^{0}_{kj}(\infty)\right]\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_{kj}(x-y)\,u(y+\omega_k)\,dy$$

$$A_2\,u(x)=\left[a^{1}_{kj}(x)-a^{1}_{kj}(\infty)\right]\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_{kj}(x-y)\,u(y+\omega_k)\,dy$$

kompaktni u $L_2(\mathbb{R})$ [34,35].

Operator b je njoterov tada i samo tada, kada je operator $b+K$ njoterov, gde je K kompaktni operator. Odakle operator b je njoterov istovremeno sa operatorom

$$\tilde{b}u\equiv\sum_{k=1}^{m}a^{0}_{k}u(x+\omega_k)+\sum_{k=1}^{m}a^{1}_{k}\,e^{i2\pi\omega x}u(x+\omega_k)\;+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{l}\Big\{a^{0}_{kj}(\infty)\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_{kj}(x-y)\,u(y+\omega_k)\,dy\;+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{l}\Big\{a^{1}_{kj}(\infty)\,e^{i2\pi\omega x}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_{kj}(x-y)\,u(y+\omega_k)\,dy=W. \qquad (II.2.8)$$

Posle primene Fourijerive transformacije na jednačinu (II.2.8) u $L_2(\mathbb{R})$, imamo:

$$\sum_{k=1}^{m}a^{0}_{k}\,e^{i\omega_k\xi}\,\hat{u}(\xi)+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{l}a^{0}_{kj}(\infty)\,\psi_{kj}(\xi)\,\hat{u}(\xi)\;+$$

$$+\sum_{k=1}^{m} a_k^1 e^{i\omega_k(\xi-2\pi\omega)}\hat{u}(\xi-2\pi\omega)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{l} a_{kj}^1(\infty)e^{i\omega_k(\xi-2\pi\omega)}\psi_{kj}(\xi-2\pi h)\hat{u}(\xi-2\pi\omega)=\hat{W}(\xi).$$

Dobijene jednačine su oblika

$$\hat{b}\hat{u}\equiv b_0(\xi)\hat{u}(\xi)+b_1(\xi)\hat{u}(\xi-2\pi\omega)=\hat{W}(\xi) \qquad (\mathrm{II}.2.9)$$

gde je $b_0(\xi)=\sum_k a_k^0 e^{i\omega_k\xi}+\sum_k\sum a_{kj}^0(\infty)e^{i\omega_k\xi}\psi_{kj}(\xi)$

$$b_1(\xi)=\sum_k a_k^1 e^{i\omega_k(\xi-2\pi\omega)}+\sum_k\sum_j a_{kj}^1(\infty)e^{i\omega_k(\xi-2\pi\omega)}\psi_{kj}(\xi-2\pi\omega),\ \xi\in\mathbb{R}$$

Da bi ispitali jednačinu (II.2.9), primenimo teoriju izloženu u prvoj glavi. Da bi primenili TeoremuI.3.1 potrebno je opisati prostor maksimalnih ideala C^*-algebre, generirane koeficijentima jednačine (II.2.9), zatim naći izomorfizam α generiran operatorima

$$T_h u(\xi)=u(\xi-2\pi\omega),$$

i opisati invarijantne ergodične mere na prostoru maksimalnih ideala.

Označujemo sa A C^*-algebru generiranu funkcijama oblika (II.2.5),(II.2.6). Tada je algebra A izomorfna sa algebrom $C(M)$ neprekidnih funkcija na prostoru maksimalnih ideala. Pokažemo da se kao skup, prostor M predstavlja u obliku unije $\mathbb{T}^p\cup\mathbb{R}$; topologija na tom prostoru bit će niže opisana.

U početku posmatrajmo dve podalgebre algebre A. Neka je A_1 C^*-algebra generirana pomoću funkcija oblika

$$\sum_k a_k e^{i\omega_k\xi}$$

Pokažemo da je algebra A_1 izomorfna sa algebrom $C(\mathbb{T}^p)$ neprekidnih funkcija na p-dimenzionalnom ptorusu Za dokaz primenimo Teoremu o izomorfizmu. Po DefinicijiII.2.1 postoje celi brojevi c_{kj} takvih da je $\omega_k = \sum_{j=1}^{p} c_{kj} h_j$

Označujem sa $W_j(\xi) = e^{ih_j\xi}$, $j = 1, 2, \dots, p$. Tada se funkcije $e^{i\omega_k\xi}$ izražavaju kroz W_j po formuli

$$e^{iw_k\xi} = e^{i\sum_{j=1}^{p} c_{kj} h_j \xi} = \left(e^{ih_1\xi}\right)^{c_{k1}} \cdot \left(e^{ih_2\xi}\right)^{c_{k2}} \cdots \left(e^{ih_p\xi}\right)^{c_{kp}} =$$

$$= W_1^{c_{k1}} \cdot W_2^{c_{k2}} \cdots W_p^{c_{kp}} .$$

Odakle možemo uzeti da je algebra A_1 generirana pomoću pomoću polinoma od funkcije W_j tj. pomoću funkcije oblika

$$\sum a_n W^n(\xi) \, , \quad a_n \in \mathbb{C} \, , \quad n = (n_1, n_2, \dots, n_p) \in \mathbb{Z}^p ,$$

$$W^{(n)}(\xi) = [W_1(\xi)]^{n_1} [W_2(\xi)]^{n_2} \cdots [W_p(\xi)]^{n_p} .$$

Funkcije $W^n(\xi)$ zadaju reprezentaciju grupe $\mathbb{Z}^p$ u A_1, jer je $W^{(n+m)}(\xi) = W^n(\xi) W^m(\xi)$. Na taj način, vidimo da je algebra A_1 C^*-algebra tipa $C^*(\mathbb{C}, \mathbb{Z}^p, W^n(\xi))$. Primetimo da aksioma 1 DefinicijeI.2.1 važi jer je uvek za $a \in \mathbb{C}$, $W^n a W^{-n} = a \in \mathbb{C}$. Torus $\mathbb{T}^p$ realizujemo u obliku proizvoda p-kružnica:

$$\mathbb{T}^p = \{ z = (z_1, z_2, \dots, z_p) : z_j \in \mathbb{C} \, , |z_j| = 1 \}$$

Na torusu $\mathbb{T}^p$ posmatrajmo funkciju

$$z^n = z_1^{n_1} \cdot z_2^{n_2} \cdots z_p^{n_p} \, , \quad n \in \mathbb{Z}^p$$

Polinomi oblika

$$\sum a_n z^n$$

su gusti u algebri $C(\mathbb{T}^p)$. Funkcije z^n zadaju reprezentaciju grupe $\mathbb{Z}^p$ i važi

$$Z^n a Z^{-n} = a \in \mathbb{C}$$

Prema tome algebra $C(\mathbb{T}^p)$ je C^*-algebra tipa $C^*(\mathbb{C}, \mathbb{Z}^p, Z^p)$. Za algebru A i $C(\mathbb{T}^p)$ važi uslov (I.1.4). Ako se za φ uzima identično preslikavanje, tada je

$$\varphi(W^n a W^n) = \varphi(a) = a = Z^n a Z^{-n}.$$

Primetimo da Teoreme I.1.1 i I.1.3 ne mogu da se primene, jer dejstvo grupe $\mathbb{Z}^p$ na algebri $\mathbb{C}$ nije topološki slobodno(Prostor maksimalnih ideala algebre $\mathbb{C}$ sastoji se samo iz jedne tačke i za bilo koju grupu $G \neq \{e\}$ uslov dejstva topološki slobodno ne važi.

Pokažimo da za konačne sume u algebrama A_1 i $C(\mathbb{T}^p)$ važi nejednakost

$$\sup_{\xi} \left| \sum a_n W^n(\xi) \right| \geq |a_0| , \quad \xi \in \mathbb{R} \qquad \text{(II.2.10)}$$

$$\max_{z \in \mathbb{T}^p} \left| \sum a_n Z^n \right| \geq |a_0| , \qquad \text{(II.2.11)}$$

posle čega primenimo TeoremuI.1.2.

Funkciju $f(z) = \sum\limits_n a_n Z^n$ integriramo po torusu $\mathbb{T}^p$.
U tom cilju uvedimo promenljive $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$; $\varphi_j \in [0, 2\pi]$ $j = 1, 2, \dots, p$, $z_j = e^{i\varphi_j}$. Tada je

$$\int_{\mathbb{T}^p} f(z) d\mu_z = \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} f(z(\varphi)) d\varphi_1 d\varphi_2 \cdots d\varphi_p .$$

Ako je bar jedna koordinata celobrojnog vektora $n = (n_1, \dots, n_p)$ različita od nulee, tada je

$$\int z^n d\mu_z = \int_0^{2\pi} e^{i n_1 \varphi_1} d\varphi_1 \cdot \int_0^{2\pi} e^{i n_2 \varphi_2} d\varphi_2 \cdots \int_0^{2\pi} e^{i n_p \varphi_p} d\varphi_p = 0.$$

Odakle je

$$\int_{\mathbb{T}^p} f(z)\,d\mu_z = (2\pi)^p a_0$$

Primenimo za procenu a_0 poznatu procenu integrala: $\left|(2\pi)^p a_0\right| = \left|\int_{\mathbb{T}^p} f(z)\,d\mu_z\right| \leq \max\left|\int_{\mathbb{T}^p} 1\cdot d\mu_z = \max|f(z)|(2\pi)^p\right.$,

odakle dobijamo nejednakost (II.2.11):

$$|a_0| \leq \max|f(z)| = \max\left|\sum a_n Z^n\right|$$

Za funkciju iz algebre A_1 posmatramo limes

$$M(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} f(\xi)\,d\xi$$

Ako je $f(\xi) = W^n(\xi)$ i $n \neq 0$, tada je

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} W^n(\xi) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} e^{i(n_1 h_1 + \cdots + n_p h_p)\xi}\,d\xi \,.$$

Označimo sa C_n broj $n_1 h_1 + \cdots + n_p h_p$. Zbog uslova racijonalne nezavisnosti brojeva $h_1, h_2, \ldots, h_p$ za bilo koji $n \neq 0$ je $C_n \neq 0$. Prema tome je

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{iC_n\xi}\,d\xi = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\,\frac{e^{iC_nT} - e^{-iC_nT}}{iC_n} \,.$$

Odakle

$$|M(W^n)| \leq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\cdot\frac{1+1}{|C_n|} = 0 \text{ za } n \neq 0.$$

Za funkciju $W \equiv 1$ imamo

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} 1\cdot d\xi = 1 \,.$$

Prema tome za funkciju $f(\xi) = \sum a_n W^n(\xi)$, imajući u vidu konačne sume, dobijamo

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(\xi)\,d\xi = a_0 \tag{II.2.12}$$

Procenu za a_0 dobijamo iz procene integrala

$$\left| \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(\xi)\,d\xi \right| \leq \max_{-T\leq\xi\leq T} |f(\xi)| \quad ,$$

$$\left| \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(\xi)\,d\xi \right| \leq \sup_{-\infty<\xi<+\infty} |f(\xi)| \tag{II.2.13}$$

Iz (II.2.12) i (II.2.13) dobijamo

$$|a_0| \leq \sup_{-\infty<\xi<\infty} |f(\xi)| = \sup_{-\infty<\xi<+\infty} \left| \sum_n a_n W^n(\xi) \right| ,$$

Time je nejednakost (II.2.10) dokazana.

Nadalje proverimo sve uslove TeoremeI.1.2. Zbog te teoreme, preslikavanje

$$\sum a_n W^n(\xi) \xrightarrow{\Psi} \sum a_n Z^n$$

se proširuje do izomorfizma C^*-algebre A_1 i $C(\mathbb{T}^p)$.

Neka je A_2 algebra koja se sastoji iz neprekidnih funkcija na $\mathbb{R}$, za koje postoji limes u beskonačnosti

$$\lim_{\xi\to\infty} a(\xi) \stackrel{def}{=} a(\infty) \ .$$

Neka je $\bar{\mathbb{R}}$ proširena brojna prava $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup (\infty)$. Baza okoline tačke ∞ u $\bar{\mathbb{R}}$ sastoji od skupova

$$\infty \cup]-\infty, -a[\ \cup \ ]a, +\infty[\quad , \ a > 0 \ .$$

Prostor $\bar{\mathbb{R}}$ je homeomorfan sa kružnicom $\mathbb{T}_1$, homeomorfizam $f\colon \mathbb{T}^1 \to \bar{\mathbb{R}}$ može se dati na primer pomoću formule

$$f(z) = \begin{cases} tg\frac{\varphi}{2} \ , & -\pi \leq \varphi < \pi \\ \infty \ , & z = -1 \end{cases}$$

gde je $z = e^{i\varphi}$. Pokažemo da je algebra A_2 izomorfna sa algebrom neprekidnih funkcija na $\bar{\mathbb{R}}$. Izomorfizam se daje pomoću formule

$$a \longrightarrow \hat{a} \; ; \quad \hat{a}(\xi) = \begin{cases} a(\xi) \;, & \xi \in \mathbb{R} \\ a(\infty) \;, & \xi = \infty \end{cases}$$

Poklapanje nolmih je očigledno:

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |a(\xi)| = \max_{\xi \in \bar{\mathbb{R}}} |\hat{a}(\xi)|$$

Napišimo za $b(\xi) \in C(\bar{\mathbb{R}})$ uslov neprekidnosti u tački ∞ : $\forall \varepsilon > 0$ postoji okolina W_∞ , tačke ∞ takva da je

$$|b(\xi) - b(\infty)| < \varepsilon \quad \text{za} \quad \xi \in W_\infty \, .$$

Ovaj uslov se poklapa sa uslovom da postoji limes $\lim\limits_{\xi \to \infty} b(\xi)$.

Kažemo da je C^*-algebra A generirana podalgebrama A_1 i A_2 , ako je $A_1 \subset A$, $A_2 \subset A$ i skup konačnih suma oblika

$$\sum a_j b_j \;, \quad a_j \in A_1 \;, \; b_j \in A_2$$

je gust po normi u A . Drugim rečima A je najmanja C^*-algebra funkcija koja sadrži algebre A_1 i A_2 .

Razmatrena algebra A generirana je podalgebrama A_1 i A_2 jer funkcije oblika (II.2.5) i (II.2.6) mogu se predstaviti u obliku sume funkcija

$$\sum a_k^o e^{i\omega_k \xi} \in A_1$$

$$\sum a_{k_j}^o(\infty) e^{i\omega_k(\xi - 2\pi\omega)} \psi_{k_j}(\xi - 2\pi\omega) \in A_2$$

Ako je f multiplikativni funkcijonal na algebri A, tada njegove restrikcije

$$f_1 = f/A_1 \quad , \quad f_2 = f/A_2$$

su multiplikativni funkcijonali na A_1 i A_2 respektivno. Samim time, multiplikativnom funkcijonalu f tj. elementu prostora M_A maksimalnih ideala pridružimo par funkcijonala

$$M_A \ni f \longrightarrow (f_1, f_2) \in M_{A_1} \times M_{A_2} \quad .$$

Ovo preslikavanje je injektivno: ako je $M_A \ni g \to (g_1, g_2)$ i $f_1 = g_1$, $f_2 = g_2$ tada za bilo koju konačnu sumu oblika $\sum a_j b_j$, $a_j \in A_1$, $b_j \in A_2$ imamo $f(\sum a_j b_j) = \sum f_1(a_j) f_2(b_j) =$

$$= \sum g_1(a_j) g_2(b_j) = g(\sum a_j b_j)$$

odakle sledi da je $f \equiv g$.

Na taj načinn pokazujemo da prostor maksimalnih ideala M_A leži u prostoru $M_{A_1} \times M_{A_2}$. Neprekidnost preslikavanja $\delta: f \to (f_1, f_2)$ je očigledna.

Zbog kompaktnosti od M_A, prostor M_A je homeomorfan sa svojom slikom pri preslikavanju δ.

Preslikavanje δ nije surjektivno, jer ako je daat neki multiplikativni funkcijonal f_1 na A_1 i multiplikativni funkcijonal f_2 na A_2, tada u opštem slućaju ne postoji funkcijonal f na A_1 za koji je on restrikcija. To sledi iz činjenice da izmedu funkcijonala f_1 i f_2 koji su restrikcija funkcijonala f na A postoje relacije. Te relacije opisuju sliku M_A pri preslikavanju δ. Da bi dobili te relacije u jasnom obliku posmatrajmo podprostor M iz $M_{A_1} \times M_{A_2}$ koji se sastoji iz tačaka oblika (z, ∞), $z \in \mathbb{T}$ i tačaka oblika $(\gamma(\xi), \xi)$ gde je

$$\gamma(\xi) = (e^{ih_1 \xi}, e^{ih_2 \xi}, \dots, e^{ih_p \xi}) \in \mathbb{Z}^p, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

Pokažemo da $\delta(M_A) = M$. Prvo dokažimo inkluziju $M \subset \delta(M_A)$. Fiksirajmo tačku $(z^0, \xi^0) \in M \subset M_{A_1} \times M_{A_2}$. Označimo sa f_1 multiplikativni funkcijonal na A_1 koji odgovara tački

$z_0 \in \mathbb{Z}^p \doteq M_{A_1}$, sa f_2 označimo multiplikativni funkcijonal, koji odgovara tački $\xi^0 \in \bar{\mathbb{R}} = M_{A_2}$. Funkcijonal f_1 daje se formulom

$$f_1(a) = \sum a_n (z^0)^n \quad \text{gde je} \quad a = a(z) = \sum a_n z^n.$$

Ako je $\xi^0 = \infty$, tada je $f_2(a) = \lim_{\xi \to \infty} a(\xi) = a(\infty)$. Ako je $\xi \in \mathbb{R}$ tada je $f_2(a) = a(\xi)$.

Razmotrimo prvo slučaj kada je $\xi^0 = \infty$. Tada proširenje parova (f_1, f_2) na sumi oblika

$$\sum a_j b_j \;, a_j \in A_1 \,, b_j \in A_2$$

daje se pomoću formule

$$f(\sum a_j b_j) = \sum f_1(a_j)\, b_j(\infty)$$

i predstavlja multiplikativni funkcijonal na A.

Ako je $\xi^0 \in \mathbb{R}$ i $z^0 = \gamma(\xi^0)$, tada proširenje parova (f_1, f_2) na A daje se pomoću formule $f(a) = a(\xi^0)$. Zaista za funkcijonal f i $a \in A_1$ imamo

$$f(a) = a(\xi^0) = \sum_n a_n e^{i(n_1 h_1 \xi^0 + n_2 h_2 \xi^0 + \dots + n_p h_p \xi^0)} = f_1(a).$$

Za funkciju a iz A_2 jednakost $f(a) = f_2(a)$ je očigledna. Ovim je inkluzija $M \subset \delta(M_A)$ dokazana.

Pokažemo sada obratnu inkluziju $\delta(M_A) \subset M$, tj. pokažimo da ako su funkcijonali f_1 i f_2 restrikcija nekog funkcijonala f, tada izmedu odgovarajućih tačaka (z, ξ) postoji relacija $z = \gamma(\xi)$.

Uzmemo neprekidnu funkciju $a \in A_1$ i funkciju $b \in A_2$ pri čemu je $b(\infty) = 0$, $b(\xi) \neq 0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$. Napišimo jednakost

$$a(\xi) = a(\xi)(1 + b(\xi)) - a(\xi) b(\xi) \qquad (II.2.14).$$

Neka funkcijonal $f_2 = f / A_2$ ima oblik

$$f_2(a(\xi)) = a(\xi^0)\ , \ \xi^0 \in \mathbb{R}$$

Primetimo da je $\lim\limits_{\xi\to\infty} a(\xi)b(\xi) = 0$, što znači da proizvod $a(\xi)b(\xi)$ pripada A_2. Primenimo na relaciji (II.2.14) funkcijonal f :

$$f(a) = f_1(a) = f_1(a)(1+b(\xi^0)) - a(\xi^0)b(\xi^0)\ ,$$ odakle je

$$[f_1(a) - a(\xi^0)]b(\xi^0) = 0$$

Kako je $b(\xi_0) \neq 0$, to je $f_1(a) = a(\xi^0)$. Funkcijonal $a(\xi^0) = \hat{a}(\gamma(\xi^0))$, tj. funkcijonal f_1 odgovara tački $\gamma(\xi^0)$ a paru tačaka (f_1, f_2) odgovara par tačaka $(\gamma(\xi^0), \xi^0)$ iz $M_{A_1} \times M_{A_2}$.

Prema tome prostor M_A se se identificira sa podskupom $M \subset M_{A_1} \times M_{A_2}$. Skup M je unija dvaju disjunktnih skupova.

Skup tačaka oblika (z, ∞), $z \in \mathbb{T}^p$, je homeomorfan sa torusom $\mathbb{T}^p$, i skup tačaka $\tilde{R}$ oblika $(\gamma(\xi), \xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$ je homeomorfan sa $\mathbb{R}$. Topologija unije $\mathbb{T}^p \cup \mathbb{R}$ je inducirana sa topologijom prostora $M_{A_1} \times M_{A_2}$. Torus $\mathbb{T}^p$ i $\tilde{R}$ su podskupovi iz $\mathbb{T}^{p+1}$ tako da se kriva $\tilde{R}$ namotava na torus
(smešteni su)
$\mathbb{T}^p$ kada $\xi \to \pm\infty$ i približava se prema iracijonalnom omotaču torusa. Torus $\mathbb{T}^{p+1} = \mathbb{T}^2$ predstavimo kao prsten u kome se identifikuju spoljašni i unutrašnji granični krug. Tada prostor M ima oblik kao na slici

Pokažimo sada da je na prostoru $M_A = \mathbb{T}^p \cup \mathbb{R}$ homeomorfizam α_h generiran pomoću operatora šifta $T_h u(\xi) = u(\xi - h)$, gde je $h = 2\pi\omega$ zadat formulom

$$\alpha_h(z) = \left(e^{i2\pi h_1 \omega} z_1, e^{i2\pi h_2 \omega} z_2, \dots, e^{i2\pi h_p \omega} z_p\right),$$

$$z \in \mathbb{T}^p,\ \alpha(\xi) = \xi - 2\pi\omega,\ \alpha_h(\xi) = \xi - h,\ \xi \in \mathbb{R}.$$

Prvo pokazujemo da za $a \in A$ važi

$$(\widehat{T_h a}) = \hat{a}\,\alpha_h$$

Zaista, automorfizam T_h na funkciji $a \in A_i$ deluje po formuli

$$\hat{T}_h a(\xi) = T_h a T_h^{-1} = a(\xi - h) \qquad (II.2.15)$$

Na algebri A_2 taj automorfizam neposredno je zadat formulom (II,2.15). Posmatrajući algebru A_1 vidimo da je

$$T_h W_j(\xi) = e^{ih_j(\xi + h)} = e^{ih_j h} W(\xi)$$

Posle primene Gelfandovog preslikavanja imamo

$$G\left(T_h\left(\sum a_n W^n\right)\right) = G\left(\sum_n a_n \left(e^{ih_1 h} W_1\right)^{n_1} \left(e^{ih_2 h} W_2\right)^{n_2} \cdots \left(e^{ih_p h} W_p\right)^{n_p}\right) =$$

$$= \sum a_n \left(e^{ih_1 h} z_1\right)^{n_1} \left(e^{ih_2 h} z_2\right)^{n_2} \cdots \left(e^{ih_p h} z_p\right)^{n_p} =$$

$$= [G(a)](\alpha_h(z)).$$

Sledeći korak, koji je neophodan za primenu Teoreme I.3.1 u jednakost (I.2.9) sastoji se u opisivanju normiranih mera na M_A, koje su invarijantne i ergodične u odnosu na preslikavanje α_h. Dokažimo da za proizvoljnu normiranu meru μ na $M_A = \mathbb{T}^n \cup \tilde{R}$ koja je invarijantna u odnosu na preslikavanje α_h važi

$$\mu(\tilde{R}) = 0 .$$

Posmatrajmo poluotvoreni interval $U_0 = [0,h] \in \tilde{R}$. Slike tog poluotvorenog intervala prilikom delovanja stepenog α_h^k preslikavanja α_h su poluotvoreni intervali

$$U_k = [kh, (k+1)h) , k \in \mathbb{Z} .$$

Te slike su dva po dva disjunktne i zbog invarijantnosti mere μ , $\mu(U_k) = \mu(U_0)$. Budući da je $\mathbb{R} = \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} U_k$

tada je $$\mu(\mathbb{R}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mu(U_k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mu(U_0)$$

Ako je $\mu(U_0) \neq 0$, tada posljedni red divergira i dobijamo $\mu(\mathbb{R}) = \infty$, što je u kontradikcijom sa uslovom $\mu(M_A) = 1$. Prema tome $\mu(U_0) = 0$ i $\mu(\mathbb{R}) = 0$. To znači da sve invarijantne ergodične normirane mere na M_A ~~kom~~centrirane na torusu $\mathbb{T}^n$ su invarijantne i ergodične u odnosu na preslikavanje α_h . Takve mere na torusu su opisane u opštem slućaju u PrimeruI.2.4.

U razmotrenoj situaciji imamo nekoliko specifičnosti i ne mogu se realizirati sve moguće varijante u opštem slućaju. Ovo je vezano sa specijalnim oblikom vektora

$$\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) , \tau_j = h_j h ,$$

datog preslikavanja α_h . To je već primećeno u dokazu TeoremeI.1.1, i moguće su dva slućaja

Slućaj 1. Brojevi $1, \tau_1, \dots, \tau_n$ su racijonalno nezavisni. U tom slućaju na torusu $\mathbb{T}^n$ postoji samo jedna invarijantna mera, ta mera je $\frac{1}{(2\pi)^n} d\varphi_1 \dots d\varphi_n$.

U razmotrenoj situaciji imamo nekoliko specifičnosti i ne mogu se realizirati sve moguće varijante u opštem slučaju. Ovo je vezano sa specijalnim oblikom vektora

$$\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \;, \quad \tau_j = h_j \cdot h$$

datog preslikavanja α_k , što je već primećeno u dokazu TeoremeI.1.1 , i moguće su dva slučaja

<u>Slučaj 1</u>. Brojevi $1, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ su racijonalno nezavisni. U tom slučaju na torusu $\mathbb{T}^p$ postoji samo jedna invarijantna mera , ta mera je

$$\frac{1}{(2\pi)^n} d\varphi_1 \cdots d\varphi_n$$

Sve tačke iz M_A u tom slučaju su neperiodične i uslavi iz DefinicijeI.3.1 tj. uslovi topološkii slobodnog dejstva grupe $\mathbb{Z}$ važe. Prostor M_A je koneksan. Prema tome važe svi uslovi TeoremeI.3.1 i pronadeni su svi objekti, koji su neophodni za izražavanje uslova invertibilnosti iz te teoreme u jasnoj formi.

Kao rezultat dobijamo uslove TeoremeII.2.1 formulisane za taj slučaj.

<u>Slučaj 2</u>. Medu brojevima $1, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ postoji tačno jedna relacija oblika

$$\sum C_k \tau_k = C_0 \qquad \text{gde je } C_0, C_k \in \mathbb{Z} \,.$$

Invarijantne ergodične mere na $\mathbb{T}^p$ u tom slučaju su opisane kod dokaza TeoremeII.1.1. Nosać svake takve mere je unija torusa dimenzije $p-1$. Kao i u TeoremiII.1.1 pokazujemo da zamena promenljivih može nas dovesti do slučaja kada je kod vektora τ poslednja koordinata racionalna a koordinate $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ racijonalno nezavisne.

Uočimo razlike izmedu posmatranog slučaja i analognog slučaja u TeoremiII.1.1. Za $p>1$ kao i u TeoremiII.1.1, sve tačke iz M_A nisu periodične i uslov invertibilnosti operatora (II.2.9) se dobija iz TeoremeI.3.1.

Ako je $p=1$, tada su na $\mathbb{T}^1=S^1$ sve tačke periodične. U TeoremiII.1.1 ta situacija otežava primenu TeoremeI.3.1 , budući da ne važi uslov (*).

U našoj Teoremi nema poteškoće kao u TeoremiII.1.1 (za $p=1$). Stvar je u tome da je skup $\tilde{R}$ svuda gust u prostoru M_A i da čitav taj skup se sastoji iz neperiodičnih tačaka zbog uslova $\omega \neq 0$. Prema tome uslov (*), tj. uslov da je skup neperiodičnih tačaka svuda gust u M_A , takode važi za $p=1$ i primenivši TeoremuI.3.1 dobijamo pomenute uslove iz formulacije Teoreme.

Teorema je dokazana.

<u>Primedba II.2.2.</u> Ako su koeficijenti a^0_{kj} i a^1_{kj} konstantni, tada formulisani uslovi iz Teoreme su potrebni i dovoljni za invertibilnost operatora $\mathcal{B}$, jer on pri Fourrierovoj transsformaciji prelazi u operator oblika (II.2.9) (bez kompaktnog sabirka).

III. GLÁVA

INTEGRO-DIFERENCNE JEDNAČINE U PROSTORU $L_2(\mathbb{R}^{\nu})$

§ III.1. Integro-diferencne jednačine sa oscilirajućim koeficijentima

U prostoru $L_2(\mathbb{R}^{\nu})$ posmatrajmo integro-diferencnu jednačinu oblika

$$\mathcal{L}u \equiv \sum_{k=1}^{m} a_k(x) u(x+\omega_k) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{l} a_{kj}(x)\int_{\mathbb{R}^{\nu}} \Phi(x-y) u(y+\omega_k) = f \qquad (\mathrm{III}.1.1)$$

gde $\omega_k \in \mathbb{R}$ dati vektori; a_k, a_{kj}, Φ_j date funkcije, $\Phi_j \in L_1(\mathbb{R}^{\nu})$.

U tretiranom paragrafu odvojena je klasa jednačina oblika (III.1.1) za koju se dobijaju uslovi njoterovosti ili razrešivosti. Primetimo da opšta jednačina oblika (III.1.1) je još složenija nego razmotrena jednačina iz prve glave, i za njih verovatne ne postoje efektivni uslovi njoterovosti.

Predpostavimo da su koeficijenti sledećeg oblika

$$a_k(x) = a_k^0 + a_k^1 e^{i\langle h,x\rangle} \qquad (\mathrm{III}.1.2)$$

gde su $a_k^0, a_{k1}^1 \in \mathbb{C}$, $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$, $\langle h,x\rangle = h_1x_1 + \cdots + h_nx_n$

$$a_{kj}(x) = a_{kj}^0(x) + a_{kj}^1(x) e^{i\langle h,x\rangle} \qquad (\mathrm{III}.1.3)$$

gde su a_{kj}^0 i a_{kj}^1 merljive i ograničene funkcije za koje postoje limesi u beskonačnosti $a_{kj}^0(\infty)$, $a_{kj}^1(\infty)$.

Uvedimo pomoćne objekte, pomoću kojih formulišemo uslove njoterovosti operatora u obliku (III.1.1).

<u>Definicija III.1.1.</u> Vektori $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p \in \mathbb{R}^s$ zovu se <u>racijonalno nezavisni</u> ako iz jednakosti

$$\sum_{q=1}^{p} q_k \tau_k = 0, \quad q_k \in \mathbb{Q} \quad \text{sledi} \quad q_k = 0.$$

Neka je p maksimalni broj racijonalno nezavisnih medu vektorima $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$. Tada postoje takvi racijonalno nezavisni vektori $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p$, da je

$$\omega_k = \sum_{j=1}^{p} c_{kj} \tau_j, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \quad c_{kj} \in \mathbb{Z}.$$

Neka je

$$\mathbb{T}^p = \{ z = (z_1, z_2, \ldots, z_p) : |z_j| = 1, \ z_j \in \mathbb{C} \}$$

p -dimenzionalni torus. Prema operatoru b konsruišimo dve funkcije na torusu $\mathbb{T}^p$:

$$a_0(z) = \sum_{k=1}^{m} a_k^0 z_1^{c_{k1}} z_2^{c_{k2}} \ldots z_p^{c_{kp}},$$

$$a_1(z) = \sum_{k=1}^{m} a_k^1 z_1^{c_{k1}} z_2^{c_{k2}} \ldots z_p^{c_{kp}}$$

Pomoću vektora h dajemo preslikavanje α_h torusa u sebe:

$$\alpha_h(z) = \left(e^{i\langle h, \tau_1 \rangle} z_1, e^{i\langle h, \tau_2 \rangle}, \ldots, e^{i\langle h, \tau_p \rangle} \right)$$

Neka je

$$\beta_u = \{ \alpha_h^k(u), \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots \}$$

zatvarać trajektorije tačke u na torusu $\mathbb{T}^p$, prilikom dejstva preslikavanja α_h. Svaki od skupova β_u je torus ili konačna unija torusa. Dimenzija tih torusa zavisi od oblika racionalnih relacija izmedu koeficijenata vektora

$$\tilde{h} = \left(\frac{\langle h, \tau_1 \rangle}{2\pi}, \frac{\langle h, \tau_2 \rangle}{2\pi}, \ldots, \frac{\langle h, \tau_p \rangle}{2\pi} \right).$$

Na svakom od tih skupova postoji jedinstvena normirana mera μ_u

koja je invarijantna uodnosu na preslikavanje α_h.

Geometrijskom sredinom funkcije $a \in C(\mathbb{T}^r)$ po meri μ_u nazivamo broj

$$S_{\mu_u}(a) = \exp \int_{\beta_u} \ln |a(z)|\, d\mu_u(z)$$

Dajemo takođe dve funkcije na $\mathbb{R}^1$:

$$b_0(\xi) = \sum_{k=1}^{m} a_{k0}\, e^{i\langle \omega_k, \xi\rangle} + \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{l} a^0_{kj}(\infty)\, \hat{\Phi}_{kj}(\xi)\, e^{i\langle\omega_k,\xi\rangle}, \quad \xi \in \mathbb{R}^1;$$

$$b_1(\xi) = \sum_{k=1}^{m} a_{k1}\, e^{i\langle \omega_k, \xi - h\rangle} + \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{l} a^1_{kj}(\infty)\, \hat{\Phi}_j(\xi - h)\, e^{i\langle\omega_k,\xi-h\rangle}, \quad \xi \in \mathbb{R}^1,$$

gde je $\hat{\Phi}_j(\xi)$ Forierova transformacija funkcije Φ_j.

Teorema III.1.1. Operator b oblika (III.1.1) sa koeficijentima oblika (III.1.2) i (III.1.3) je njoterov operator u prostoru $L_2(\mathbb{R}^1)$ tada i samo tada ako važi jedan od uslova a) ili b):

a) $a_0(z) \neq 0$, $b_0(\xi) \neq 0$, $S_{\mu_z}(a_0) > S_z(a_1)$

b) $a_1(z) \neq 0$, $b_1(\xi) \neq 0$, $S_z(a_0) < S_z(a_1)$

Dokaz. Posmatrajmo operator b uprostoru $L_2(\mathbb{R}^1)$:

$$bu = \sum_{k=1}^{m} (a^0_k + a^1_k e^{i\langle h,x\rangle})\, u(x+\omega_k) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{l} \left[a^0_{kj}(x) + a^1_{kj}(x)\, e^{i\langle h,x\rangle}\right] \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_{kj}(x-y)\, u(y+\omega_k)\, dy =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} a^0_k\, u(x+\omega_k) + \sum_{k=1}^{m} a^1_k\, e^{i\langle h,x\rangle} u(x+\omega_k) + \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{l} a^0_{kj}(x) \int_{\mathbb{R}^1} \Phi(x-y)\, u(y+\omega_k)\, dy +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{l} a^1_{kj}(x)\, e^{i\langle h,x\rangle} \int_{\mathbb{R}^1} \Phi(x-y)\, u(y+\omega_k)\, dy.$$

Koristeći jednakost

$$a^{0}_{kj}(x)\int_{\mathbb{R}^{1}}\Phi(x-y)u(y+\omega_k)dy = a^{0}_{kj}(\infty)\int_{\mathbb{R}^{1}}\Phi_{kj}(x-y)u(y+\omega_k)dy +$$

$$+\left[a^{0}_{kj}(x)-a^{0}_{kj}(\infty)\right]\int_{\mathbb{R}^{1}}\Phi_{kj}(x-y)u(y+\omega_k)dy ,$$

transformišimo operator $\mathcal{B}$

$$\mathcal{B}u=\sum_{k=1}^{m}a^{0}_{k}u(x+\omega_k)+\sum_{k=1}^{m}a^{1}_{k}e^{i\langle h,x\rangle}u(x+\omega_k)+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{l}\Big\{a^{0}_{kj}(\infty)\int_{\mathbb{R}^{1}}\Phi_{kj}(x-y)u(y+\omega_k)dy +$$

$$+\left[a^{0}_{kj}(x)-a^{0}_{kj}(\infty)\right]\int\Phi_{kj}(x-y)u(y+\omega_k)dy\Big\}+\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{l}\Big\{a^{1}_{kj}(\infty)e^{i\langle h,x\rangle}\cdot$$

$$\cdot\int_{\mathbb{R}^{1}}\Phi_{kj}(x-y)u(y+\omega_k)dy+\left[a^{1}_{kj}(x)-a^{1}_{kj}(\infty)\right]\int_{\mathbb{R}^{1}}\Phi_{kj}(x-y)u(y+\omega_k)dy\Big\}=f$$

Budući da je $\lim\limits_{x\to\infty}\left[a^{0}_{kj}(x)-a^{0}_{kj}(\infty)\right]=0\,;\ \lim\limits_{x\to\infty}\left[a^{1}_{kj}(x)-a^{1}_{kj}(\infty)\right]=0,$

$\Phi_{kj}\in L_1(\mathbb{R}^1)$ tada su iintegralni operatori

$$A_1u(x)=\left[a^{0}_{kj}(x)-a^{0}_{kj}(\infty)\right]\int_{\mathbb{R}^{1}}\Phi_{kj}(x-y)u(y+\omega_k)dy$$

$$A_2u(x)=\left[a^{1}_{kj}(x)-a^{0}_{kj}(\infty)\right]\int_{\mathbb{R}^{1}}\Phi_{kj}(x-y)u(y+\omega_k)dy$$

kompaktni u prostoru $L_2(\mathbb{R}^1)$ [34].

Operator $\mathcal{B}$ je njoterov operator tada i samo tada ako je operator $\mathcal{B}+K$ njoterov, gde je K kompaktni operator. Prema tome operator $\mathcal{B}$ je njoterov istovremeno sa operatorom

$$\tilde{\mathscr{L}} u \equiv \sum_{k=1}^{m} a_k^0 u(x+\omega_k) + \sum_{k=1}^{m} a_k^1 e^{i\langle h,x\rangle} u(x+\omega_k) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{l} a_{kj}^0(\infty) \int_{\mathbb{R}^s} \phi_{kj}(x-y) u(y+\omega_k)\, dy +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{l} a_{kj}^1(\infty) e^{i\langle h,x\rangle} \int_{\mathbb{R}^s} \phi_{kj}(x-y) u(y+\omega_k)\, dy = f$$

Posle primene Fourijerove transformacije u $L_2(\mathbb{R}^s)$ u poslednjoj jednačini imamo

$$\sum_{k=1}^{m} a_k^0 e^{i\langle\omega_k,\xi\rangle} \hat{u}(\xi) + \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{l} a_{kj}^0(\infty) e^{i\langle\omega_k,\xi\rangle} \psi_{kj}(\xi)\, \hat{u}(\xi) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} a_k^1 \hat{u}(\xi-h) + \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{l} a_{kj}^1(\infty) e^{i\langle\omega_k,\xi-h\rangle} \psi_{kj}(\xi)\, \hat{u}(\xi-h) = \hat{f}(\xi)$$

odnosno

$$\hat{\mathscr{L}} \hat{u}(\xi) \equiv \mathscr{L}_0(\xi)\hat{u}(\xi) + \mathscr{L}_1(\xi)\hat{u}(\xi-h) = \hat{f}(\xi) \qquad \text{(III.1.4)}$$

gde je

$$\mathscr{L}_0(\xi) = \sum_{k=1}^{m} a_k^0 e^{i\langle\omega_k,\xi\rangle} + \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{l} a_{kj}^0(\infty) e^{i\langle\omega_k,\xi\rangle} \psi_{kj}(\xi)$$

$$\mathscr{L}_1(\xi) = \sum_{k=1}^{m} a_k^1 e^{i\langle\omega_k,\xi-h\rangle} + \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{l} a_{kj}^1(\infty) e^{i\langle\omega_k,\xi-h\rangle} \psi_{kj}(\xi-h)$$

Za ispitivanje operatora (III.2.1) primenimo izloženu teoriju iz prve glave. Da bi primenili TeoremuI.3.1 , potrebno je opisati prostor maksimalnih ideala C^*-algebre , generiranoj pomoću koeficijenata jednačine (III.1.2) , naći homeomorfizam α , generiran operatorom

$$T_h u(\xi) = u(\xi-h)$$

i opisati invarijantne ergodične mere na prostoru maksimalnih ideala.

Označimo sa $\mathcal{A}$ C^*-algebru generiranu pomoću funkcija oblika (III.1.2) i (III.1.3) . Tada je algebra $\mathcal{A}$ izomorfna sa algebrom $C(\mathcal{M})$ neprekidnih funkcija na prostoru maksimalnih ideala te algebre.

Pokažimo da se prostor $\mathcal{M}$ prdstavlja kao skup oblika $\mathbb{T} \cup \mathbb{R}^{\vartheta}$. Topologiju tog prostora opisat čemo niže.

Razmotrimo prvo dve podalgebre algebre $\mathcal{A}$: neka je $\mathcal{A}_1$ C^*-algebra generirana pomoću funkcija oblika

$$\sum_k a_k e^{i\langle \omega_k, \xi \rangle} .$$

Pokažimo da je algebra $\mathcal{A}_1$ izomorfna sa algebrom $C(\mathbb{T}^p)$ neprekidnih funkcija na p-dimenzionalnom torusu. Za dokaz primenimo Teoremu o izomorfizmu (Teorema I.1.1).

Po DefinicijiIII.1.1 postoje racijonalno nezavisni vektori $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p$ i celi brojevi c_{kj} takvih da je

$$\omega_k = \sum_{j=1}^{p} c_{kj} \tau_j$$

Označujemo sa $W_j(\xi) = e^{i\langle \tau_j, \xi \rangle}$, $j = 1, 2, \dots, p$.

Funkcije $e^{i\langle \omega_k, \xi \rangle}$ izražavaju se kroz W_j po formuli

$$e^{i\langle \omega_k, \xi \rangle} = e^{i\langle \sum_{j=1}^{p} c_{kj} \tau_j , \xi \rangle} = \left(e^{i\langle \tau_1, \xi \rangle}\right)^{c_{k1}} \cdot \left(e^{i\langle \tau_2, \xi \rangle}\right)^{c_{k2}} \dots$$

$$\dots \left(e^{i\langle \tau_p, \xi \rangle}\right)^{c_{kp}} = W_1^{c_{k1}} \cdot W^{c_{k2}} \dots W_p^{c_{kp}} .$$

Prema tome možemo uzeti da je algebra $\mathcal{A}_1$ generirana pomoću polinoma od funkciji W_j tj. pomoću funkcija oblika

$$\sum a_n W^n(\xi)\ ,\ a_n\in\mathbb{C}\ ;\ n=(n_1,n_2,\dots,n_p)\in\mathbb{Z}^p\ ,$$

$$W^n(\xi)=[W_1(\xi)]^{n_1}[W_2(\xi)]^{n_2}\dots[W_p(\xi)]^{n_p}\ .$$

Funkcije $W^n(\xi)$ zadaju reprezentaciju $\mathbb{Z}^p$ u A_1 , jer je

$$W^{n+m}(\xi)=W^n(\xi)\,W^m(\xi)\ .$$

Na taj način mi vidimo da je algebra A_1 C^*-algebra tipa $C^*(\mathbb{C},\mathbb{Z}^p,W^n(\xi))$. Primetimo da važi aksioma 1 DefinicijeI.1.1, pošto uvek za $a\in C$ važi $W^n a W^{-n}=a\in\mathbb{C}$.

Torus $\mathbb{T}^p$ realizujemo u obliku proizvoda p-kružnica:

$$\mathbb{T}^p=\{z=(z_1,z_2,\dots,z_p):\ z_j\in\mathbb{C}\ ,\ |z_j|=1\}$$

Na torusu $\mathbb{T}^p$ posmatrajmo funkciju

$$Z^n=Z_1^{n_1}\cdot Z_2^{n_2}\dots Z_p^{n_p}\ ,\ n\in\mathbb{Z}^p.$$

Polinomi oblika $\sum a_n Z^n$ su gusti u algebri $C(\mathbb{T}^p)$. Funkcije Z^p zadaju reprezentaciju grupe $\mathbb{Z}^p$ i važi

$$Z^n a Z^{-n}=a\in\mathbb{C}\ .$$

Prema tome $C(\mathbb{T}^p)$ je C^*-algebra tipa $C^*(\mathbb{C},\mathbb{Z}^p,Z^p)$. Za algebre A_1 i $C(\mathbb{T}^p)$ ispunjava se uslov (I.1.4), ako se kao φ uzima identično preslikavanje iz $\mathbb{C}$ u $\mathbb{C}$, tada

$$\varphi(W^n a W^{-n})=\varphi(a)=a=Z^n a Z^{-n}\ .$$

Primetimo da TeoremaII.1.3 ne može da se primeni u tim algebrama, jer dejstvo grupe $\mathbb{Z}^p$ na algebri $\mathbb{C}$ nije topološki slobodno. Prostor maksimalnih ideala algebre $\mathbb{C}$ se sastoji samo iz jedne tačke i za proizvoljnu grupu $G\neq\{e\}$ ne važi uslov dejstva topološki slobodno.

Pokažimo da za konačne sume u algebri A_1 i $C(\mathbb{T}^p)$

važe nejednakosti

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^s} \left| \sum a_n W^n(\xi) \right| \geq |a_0| \qquad \text{(III.1.5)}$$

$$\max_{z \in \mathbb{T}^p} \left| \sum a_n z^n \right| \geq |a_0| \qquad \text{(III.1.6)}$$

posle čega primenimo TeoremuI.1.1. Funkciju $f(z) = \sum_n a_n z^n$ integrišemo po torusu $\mathbb{T}^p$. U tom cilju uvedimo promenljive

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p \ ; \ \varphi_j \in [0, 2\pi] \ , \ z_j = e^{i\varphi_j}$$

Tada

$$\int_{\mathbb{T}^p} f(z)\, d|z| = \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} f(z(\varphi))\, d\varphi_1 d\varphi_2 \cdots d\varphi_p \ .$$

Ako bar jedna od koordinata celobrojnog vektora $n = (n_1, \dots, n_p)$ različita od nule, tada je

$$\int z^n d|z| = \int_0^{2\pi} e^{in_1\varphi_1} d\varphi_1 \cdot \int_0^{2\pi} e^{in_2\varphi_2} d\varphi_2 \cdots \int_0^{2\pi} e^{in_p\varphi_p} d\varphi_p = 0$$

Prema tome

$$\int_{\mathbb{T}^p} f(z)\, d|z| = (2\pi)^p a_0 \ .$$

Primenimo za ocenu a_0 poznatu ocenu integrala

$$\left| (2\pi)^p a_0 \right| = \left| \int_{\mathbb{T}^p} f(z)\, d|z| \right| \leq \max |f(z)| \int_{\mathbb{T}} 1 \cdot d|z| = \max |f(z)| (2\pi)^p.$$

odakle dobijamo (III.1.6)

$$|a_0| \leq \max |f(z)| = \max_z \left| \sum a_n z^n \right|$$

Dokažimo sada nejednakost (III.1.5). Zato posmatrajmo limes

$$M(f) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{(2T)^s} \int_{-T}^{T} \cdots \int_{-T}^{T} f(\xi)\, d\xi$$

za funkcije iz algebre A_1. Ako je $f(\xi) = W^n(\xi)$ i $n \neq 0$, tada

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{(2T)^s}\int_{-T}^{T}\cdots\int_{-T}^{T}W^n(\xi)\,d\xi=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{(2T)^s}\int_{-T}^{T}\cdots\int_{-T}^{T}e^{i\langle n_1\tau_1+\cdots+n_p\tau_p,\,\xi\rangle}\,d\xi$$

gde je $\xi=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$.

Označimo sa C^n vektor $n_1\tau_1+\cdots+n_p\tau_p$. Zbog uslova racijonalno nezavisnosti vektora $\tau_1,\ldots,\tau_p$ za bilo koji $n\neq 0$ $n\neq 0$ imamo $C^n\neq 0$. Odakle posle dobijamo

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{(2T)^s}\int_{-T}^{T}\cdots\int_{-T}^{T}e^{i\langle C^n,\xi\rangle}\,d\xi=\left(C^n=(C_1^n,C_2^n,\ldots,C_s^n)\right)=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{(2T)^s}\cdot\int_{-T}^{T}\cdots\int_{-T}^{T}e^{i(C_1^n\xi_1+C_2^n\xi_2+\cdots+C_s^n\xi_s)}\,d\xi_1\cdot d\xi_2\cdots d\xi_s=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{(2T)^s}\int_{-T}^{T}\cdots\int e^{iC_1^n\xi_1}\cdot e^{iC_2^n\xi_2}\cdots e^{iC_s^n\xi_s}\,d\xi_1\cdot d\xi_2\cdots d\xi_s=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{(2T)^s}\int_{-T}^{T}e^{iC_1^n\xi_1}\,d\xi_1\cdots\int_{-T}^{T}e^{iC_s^n}\,d\xi_s=$$

$$=\prod_{\substack{j=1\\ C_j^n\neq 0}}^{s}\frac{e^{iC_j^nT}-e^{-iC_j^nT}}{iC_j^n}.$$

Prema tome
$$|M(W^n)|\leq\lim_{T\to\infty}\frac{1}{(2T)^s}\prod_{\substack{j=1\\ C_j^n\neq 0}}\frac{1+1}{|C_1^n|}\cdots\frac{1+1}{|C_s^n|}=0 \text{ za } n\neq 0.$$

Za funkciju $W^0\equiv 1$ imamo

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{(2T)^s}\int_{-T}^{T}\cdots\int_{-T}^{T}1\cdot d\xi_1\,d\xi_2\cdots d\xi_s=1$$

Odakle za funkciju $f(\xi)=\sum a_n W^n(\xi)$, imajući u vidu oblik konačnih suma, imamo

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{(2T)^\nu} \int_{-T}^{T} \cdots \int_{-T}^{T} f(\xi)\, d\xi = a_0 \qquad (\text{III}.1.7)$$

Ocenu za a_0 dobijamo iz ocene integrala

$$\left|\frac{1}{(2\pi)^\nu} \int_{-T}^{T} \cdots \int_{-T}^{T} f(\xi)\, d\xi\right| \leq \max_{-T\leq \xi_k \leq T} |f(\xi)|$$

$$\left|\lim_{T\to\infty} \frac{1}{(2T)^\nu} \int_{-T}^{T} \cdots \int_{-T}^{T} f(\xi)\, d\xi\right| \leq \sup_{\xi\in \mathbb{R}^\nu} |f(\xi)| \qquad (\text{III}.1.8)$$

Iz(III.1.7) i (III.1.8) dobijamo

$$|a_0| \leq \sup_{\xi\in\mathbb{R}^\nu} |f(\xi)| = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^\nu} \left|\sum_n a_n W^n(\xi)\right|$$

Time je dokazano nejednakost (III.1.5).

Proverimo sve uslove TeoremeI.1.1. Zbog te teoreme preslikavanje

$$\sum a_n W^n(\xi) \xrightarrow{\Psi} \sum a_n z^n \qquad (*)$$

proširuje se do izomorfizma C^*-algebre A_1 i $C(\mathbb{T}^\nu)$. Neka je A algebra koja se sastoji od neprekidnih funkcija na $\mathbb{R}^\nu$ za koje postoji limes u beskonačnosti $\lim_{\xi\to\infty} a(\xi) \overset{def.}{=} a(\infty)$.
Neka je $\bar{\mathbb{R}}^\nu = \mathbb{R}^\nu \cup (\infty)$. Baza okoline tačke ∞ u $\mathbb{R}^\nu$ sastoji se od skupova oblika $B \cup (\infty)$, gde je $B \subset \mathbb{R}^\nu$ otvoren skup oblika $\{x : \|x\| > c\}$.

Prostor $\bar{\mathbb{R}}^\nu$ je homeomorfan sa sferom S^ν iz $\mathbb{R}^{\nu+1}$. Homeomorfizam može se dati pomoću stereografske projekcije

$$\theta(\xi) = \eta, \text{ gde je } \eta_k = \frac{2\xi_k}{\|\xi\|^2+1}, \ \eta_{k+1} = \frac{\|x\|^2+1}{\|\xi\|^2+1}, \ k=1,2,\dots,\nu;\ \xi\in\mathbb{R}^\nu,$$

$$\dot{\theta}(\xi)=\begin{cases}\eta\,, & \text{ako je } \xi\in\mathbb{R}^{s}\\ (0,0,\dots,0,1)\,, & \text{ako je } \xi=\infty\,.\end{cases}$$

Pokažimo da je algebra A_2 izomorfna sa algebrom neprekidnih funkcija na $\bar{\mathbb{R}}^{s}$. Izomorfizam je dat formulom:

$$A_2\ni a\longrightarrow\hat{a}\;;\;\hat{a}(\xi)=\begin{cases}a(\xi)\,, & \xi\in\mathbb{R}^{s}\\ a(\infty)\,, & \xi=\infty\end{cases}\,.$$

Očigledno je da se norme poklapaju tj.

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^{s}}|a(\xi)|=\max_{\xi\in\bar{\mathbb{R}}^{s}}|\hat{a}(\xi)|$$

Napišimo za funkciju $b(\xi)\in C(\bar{\mathbb{R}}^{s})$ uslove neprekidnosti u tački ∞ : za svako $\varepsilon>0$ postoji okolina W_∞ , takva da je $|b(\xi)-b(\infty)|<\varepsilon$ za $\xi\in W_\infty$. Taj uslov se poklapa sa uslovom ekzistencije limesa $\lim\limits_{\xi\to\infty} b(\xi)$. Razmatrena algebra A je generirana pomoću dva podalgebrih A_1 i A_2 , budući da funkcije oblika (III.1.2) i (III.1.3) predstavljaju se u obliku sume funkcija

$$\sum_{k=1}^{m}a_k^{0}e^{i\langle\omega_k,\xi\rangle}\in A_1 \quad i \quad \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{\ell}a_{kj}(\infty)e^{i\langle\omega_k,\xi-h\rangle}\psi_{kj}(\xi-h)\in A_2$$

Ako je f multiplikativni funkcijonal na algebri A tada su njegova restrikcija

$$f_1=f/A_1\quad,\quad f_2=f/A_2$$

multiplikativni funkcijonali na A_1 i A_2 respektivno. Samim time multiplikativni funkcijonal f , elementu prostora M_A maksimalnih ideala, pridružuje par funkcijonala kao u [§ II.2]. Analogno kao u paragrafu [§ II.2] pokazujemo da prostor maksimalnih ideala M_A smešten u prostoru $M_{A_1}\times M_{A_2}$.

Zbog kompaktnosti od M_A, prostor M_A je homeomorfan sa njenom slikom prilikom preslikavanja

$$\delta : f \to (f/A_1, f/A_2) \in M_{A_1} \times M_{A_2} \,.$$

Preslikavanje δ nije surjektivno, jer ako je dat neki multiplikativni funkcijonal f_1 na A_1 i multiplikativni funkcijonal f_2 na A_2, tada u opštem slućaju ne posttoji funkcijonal f na A_1 za koga su oni restrikcije. To sledi iz toga da izmedu funkcijonala f_1 i f_2 koji su restrikcija funkcijonala f na A egzistiraju relacije. Te relacije opisuju sliku M_A prilikom preslikavanja δ. Neka je M podprostor u $M_{A_1} \times M_{A_2}$, koji sadrži tačke oblika (z, ∞), $z \in \mathbb{T}^r$ i tačke oblika $(\gamma(\xi), \xi)$, gde je

$$\gamma(\xi) = \left(e^{i<\tau_1,\xi>}, e^{i<\tau_2,\xi>}, \ldots, e^{i<\tau_k,\xi>}\right) \in \mathbb{Z}^r, \ \xi \in \mathbb{R}^s$$

Pokažimo da je $\delta(M_A) = M$. Prvo dokazujemo inkluziju $M \subset \delta(M_A)$. Zato fiksirajmo tačku $(z_1^0, \xi^0) \in M \subset M_{A_1} \times M_{A_2}$. Označujemo sa f_1 multiplikativni funkcijonal na A_1, koji odgovara tački $z^0 \in \mathbb{Z}^r = M_{A_1}$, dok sa f_2 multiplikativni funkcijonal koji odgovara tački $\xi^0 \in \mathbb{R}^s = M_{A_2}$. Funkcijonal f_1 zadaje se formulom

$$f_1(a) = \sum a_n (z^0)^n, \quad gde\ je \quad a = a(z) = \sum a_n z^n.$$

Ako je $\xi^0 = \infty$, tada je $f_2(a) = \lim_{\xi \to \infty} a(\xi) = a(\infty)$. Ako je $\xi \in \mathbb{R}^s$, tada je $f_2(a) = a(\xi)$.

Razmotrimo prvo slućaj kada je $\xi^0 = \infty$. Tada proširenje parova (f_1, f_2) na sumu oblika $\sum a_j b_j$, $a_j \in A_1$, $b_j \in A_2$ zadaje se formulom $f(\sum a_j b_j) = \sum f_1(a_j) b_j(\infty)$ i jeste multiplikativni funkcijonal na A.

Ako je $\xi^{\circ} \in \mathbb{R}^{n}$ i $z^{\circ} = \gamma(\xi^{\circ})$, tada proširenje para (f_1, f_2) na A zadaje se formulom $f(a) = a(\xi^{\circ})$. Zaista za takvog funkcijonala f i $a \in A_1$ dobijamo

$$f(a) = a(\xi^{\circ}) = \sum_{n} a_n e^{i(n_1 < \tau_1, \xi_1^{\circ} > + n_2 < \tau_2, \xi^{\circ} > + \dots + n_p < \tau_p, \xi_p^{\circ} >)} =$$

$$= f_1(a) \; ; \; \text{gde je } \; \xi^{\circ} = (\xi_1^{\circ}, \xi_2^{\circ}, \dots, \xi_p^{\circ}) .$$

Za funkciju a iz A_2 jednakost $f(a) = f_2(a)$ je očigledna. Samimttime dokazano je inkluzija $M \subset \mathcal{S}(M_A)$.

Dokažimo sada obratnu inkluziju: $\mathcal{S}(M_A) \subset M$, tj. pokažimo da ako su funkcijonali f_1 i f_2 restrikcija nekog funkcijonala f , tada izmedu odgovarajućih tačaka (z, ξ) postoji relacija $z = \gamma(\xi)$.

Uzmimo proizvoljnu funkciju $a \in A_1$ i funkciju $b \in A_2$, pri čemu $b(\infty) = 0$, $b(\xi) \neq 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^{1}$. Napišemo jednakost

$$a(\xi) = a(\xi)(1 + b(\xi)) - a(\xi) b(\xi) \qquad (III.1.9)$$

Neka je funkcijonal $f_2 = f/A_2$ oblika $f_2(a(\xi)) = a(\xi^{\circ}) , \xi \in \mathbb{R}^{1}$. Primetimo da je $\lim\limits_{\xi \to \infty} a(\xi) b(\xi) = 0$, što znači da proizvod $a(\xi) b(\xi)$ pripada A_2 . Primenimo u jednakosti (III.1.9) funkcijonal f :

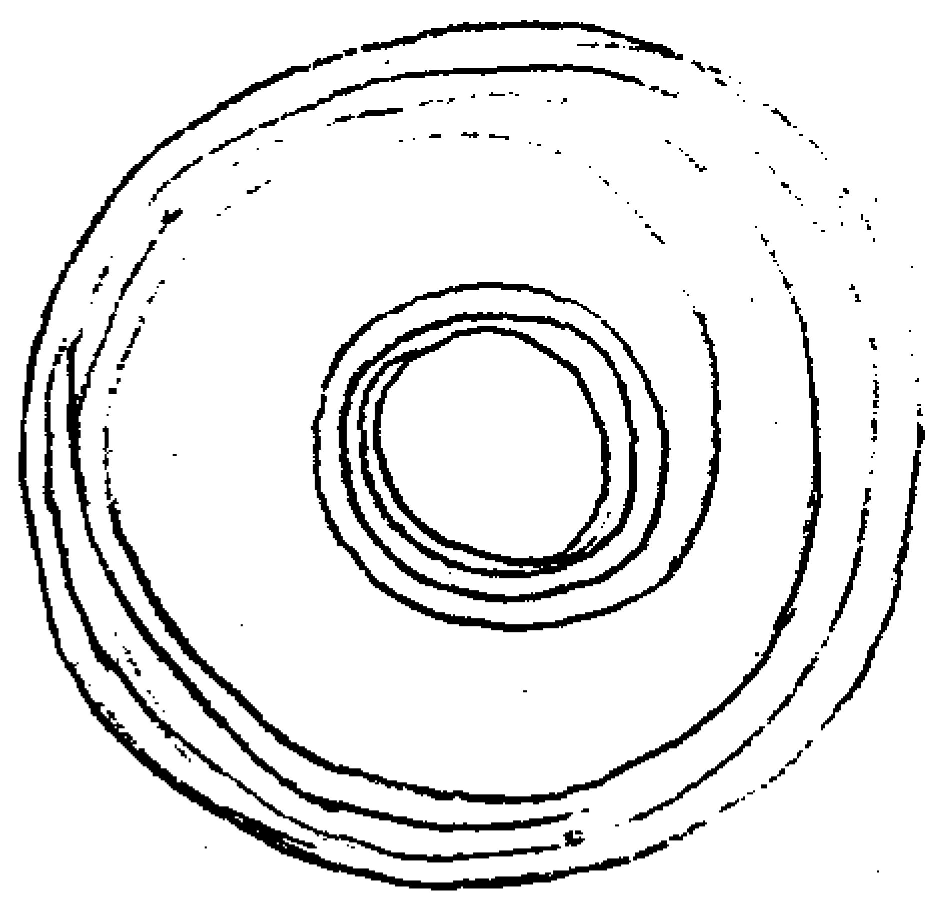
$$f(a) = f_1(a) = f_1(a)(1 + b(\xi^{\circ})) - a(\xi^{\circ}) b(\xi^{\circ})$$

odakle
$$[f_1(a) - a(\xi^{\circ})] b(\xi^{\circ}) = 0 .$$

Pošto je $b(\xi^{\circ}) \neq 0$, tada je $f_1(a) = a(\xi_0)$. Ipak funkcijonal $\hat{a}(\xi^{\circ}) = \hat{a}(\gamma(\xi^{\circ}))$, tj. funkcijonal f_1 odgovara tački $\gamma(\xi^{\circ})$ i paru (f_1, f_2) odgovara par tačaka $(\gamma(\xi^{\circ}), \xi_0)$ iz $M_{A_1} \times M_{A_2}$. Prema tome prostor M_A identificiramo ga sa podskupom $M \subset M_{A_1} \times M_{A_2}$. Skup M je unija dva disjunktnih podskupoava .

Skup tačaka oblika (z, ∞) , $z \in \mathbb{T}^p$ je homeomorfan sa torusom $\mathbb{T}^p$, a skup $\mathbb{R}^p$ tačaka oblika $(\gamma(\xi), \xi)$ $\xi \in \mathbb{R}^p$ je homeomorfan sa $\mathbb{R}^s$. Topologija od unije $\mathbb{T}^p \cup \mathbb{R}^s$ je inducirana od topologije prostora $M_{A_1} \times M_{A_2}$. Torus $\mathbb{T}^p$ i podmnogostrukost $\tilde{\mathbb{R}}^s$ leže u $M_{A_1} \times M_{A_2}$, tako da s-dimenzionalna površ $\tilde{\mathbb{R}}^s$ namotava se na torusu $\mathbb{T}^p$, kada $\xi \to \pm\infty$.

U slučaju $p=1$ i $s=1$ taj prostor može se predstaviti grafički. Torus $\mathbb{T}^{p+1} = \mathbb{T}^2$ predstavimo kao prsten u kome su identificirana spoljašna i unutrašnja granična kružnica. Tada podskup M ima oblik krive skicirane na slici



predstavljeno kao prostor maksimalnih ideala algebre, razmotrene u [§ II.2].

Pokažemo sada da na prostoru $M_A = \mathbb{T}^p \cup \mathbb{R}^s$ homeomorfizam α_h generiran pomoću operatora šifta $T_h u(\xi) = u(\xi - h)$ zadat formulom

$$\alpha_h(z) = \left(e^{i\langle \tau_1, h\rangle} z_1, e^{i\langle \tau_2, h\rangle} z_2, \dots, e^{i\langle \tau_p, h\rangle} z_p\right), z \in \mathbb{T}^p,$$

$$\alpha_h(\xi) = \xi - h \quad , \xi \in \mathbb{R}^s.$$

U tom cilju pokažimo da za $a \in A$ važi

$$\widehat{(T_h a)} = \hat{a} \circ \alpha_h$$

Zaista, na funkciji $a \in A$ auotomorfizam T_h deluje po formuli

$$\hat{T}_h a(\xi) = T_h a T_h^{-1} = a(\xi - h) \qquad (III.1.10)$$

Na podalgebri A_2 taj automorfizam neposredno je zadat formulom (III.1.10). Posmatrajući algebru A_1 primetimo da

$$\hat{T}_h W_j(\xi) = e^{i<\tau_j, \xi - h>} = e^{i<\tau_j, h>} W_j(\xi)$$

Prema tome pri preslikavanju Gelfanda imamo

$$G\Big(T_h\big(\sum a_n W^n\big)\Big) = G\Big(\sum_n a_n \big(e^{i<\tau_1, h_1>} W_1\big)^{n_1} \cdot$$

$$\cdot \big(e^{i<\tau_2, h_2>} W_2\big)^{n_2} \cdots \big(e^{i<\tau_s, h_s>} W_s\big)^{n_s} = \sum a_n \big(e^{i<\tau_1, h_1>} z_1\big) \cdot$$

$$\cdot \big(e^{i<\tau_2, h_2>} z_1\big) \cdots \big(e^{i<\tau_s, h_s>}\big)^{n_s} = [G(a)]\big(\alpha_h(z)\big) .$$

Sledeći korak koji je potreban za primenu Teoreme I.3.1 u jednačini (III.1.4) sastoji se na opisivanje normiranih mera na M_A, invarijantne i ergodične u odnosu na preslikavanje α_h. Pokažimo da za bilo koju normiranu meru μ na $M_A = \mathbb{T}^r \cup \tilde{\mathbb{R}}^s$ invarijantnoj u odnosu na preslikavanje α_h važi

$$\mu(\tilde{\mathbb{R}}^s) = 0 .$$

Posmatrajmo sloj $\{\xi \in \mathbb{R}^s :\ 0 \leq <h, \xi> < \|h\|^2\}$. Slike tog sloja pri dejstvu α_h^k preslikavanja α_h su slojevi

$$U_k = \{\xi :\ k\|h\|^2 \leq <h, \xi> < (k+1)\|h\|^2\}$$

Te slike su dva po dva disjunktne i zbog invarijantnosti mere μ, $\mu(U_k) = \mu(U_0)$. Pošto je $\mathbb{R}^s = \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} U_k$

tada je $\mu(\mathbb{R}^s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mu(U_k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mu(U_0)$

Ako je $\mu(\cdot U_0) \neq 0$, tada je posljedni red konvergira i dobijamo da je $\mu(\mathbb{R}^n)=\infty$, što je u kontradikciji sa uslovom $\mu(M_A)=1$. To znači da je $\mu(U_0)=0$ i $\mu(\mathbb{R}^s)=0$, što znači da su sve invarijantne ergodične normirane mere na M_A koncentrirane na torusu $\mathbb{T}$ i jesu invarijantne i ergodične u odnosu na preslikavanje α_h. Takve su mere na torusu opisane u opštem slučaju u PrimeruI.2.4. U slučaju više dimenzije, kada je $s \geq 2$, različit od slučaja $s=1$, razmotrenog u [§ III.2]. Kod vektora

$$\tilde{h}=\left(\frac{\langle \tau_1, h\rangle}{2\pi}, \frac{\langle \tau_2, h\rangle}{2\pi}, \dots, \frac{\langle \tau_p, h\rangle}{2\pi}\right)$$

moguće je više relacija između koordinata i invarijantne mere mogu imati bilo koji oblik opisan u PrimeruI.2.4. Primetimo takođe da u slučaju kada su kod vektora $\tilde{h}$ sve koordinate racijonalne, svaka invarijantna mera je koncentrirana u konačnom broju tačaka. Na torusu $\mathbb{T}^p$ sve su tačke periodične i dejstvo grupe $\mathbb{Z}$ na $\mathbb{T}^p$ nije topološki slobodno. Međutim čitav prostor M_A maksimalnih ideala algebre A sastoji se iz unije $\mathbb{T}^p \cup \tilde{\mathbb{R}}^s$, pri čemu su sve tačke iz $\mathbb{R}^s$ neperiodične i skup $\tilde{\mathbb{R}}^s$ je svuda gust u M_A. Prema tome važi uslov dejstva topološki slobodno grupe $\mathbb{Z}$ na M_A i primenivši TeoremuI.3.1 o invertibilnosti elemenata C^*-algebre dobijamo tvrđenje teoreme.

Teoreme je dokazana.

U specijalnom slučaju kada je jednačina (II.1.1) oblika

$$Bu \equiv a_0(x)u(x)+\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{l} a_{kj}(x)\int_{\mathbb{R}^s}\Phi_j(x-y)\,u(y+\omega_k)\,dy=f \qquad (III.1.11)$$

ona se može ispitati i za opštiji oblik koeficijenata. Neka je

$$\left.\begin{aligned} a_0(x) &= \sum_{\nu=1}^{p} a_{0\nu}\, e^{i<h_\nu, x>}, \quad a_{0\nu} \in \mathbb{C} \\ a_{kj}(x) &= \sum_{\nu=1}^{p} a_{kj\nu}(x)\, e^{i<h_\nu, x>} \end{aligned}\right\} \quad (III.1.12)$$

gde je h_ν dati vektor iz $\mathbb{R}^s$. Funkcije $a_{kj\nu}(x)$ su neprekidne i postoji njihov limes u beskonačnosti.

<u>Definicija III.2.1</u>. Sistem vektora $h_1, h_2, \dots, h_p$ iz $\mathbb{R}^s$ nazivamo <u>konveksnim</u>, ako su sve tačke h_ν temena nekog konveksnog poliedra u $\mathbb{R}^s$.

Pomoću operatora $\mathcal{b}$ sa koeficijentima oblika ((III.1.12) konstruišemo p-funkcuje na $\mathbb{R}^s$:

$$d_\nu(\xi) = a_{0\nu}(\infty) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{\ell} a_{kj\nu}(x)\, \bar{\Phi}(\xi - h_\nu)\, e^{i<\omega_{kj}\xi - h_\nu>}, \quad \xi \in \mathbb{R}^s, \quad \nu = 1, 2, \dots, p.$$

<u>Teorema III.1.2</u>. Neka su koeficijenti operatora (III.1.11) oblika (III.1.12), sistem vektora $h_1, h_2, \dots, h_p$ konveksan a sistem vektora $h_2 - h_1, h_3 - h_1, \dots, h_p - h_1$ racionalno nezavisni.

Višedimenzionalni operator tipa konvolucije $\mathcal{b}$ sa sa koeficijentima (III.1.12) je njoterov u prostoru $L_2(\mathbb{R}^s)$ tada i samo tada, kada postoji broj ν_0, $1 \le \nu_0 \le p$ takav da je

1) $|a_{0\nu_0}| > \sum_{\nu \neq \nu_0} |a_{0\nu}(\infty)|$

2) $d_{\nu_0}(\xi) \neq 0$.

<u>Dokaz</u>. Posle zamene koeficijenata u jednačini (III.1.11) imamo

$$\mathcal{b}u \equiv \sum_{\nu=1}^{p} a_{0\nu}\, e^{i<h_\nu, x>} u(x) +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{l}\sum_{\nu=1}^{p} a_{kj\nu}(x)\, e^{i\langle h_\nu, x\rangle}\int_{\mathbb{R}^s} \Phi_j(x-y)\, u(y+\omega_k)\,dy = f$$

Kao i kod dokaza TeoremeIII.1.1 , primetimo da je operator oblika

$$\left[a_{kj\nu}(x)-a_{kj\nu}(\infty)\right]\int_{\mathbb{R}^s}\Phi(x-y)\,u(y+\omega_k)\,dy$$

kompaktan operator u prostoru $L_2(\mathbb{R}^s)$. Pošto prilikom dodavanja kompaktnog operatora se ne menja njoterovost (tj. njoterov + kompaktan je njoterov), operator $\mathcal{L}$ je njoterov tada i samo tada kada je njoterov operator

$$\tilde{\mathcal{L}}u \equiv \sum_{\nu=1}^{p} a_{0\nu}\, e^{i\langle h_\nu, x\rangle} u(x) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{l}\sum_{\nu=1}^{p} a_{kj\nu}(\infty)\cdot$$

$$\cdot\, e^{i\langle h_\nu, x\rangle}\int_{\mathbb{R}^s}\Phi(x-y)\,u(y+\omega_k)\,dy \qquad (III.1.13)$$

Primenimo na operator (III.1.13) Fourierovu transformaciju u prostoru $L_2(\mathbb{R}^s)$:

$$\hat{\mathcal{L}}\,\hat{u}(\xi) \equiv \sum_{\nu=1}^{p} a_{0\nu}\,\hat{u}(\xi-h_\nu) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{l}\sum_{\nu=1}^{p} a_{kj\nu}(\infty)\cdot$$

$$\cdot\,\hat{\Phi}(\xi-h_\nu)\, e^{i\langle\omega_k, \xi-h_\nu\rangle} u(\xi-h_\nu) =$$

$$=\sum_{\nu=1}^{p}\left(a_{0\nu}+\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{l} a_{kj\nu}(\infty)\,\hat{\Phi}_j(\xi-h_\nu)\, e^{i\langle\omega_k, \xi-h_\nu\rangle}\right) u(\xi-h_\nu)$$

Prema tome posle primene Fourijerove transformacije dobijamo operator koji je razmatren u TeoremiI.3.2. Sistem vektora $h_1, h_2, \dots, h_p$ ispunjava uslove te teoreme. Koeficijenti uz $u(\xi-h_\nu)$ su funkcije oblika

$$d_\nu(\xi) = a_{0\nu} + \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{l} a_{kj\nu}(\infty)\, \bar{\phi}(\xi - h_\nu)\, e^{i\langle \omega_k, \xi - h_\nu \rangle}$$

Za te funkcije postoji $\lim_{\xi \to \infty} d_\nu(\xi) = a_{0\nu}$. Odakle se primenom TeoremeI.3.2 dokazuje tvrdenje.

§ III.2. DIFERENCNI OPERATORI SA OSCILIRAJUĆIM PERIODAMA I ŠIFTOVIMA

U dokazu TeoremeIII.1.1 primećeno je da u slučaju kada su koordinate vektora

$$\tilde{h}=\left(\frac{<\tau_1,h>}{2\pi},\frac{<\tau_2,h>}{2\pi},\dots,\frac{<\tau_p,h>}{2\pi}\right)$$

racijonalne, ima više osobina. U slučaju kada je $\nu=1$ uslov da vektor $\tilde{h}$ ima racijonalne koordinate znači da su brojevi ω_k i $\frac{h}{2\pi}$ samerljivi. Slučaj $(\nu-1)$ razmotren je u [25,28]. U slučaju viših dimenzija,ulogu uslova samerljivosti igra uslov da su kod vektora $\tilde{h}$ sve koordinate racijonalne. Pokažimo da u takvom slučaju možemo ispitivati još opštiju diferencnu jednačinu.

Posmatrajmo diferencni operator

$$\mathcal{L}u\equiv\sum_{k=1}^{m}a_k(x)\,u(x+\omega_k)\,,\quad x\in\mathbb{R}^{\nu}; \qquad (\text{III}.2.1)$$

gde su koeficijenti a_k u obliku sume

$$a_k(x)=\sum_{j=0}^{\ell}a_{kj}\,e^{ij<h,x>}$$

gde je h dati vektor, $a_{kj}\in\mathbb{C}$. U opštem slučaju za takav operator za sada ne može se ispitivati invertibilnost. Činimo sledeće predpostavke. Neka su vektori $\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_p$ izabrani kao u TeoremiIII.1.1, tj. oni su racijonalno nezavisni vektori tako da je

$$\omega_k=\sum_{i=1}^{p}c_{ki}\tau_i\,,\quad c_{ki}\in\mathbb{Z}\,.$$

Svojstvo operatora zavisi od vektora

$$\tilde{h}=\left(\frac{<\tau_1,h>}{2\pi},\frac{<\tau_2,h>}{2\pi},\dots,\frac{<\tau_p,h>}{2\pi}\right)$$

Osnovna predpostavka sastoji se u tome da su koordinate vektora $\tilde{h}$ racijonalne. Pod tom predpostavkom može se ispitivati invertibilnost operatora $\mathcal{b}$ pomoću TeoremeI.3.3. Neka je N najmanji zajednički imenilac koordimata vektora $\tilde{h}$. Za operator $\mathcal{b}$ odredimo matricu $\tilde{b}(z,t)$ na torusu $\mathbb{T}^{p+1}$ dimenzije $N\times N$. Osnovni Rezultat sastoji se u tome da je operator je invertibilan tada i samo tada ako je

$$\det \tilde{b}(z,t) \neq 0 .$$

Pre nego što formulišemo osnovni rezultat navedimo još nekoliko činjenica. Primenivši Fourijerovu transformaciju na relaciji (III.2.1), imamo

$$\tilde{b}\hat{u}(\xi)=\sum_{j=0}^{\ell} b_j(\xi)\,u(\xi-jh) \quad \text{gde je} \quad b(\xi)=\sum_{k=1}^{m} a_{kj}\, e^{i<\omega_k,\xi>} ,$$

Psmatrajmo funkciju

$$b_j(\xi-Nh)=\sum_{k=1}^{m} a_{kj}\, e^{i<\omega_k,\xi-Nh>}=\sum_{k=1}^{m} a_{kj}\, e^{-iN<\omega_k,h>}\cdot e^{i<\omega_k,\xi>} .$$

Zbog osnovne predpostavke i itbora celog broja N sledi da su brojevi $N<\omega_k,h>$ celi i $e^{-iN<\omega_k,h>}=1$. Prema tome

$$b_j(\xi-Nh)=b_j(\xi) \qquad (III.2.2)$$

tj. funkcije $b_j(\xi)$ su invarijantne u odnosu na preslikavanje $\xi\longrightarrow\xi-Nh$. Zato možemo primeniti TeoremuI.3.4.

Označimo sa A C^*-algebru generiranu pomoću funkcija $e^{i<\omega_k,\xi>}$. Kao što je pokazano kod dokaza TeoremeIII.1.1, ta algebra je izomorfna sa algebrom $C(\mathbb{T}^p)$ neprekidnih funkcija na torusu $\mathbb{T}^p$. Reprezentaciju grupe $\mathbb{Z}$ dajemo pomoću formule

$$T_j u(\xi)=u(\xi-jh)$$

Neka je B C^*-algebra generirana pomoću algebre A i operatorima T_j. Ta algebra je tipa $C^*(A,\mathbb{Z},T_j)$. Medutim dejstvo grupe $\mathbb{Z}$ na njoj nije topološki slobodno. Označujemo sa G_o podgrupu u $\mathbb{Z}$, koja sadrži elemente deljive sa N, tj. podgrupu $N\mathbb{Z}$. Jednakost (III.2.2) znači da elementi te podgrupe generiraju identični automorfizam algebre A.

Neka je A_o C^*-algebra generirana pomoću A i elemenata T_j, $j\in G_o$. Ta algebra je komutativna C^*-algebra. Pkažimo da je algebra A_o izomorfna sa algebrom $C(\mathbb{T}^{p+1})$. Torus dimenzije $p+1$ dajemo u obliku

$$\mathbb{T}^{p+1} = \{(z_1, z_2, \dots, z_p, t) : |z_j| = 1 ,\ |t| = 1\}$$

Algebra A_o ima strukturu algebre tipa $C^*(A, G_o, (T_N)^j)$. U njoj za konačne sume važi nejednakost

$$\left\| \sum a_j(z) T_{N_j} \right\| \geqslant \| a_o(z) \| = \max_{z\in\mathbb{T}^p} |a_o(z)| ,$$

a zbog TeoremeI.1.3 (na $\mathbb{R}^j$ grupa G_o deluje topološki slobodno). Algebru $C(\mathbb{T}^{p+1})$ predstavimo u obliku algebre generiranoj pomoću $C(\mathbb{T}^p)$ i t, $|t|=1$, tj. generiranoj konačnim sumama

$$\sum d_j(z) t^j ,\ z \in \mathbb{T}^p \qquad (III.2.3)$$

Za sume (III.2.3) važi nejednakost

$$\max_{\mathbb{T}^{p+1}} \left| \sum_j d_j(z) t^j \right| \geqslant \max |d_o(z)| \qquad (III.2.4)$$

Zaista za fiksirani z, imamo nejednakost

$$\max \left| \sum d_j(z) t^j \right| \geqslant |d_o(z)|$$

Izaberimo sada tačku $z^o \in \mathbb{T}^p$, u kojoj se na desnoj strani dostiže maksimum. Imamo:

$$\max \left| \sum d_j(z) t^j \right| \geqslant |d_o(z^o)| = \max_{z\in\mathbb{T}^p} |d_o(z)| .$$

Sada uzmemo maksimum od leve strane i dobijamo (III.2.4).

Prema tome u algebri A i $C(\mathbb{T}^{p+1})$ primenimo Teoremu I.1.2 i preslikavanje

$$\Psi : \sum_j a_j(z) T_{Nj} \to \sum a_j(z) t^j$$

zadaje izomorfizam algebre A_0 i $C(\mathbb{T}^{p+1})$. Primenimo sada u algebri B TeoremuI.3.3. Napišimo matricu oblika (I.3.1) za naš slučaj. Operator $\tilde{b}$ napišemo u obliku

$$\hat{b} = (b_0(\xi) + b_N(\xi) T_N + b_{2N}(\xi) T_N^2) +$$
$$+ (b_1(\xi) + b_{N+1}(\xi) T_N + b_{2N+1}(\xi) T_{N+1}^2) + \cdots +$$
$$+ (b_{N-1}(\xi) + b_{2N-1}(\xi) T_N + b_{3N-1}(\xi) T_N^2) T^{N-1}.$$

Označujemo sa

$$d_0(z,t) = \hat{b}_0(z) + \hat{b}_N(z) t + \hat{b}_{2N}(z) t^2 + \cdots$$
$$d_1(z,t) = \hat{b}_1(z) + \hat{b}_{N+1}(z) t + b_{2N+1}(z) t^2 + \cdots$$
$$\vdots$$
$$d_{N-1}(z,t) = \hat{b}_{N-1}(z) + \hat{b}_{2N-1}(z) t + \hat{b}_{3N-1}(z) t^2 + \cdots$$

gde je $\hat{b}(z)$ funkcija na torusu $\mathbb{T}^p$ koja odgovara funkciji $b(\xi)$ po formuli (✱) (str. 99, § III.1). Matrična funkcija $\tilde{b}(z,t)$ na $\mathbb{T}^{p+1}$ napisana po formuli (I.3.1) u razmatrenom slučaju je sledećeg oblika: uvedimo vektor

$$\omega = \left(e^{i\langle \tau_1, h\rangle}, e^{i\langle \tau_2, h\rangle}, \ldots, e^{i\langle \tau_p, h\rangle}\right),$$

tada je

$$\tilde{\mathscr{b}}(z,t)=\begin{bmatrix} d_0(z,t) & d_1(z,t) & \cdots & d_{N-1}(z,t) \\ d_{N-1}(\omega z,t)t & d_0(\omega z,t) & & d_{N-2}(\omega z,t) \\ d_{N-2}(\omega^2 z,t)t & d_{N-1}(\omega^2 z,t)t & \cdots & d_{N-3}(\omega^2 z,t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_2(\omega^{N-2} z,t)t & d_3(\omega^{N-2} z,t)t & \cdots & d_2(\omega^{N-2} z,t) \\ d_1(\omega^{N-1} z,t)t & d_2(\omega^{N-1} z,t)t & \cdots & d_0(\omega^{N-1} z,t) \end{bmatrix}$$

Formulišemo sada osnovni rezultat

<u>Teorema III.2.1</u>. Operator $\mathscr{b}$ oblika (III.2.1) pod gornjim predpostavkama je invertibilan tada i samo tada kada je $\det \tilde{\mathscr{b}}(z,t)\neq 0$, za vektor $(z,t)\in \mathbb{T}^{p+1}$.

<u>Dokaz</u>. Formulisana Teorema sledi neposredno iz TeoremeI.3.3 ,pod gornjim predpostavkama. Ostalo je jedino proveriti uslov da faktor grupa $\Gamma=\mathbb{Z}/G_0=\mathbb{Z}_N$ deluje na algebri A_0 topološki slobodno. Dejstvo grupe Γ na prostoru maksimalnih ideala algebre A_0 tj. na torusu $\mathbb{T}^{p+1}$ zadaje se preslikavanjem

$$(z,t)\longrightarrow(\omega^j z,t)$$

Za $j=1,2,\dots,N-1$ to preslikavanje nema fiksnih tačaka zbog izbora broja N . Zaistaḃ ako je $W^j z=z$, tada je $\omega^j=1$ odakle sledi da su svih brojevi

$$j\frac{\langle\tau_1,h\rangle}{2\pi},\ j\frac{\langle\tau_2,h\rangle}{2\pi},\ \dots,\ \frac{\langle\tau_p,h\rangle}{2\pi} \qquad \text{celi.}$$

Medutim N je najmanji od takvih brojeva j tj. jednakost $\omega^j z=z$ ne važi za $j<N$.

Teorema je dokazana.

L I T E R A T U R A

I. Антоневич А.Б. Об одном классе псевдодифференциальних операторов с отклоняющимся аргументом на торе /Дифференц. уравнения, 1975, Т.II, №9., с. 1550-1557/.

2. Антоневич А.Б. Об операторах типа свертки с осцилирующими коэффициентами /Изв. АН БССР, Сер. физ. мат. наук, 1976 , №2 , с. 42-46/.

3. Антоневич А.Б , Лебедев А.В. Расширение операторных алгебр с помощю унитарных операторов, порождающих автоморфизмы / Докл. АН БССР, 1980, Т.24, №5 , с. 404-407/.

4. Антоневич А.Б, Бреннер В.В. О символе псевдодифференциального оператора с локално независимыми сдвигами /Докл. АН БССР, 198 , Т.24, №10 , с. 884-887/.

5. Антоневич А.Б. Условия обратимости операторов с выпуклой рационально независимой системой сдвигов /Докл. АН СССР, 1981, Т.256, №1 , с. 11-14/.

6. Антоневич А.Б. , Лебедев А.В. О спектралных операторов с сдвигом /Изв. АН СССР, Сер. матем. 1983, Т.47, №5, с.915-941/.

7. Антоневич А.Б. О двух методах исследования обратимости операторов из -алгебр, порожденых динамическими системами /Матем. сб. 1984, Т.124, №1, с.3-23/.

8. Антоневич А. Б., Нгуен Туан Хунг. Операторные алгебры, порожденые квазипредставлениями групп /Докл. АН БССР, 1987, Т.31, №6, с.489-492/.

9. Антоневич А.Б. Линейные функциональные уравнения. Операторный подход /Минск, 1988/

10. Белман Р., Кук.К. Дифференциально-разностные уравнения / Москва 1967, 548сс/.

11. Браттели У., Робинсон.Д. Операторные алгебры и квантовая статистическая механика /Москва, Мир , 1982, 511 с/.

12. Фролов И.С. Обратимость некоторых разностных и дифференциял-но-разностных операторов; /Диссертация канд. физ. матем. наук /Воронеж, 1982, 126 с/.

13. Гельфанд А. О. Исчисление конечных разностний /Москва Наука, 1967, 376 с/.

14. Гринлиф Ф. Инвариантные средние на топологических групах /М. Мир 1973, 236 с/.

15. Гохберг И.Ц., Фельдман И.А. Уравнения в свертках и проекционнии методы их решения /Москва, Наука 1971, 352 с/.

16. Halmos P.R. A Hilbert Space Problem Book (Van Nostrand, New York, 1967).

17. Халмош П.Р. Десят проблем теорий гилбертовой пространстве /Пер. сбор. перевод /Математика М, Мир , 1971, Т.15, №4, с. 28-67/.

18. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений /Москва, Мир 1984, 422 с./

19. Карапетянц Н.К., Самко С.Г. О дискретных Винера-Хопфа с осцилирующими коеффициетами /Дан. СССР, 1971, 200 , №1 с. 17-20/.

20. Карапетянц Н.К. Об одном классе дискретных операторов свертких с осцилирующими коеффициентом /Дан. СССР, 1974, 216 №1, с. 28-31/.

21. Карапетянц Н.К. Об одном классе дискретных операторов свертки с осцилирующими коеффициентами /Из. Сев. Кавказ. Науч. центра выш. школы, 1974, Сер. естеств.н. №4, с. 77-81/.

22. Китовер А.К. О спектре автоморфизмов с весом и теореме Катовица-Маинберга /Функцион. анализ и его прил. 1979 , Т.13, №1, с. 70-71/.

23. Кронфельд И. Л., Синай Я.Г,Фомин С.В. Ергодическая теория /М. Наука 1980, 384 с/.

24. Колиановский В.Б., Насов В.Р. Устойчивостьи периодические режимы регулируемых систем с последствием /Москва: наука 1981, 448 с/.

25. Курбатов В.Г. О спектре оператора с соизмеримыми отклоненииями аргументи и постояными коеффициентами /Дифференц. Уравнения, 1977, Т.13, №10 , с. 1770-1775/.

26. Коробейник Ю.Ф. Операторы сдвига на числовых семействах /Ростовски Университет 1983, с. 153/.

27. Лебедев А.В. Об обратимости элементов в С-алгебрах ,порожденнх динамическим системами /УМН, 1979 , Т.34, №4 , с. 199-200/.

28. Лыскова А.С. Об операторе Шредингера в магнетном поле /Успехи матем. наук, 1981, Т.36, №2/.

29. Марчук Г.И. Математические модели иммунологии/Москва, Наука , 1980, с. 241/.

30. Миролюбов А.А., Солдатев М.А. Линейные неоднородные разностные уравнения /Москва, Наука , 1968, 128 с./.

31. Нитецки З. ВВедение в дифференциально динамику /М. Мир 1975 , с. 344/.

32. Рудин В. Функциональны анализ /Москва 1975/.

33. Слюсарчук В.Е. Оценки спектров и обратимост функциональных операторов /Математ. сборник, 1978, Т.105, №2, с. 299-285/.

34. Speck F.O. Eine erweiterung des satzes von Rakovcik und ihre anwendung in der Simonenko theorie /Math. Ann. 1977, T.228, No2, s. 93-100/.

35. Забрейко П.П., Кошелев А.Н.,Красносельски М.А. и др. Интегральные уравнения /М. Наука 1968, 448 с./.

36. Штейнберг Б.Я. Об операторах типа свертки на локально компактных группах /Функциональ. анализ и его прилож. , 1981, Т.15 , №3, с. 95-98/.

REZIME

Ova je disertacija podeljena u tri glava. U prvoj glavi disertacije izložene su osnovne činjenice opšte teorije neophodnne za daljna ispitivanja. Originalni rezultati su izloženi u drugoj i trćoj glavi.Ispitivanja u disertaciji sprovedena su po opštoj shemi. U početku problem se svodi na razmatrenje pomoćnog dvočlanog funkcionalnog operatora oblika

$$\mathcal{b}u(x) = a_0(x)u(x) + a_1(x)u(g(x)) \qquad (1)$$

zatim se konstruiše prostor maksimalnih ideala odgovarajuće algebre koeficienata ,konstruiše se homeomorfizam $\alpha : M_A \to M_A$ i opisuju se invariantne mere. Takvom metodom su ispitivane diferencne jednačine oblika

$$\mathcal{b}u \equiv \sum_{k=1}^{m} a_k(x)u(x+h_k) = f(x) \qquad (2)$$

integralne jednačine tipa konvolucije oblika

$$\mathcal{b}u \equiv a(x)u(x) + \sum_{k=1}^{m} a_k(x)\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_k(x-y)u(y)dy = W(x) \qquad (3)$$

integro-diferencne jednačine oblika

$$\mathcal{b}u(x) \equiv \sum_{k=1}^{m} a_k(x)u(x+\omega_k) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{l} a_{kj}(x)\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_k(x-y)u(y+\omega_k)dy = W(x) \qquad (4)$$

i analogne jednačine u $\mathbb{R}^n$.

Takve su jednačine razmotrene u slučaju kada su koeficienti oblika

$$a_k(x) = a^0(x) + a^1(x)e^{ihx}$$

gde su a^0 i a^1 konstantni ili imaju limes u beskonačnosti.

U glavi II,§1 izdvaja se jedna klasa operatora oblika (2) kod koji se mogu dobiti potrebni i dovoljni uslovi invertibilnosti. U II, § 2 dobijeni su uslovi njoterovosti operatora oblika (3) , gde koeficienti a^0 i a^1 imaju limes u beskonačnosti.

U glavi III razmatra se klasa jednačina u prostoru $L_2(\mathbb{R}^n)$ za koje se mogu dobiti eksplicitni uslovi njoterovosti ili razrešivosti. U tom slučaju ω_k i h nisu brojevi več vektori i ispitivanje je još složenije. Koeficienti koji su složenijeg oblika nego u (5) predstavljaju se ~~u obliku~~ sume od nekoliko oscilirajućih sabiraka.

РЕЗЮМЕ

Диссертация состоит из три глав. В первой главе диссертации изложенны основные общей теории, необходимые для дальнейшего исследования. Оригинальные результаты изложеные в второй и треты главах. Исследования в диссертации проводимся по общей схеме. Сначала задача сводится к рассмотрению вспомогательного функционального оператора вида

$$Bu(x) = a_0(x)\,u(x) + a_1(x)\,u(g(x)) \qquad (1)$$

затим строится пространство максимальных идеалов, потом гомеоморфизм $\alpha: M_A \to M_A$ и описивается инвариантные меры. Таким методом исследованы разностные уравнения вида

$$Bu \equiv \sum_{k=1}^{m} a_k(x)\,u(x+h_k) = f(x) \qquad (2)$$

интегральные уравнения типа свертки

$$Bu \equiv a(x)u(x) + \sum_{k=1}^{m} a_k(x)\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\Phi}_k(x-y)\,u(y)\,dy = W(x) \qquad (3)$$

интегро разностные уравнения вида

$$Bu(x) \equiv \sum_{k=1}^{m} a_k(x)\,u(x+\omega_k) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{\ell} a_{kj}(x)\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\Phi}_k(x-y)\,u(y+\omega_k)\,dy = W(x) \qquad (4)$$

и аналогичные уравнения в R^n.

Такие уравнения рассматриваются в случае, когда коеффициены имеют вид

$$a_k(x) = a^0(x) + a^1(x)\, e^{ihx} \qquad (5)$$

где a^0 и a^1 либо постоянны, либо имеют на бесконечности пределы.

В главе II,§1 выделен один класс операторов вида (2) для которых удается получить необходимые и достаточные условия обратимости. В II,§2 получены условия нетеровости оператора вида (3), где коеффициенты a^0 и a^1 имеют на бесконечности предель.

В главе III выделены классы уравнений в пространствах $L_2(R^n)$ для которых удаемся получить явные условия обратимости или разрешимости. В этом случае ω_k и h не числа, а векторы и исследование еще усложняется. Коеффициенты имеют более сложный вид, чем (5), представляются в виде суммы нескольких осцилирающих слагаемых.

BIOGRAFIJA

Roden sam 28.02.1947 god. u Žuru ,SO Prizren. Osnovnu školu završio sam u rodnom mestu ,a Učiteljsku školu u Prizrenu 1967 god. . Iste godine upisao sam se na Filozofskom fakultetu u Prištini na Odseku za matematiku gde sam i diplomirao 1971 god. .Od 1971 do 1973 bio sam na specijalizaciju u Zagreb. Školske god. 1973/74 bio sam primljen za asistenta matematike na Tehničkom fakultetu u Prištini .Postdiplomske studije upisao sam na Prirodno-matematičkom fakultetu u Prištini 1978 god, gde sam i magistrirao 1982 god. s temom: „Komutatori ograničenih operatora u Hilbertovom prostoru" pod rukovodstvom prof. dr Novaka Ivanovskog .Iste godine bio sam izabran u zvanje predavača za predmet Matematika na Tehničkom fakultetu u Prištini gde i sada radim. Od 1987 do 1988 god. bio sam na specijalizaciji u Sovjetskom savezu na Beloruskom državnom univerzitetu u Minsku ,pri katedru za funkcionalnu analizu.