UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET
****

O DVA KARAKTERISTIČNA MODELA FUNKCIONALNIH SISTEMA SA AUTOMATNIM OPERACIJAMA ZATVARANJA

- doktorska disertacija -

MENTORI:
PROF. DR. В.Б. КУДРЯВЦЕВ
PROF. DR. Š. UŠĆUMLIĆ

MR. GORAN KILIBARDA

Beograd, mart 1989 g.

Zahvaljujem se na savetima, podršci i pomoći u radu mojim mentorima prof.dr.V.B.Kudrjavcevu i prof.dr.Š.Ušćumliću.

Takođe, zahvaljujem se kolektivu Tehnološko-metalurškog fakulteta u Beogradu što mi je omogućio specijalizaciju u Moskvi. Zahvaljujem se SIZ-u za nauku Srbije za finansiranje moga osamnaestomesečnog boravka u Moskvi.

S A D R Ž A J

Uvod

Funkcionalni sistem je formalizacija sledeće realne situacije. Glavni objekt matematičke kibernetike je pojam upravljačkog sistema. On predstavlja za sebe neki objekt koji izgrađen iz prostijih objekata kao iz elemenata uz pomoć nekih pravila. Bitna su dva momenta: 1. šta "umeju" da rade elementi, a šta sam objekt, i 2. kako se on materijalno realizuje. Prvi uslovno možemo nazvati funkcionisanjem, a drugi možemo uslovno nazvati shemom. Ta dva momenta i odražavaju pojam funkcionalnog sistema; u funkcionalnom sistemu funcija ima ulogu elementa, a operacije pokazuju, kako se složeno konstruiše iz prostog (t.j. u ulozi sheme se pojavljuje term, izgrađen iz funkcija uz pomoć operacija). U toj interpretaciji shema nas interesuje kao nešto, što zadaje funkcije, tj. nas interesuje kako ona funkcioniše. Znači, funkcionalni sistem možemo shvatiti kao par (P,Ω), gde je P skup funkcija, a Ω skup operacija nad njima.

Za upravljačke sisteme karaktristična su dva problema. Prvi je problem analize, drugi - problem sinteze. Zadatak analize se sastoji u poimanju kako funkcioniše shema ako je poznat način funkcionisanja njenih delova, a problem sinteze se sastoji u tome da imajući elemente i znajući kako oni funkcionišu, a takođe raspolagajući sa skupom operacija uz pomoć kojih gradimo složenije objekte, po zadatom funkcionisanju ustanovljavamo da li je moguće izgraditi odgovarajuću shemu. S pojmom funkcinalnog sistema, f.s., upravo je povezan problem sinteze. Problem izrazivosti, t.j. problem potpunosti, - to je drugim rečima problem sinteze za upravljajuće sisteme, no prenet na funkcionalne sisteme. Taj problem, kao što smo već primetili, aktuelan je u slučaju kada reč ide o konstrukciji novih upravljajućih sistema iz zadatih, sistema koji poseduju jače da tako kažemo funkcionisanje od funkcionisanja elemenata. Preciznije. Problem izrazivosti se sastoji u opisu za dati skup M, $M \subset P$, svih takvih elemenata iz P koji se dobijaju iz M uz pomoć operacija iz Ω. Specijalan slučaj problema izrazivosti je problem potpunosti. Problem potpunosti se sastoji u opisivanju svih takvih podskupova M skupa P koji generišu uz pomoć operacija iz Ω čitavo P.

Sadržajno najinteresantniji su sledeći slučajevi funkcionalnih sistema:

a) kada je Ω skup automatnih operacija, a P skup svih funkcija prebrojivo-značne logike. Takav funkcionalni sistem se naziva istinostnim funkcionalnim sistemima, i.f.s.

b) kada je P skup funkcija nad rečima konačne azbuke. Dolazimo do pojma uzastopnih funkcija, a samim tim i do pojma uzastopnog funkcionalnog sistema.

Primetimo da je problem izrazivosti i potpunosti karakterističan za "bogate" funkcionalne sisteme. Ipak, pored ova dva problema postoji celi niz drugih problema za funkcionalne sisteme. U primenama, u prvi plan istupaju često problemi izračunavanja i prebrojavanja. Praktični problemi se pojavljuju u slučaju kada leva komponenta funkcionalnog sistema više nije tako bogata. Ona se može sastojati iz skupa konstanti, a težište se pomera na izučava-nje desne komponente - operacija na tim konstantama. Tako dolazimo do suštinski nove situacije: naša pažnja je usmerena na operacije i mi izučavamo njihovo ponašanje na skupu konstanti ili brojeva, odnosno kodova nekih pojava. Te konstante mogu biti izražene na razne načine, ili su to neki simboli, ili su to, što je veoma čest slučaj, reči napravljene od ograničenog broja simbola.

Jedan od prvih zadataka takvog tipa je prebrojavanje reči koje pri obradi sa automatskim operatorima dovode računač u takozvano završno stanje. Računač raspoznaje te reči koje poseduju neko za nas interesantno svojstvo. Pri tome, pretpostavlja se da se u automatu-računaču odvija proces samokontrole i samoobučavanja. Sam računač kao da iterativno radi sa tim rečima: on uzima prvo slovo neke reči, gleda na rezultat posle obrade slova i odlučuje se kako će u daljem radu postupati sa sledećim slovom reči.

Uvezi s tim možemo pomenuti pionirski rad Klinija u kojem se automat-računač pojavljuje kao klasifikator skupa ulaznih reči. Konačni automat klasifikuje celu ulaznu polugrupu reči na odgovarajuću i na neodgovarajuću grupu reči. Problem je nastao u biologiji i uzrok njegove pojave bio je sledeći. Bilo je primećeno da odgovarajući nizovi uzbuđenja/ neuzbuđenja dovode nervni sistem u stanje stresa ili to ne čine. Znači, u ulozi ulazne polugrupe pojavljuju se nizovi uzbuđenja/neuzbuđenja, u datom slučaju za nervni sistem, a u ulozi završnih stanja prelaz u stresno stanje ili neprelaz. Tačnije, završnim stanjem ćemo smatrati prelaz u stanje stresa. Neophodno je bilo videti kako su izgrađene reči uzbuđenja/neuzbuđenja ulazne polugrupe, to jest reči tipa "da/ ne", koje dovode nervni sistem u stresno stanje.

Klini je modelirao taj problem na neuronskoj mreži i dokazao svoju znamenitu teoremu da je skup regularnih reći, i samo on, taj skup koji dovodi u stresno stanje neuronsku mrežu. To je bio veliki rezultat primenjene matematike 50-tih godina, ali je odigrao i određenu negativnu ulogu, jer je na neki način stavio tačku na taj problem: regularni i samo regularni događaji dovode nervni sistem u stanje stresa. U stvari, pokazalo se da je postavku tog problema moguće proširiti. Pod ulaznim slovima možemo shvatiti ne samo ređanje prijatnih i neprijatnih situacija, već daleko širi krug događaja. Naprimer, takvim slovima moguće je kodirati slike i lavirinte. Tako naprimer, u slučaju lavirinata imamo isti takav problem: kada automat-računač iterativno radeći nad ulaznim rećima s takvom interpretacijom kao što je lavirint, prelazi u završno stanje, t.j. prihvata svaku čeliju lavirinta, koja je slovo ulazne reči, t.j. dolazi do nje. U terminima Klini neke opise takvih reći, t.j. odgovarajućih lavirinata imamo. U geometriskim terminima mi ne shvatamo kako su napravljene ulazne reći koje su kodovi lavirinata koje obilazi dati automat. U vezi s tim biće i problem postojanja automata-računača koji obilazi sve lavirinte, t.j. sve ulazne reći s takvom interpretacijom kao što je lavirint.

U jednom od glavnih problema danas, pri prilazu, kada mi hoćemo izučavati operacije, dobija se model u kome je levi deo funkcionalnog sistema degenerisan, naprimer, to je skup konstanti, kao što smo primetili, uzetih u vidu reći u nekoj konačnoj azbuci, a desni deo, naprimer, konačni sistem računača, svaki od kojih će raditi s tim rećima iterativno. Njihov rad će odgovarati kretanju automata u ravni po lavirintima, čiji kodovi su date reči.

Problem ima mnogo sadržajnih interpretacija. To je, naprimer, problem konstrukcije robota sa ograničenim mogućnostima kretanja. Imamo naselje u čije kuće robot ne može ući, a njegov zadatak se sastoji u tome da iz zaraženog kvarta iznese sve postradale. On mora obići sve ulice zaraženog kvarta i saopštiti na centralni pult da je zadatak izvršen: da je on obišao ceo kvart i pokupio sve postradale.

To može biti slučaj, kada robot-ploter sa autonomnim upravljanjem mora rešiti takav zadatak: naneti na sliku odgovarajući crtež. Nacrtati, naprimer, shemu koja će biti realizovana u vidu čipa za računsku mašinu. To je automat, koji mora prosto rešiti problem poklapanja realne slike sa tom koja bi trebala biti, tj. on upoređuje istiniti dokument sa predloženim.

U vezi s tim važno je ispitivati funkcionalni sistem baš u drugom aspektu - aspektu analize računskih mogućnosti automata-računača. Na takav način mi imamo dva gledišta na funkcionalni sistem. U prvom slučaju mi imamo bogate leve delove i proizvoljne desne delove i izučavamo kako bogatstvo levih delova utiče na problem izrazivosti u funkcionalnom sistemu pri dovoljno siromašnim u odnosu na levi deo desnim delom, a može biti takođe obogaćenim desnim delom. Drugim rečima, izučavamo uzajamni odnos leve i desne strane, to jačajući levu, a siromašeći desnu, ili obrnuto. Ali, uglavnom, držimo levi deo dovoljno bogatim.

U drugom slučaju mi svesno slabimo levi deo i u potpunosti se prebacujemo na ispitivanje mogućnosti desnog dela. A levi deo, iako osiromašen, ima važnu praktičnu interpretaciju.

Nastala dva modela su u određenom smislu polarna. U prvom slučaju možemo imati veoma moćne klase funkcija u levom delu funkcionalnog sistema, naprimer, klasu funkcija prebrojivo-značne logike (sa sadržajne tačke gledišta bogatiju klasu u matematici, izgleda, nema smisla posmatrati u takom širokom aspektu), a u drugom slučaju levi deo suštinski osiromašujemo, to su samo konstante regularno obrazovane, prosto, obrazovane. To su konačna slova u konačnoj azbuci, a desni deo je automatski, najprostiji među upravljačkim sistemima, među tima, kojima je dozvoljeno imati neko vreme za razmišljanje i neku ograničenu pamet (to je najprostiji objekat u kibernetici s ograničenom pameću). A prvi objekat je, granično širok po levoj komponenti i sužen po desnoj, no takođe širok, jer razmišljanja u opštem slučaju mogu biti beskonačna, jer iako je shema automatska azbuke su beskonačne. Na taj način, izučavaju se dve polarne pojave za funkcionalne sisteme na dva osnovna modelna objekta: prebrojivo-značna logika s automatskim operacijama zatvaranja i model konačnih reči nad konačnom azbukom s konačnim automatskim operacijama.

Osnovni rezultati ovog rada sastoje se u sledećem.

U prvom delu rada izučava se i.f.s. (P_N,Ω_{CB}), odnosno par (P_N,J_{CB}), gde je Ω_{CB} - skup svih slobodnih operacija, P_N - skup svih funkcija prebrojivoznačne logike, a J_{CB} - operator A-zatvaranja $J_{\Omega_{CB}}$. Poznato je [1] da je svaki i.f.s. oblika (P_A,Ω_{CB}), a među njima i (P_N,Ω_{CB}), konačno generisan, i da se klase $J_{CB}(\Phi)$ i M_{KC} poklapaju; M_{KC} je klasa svih kvaziselektornih funkcija. Na taj način, par (P_N,J_{CB}) je pravilan, t.j. kao kriterijalni sistem za par (P_N,J_{CB}) možemo uzeti skup svih predpotpunih klasa. U vezi sa ovim, u radu je pokazano da par (P_N, J_{CB}) ima tačno $2^{\aleph_1}$ predpotpunih klasa. Takođe se istražuju neka svojstva rešetke svih zatvorenih skupova u (P_N, Ω_{CB}). Pokazuje se da je širina i visina te rešetke jednaka $2^{\aleph_1}$, a isto tako da se svako parcijalno uređenje $(L,\leq)$ takvo da je $|L|\leq\aleph_1$ može izomorfno potopiti u tu rešetku. Dalje se pokazuje da u (P_N, J_{CB}) važi da svi kriterijalmi sistemi koji prepoznaju svojstvo da li je neka funkcija jedne promenljive Šeferova ili ne imaju moć jednaku kontinumu. Opisuje se klasa svih Šeferovih funkcija jedne promenljive i pokazuje se da u (P_V, J_{CB}) za svaki prirodan broj k postoji kontinum različitih baza moći k. U radu se dalje razmatraju rekurzivne funkcije i odgovarajući slobodni operatori, kod kojih su skupovi završnih stanja rekurzivni. Ustanovljava se algoritamska nerazrešivost problema potpunosti za podskup od P_N, kontinualnost skupa predpotpunih klasa i formulišu se odgovarajuća analogna svojstva za rešetku zatvorenih klasa tog i.f.s. Osim toga, pokazuje se algoritamska nerazrešivost svojstva da li je funkcija jedne promenljive Šeferova ili ne, i dokazuje se fakt da je skup indeksa svih Šeferovih funkcija jedne promenljive produktivan.

U drugom delu rada uvodi se pojam sistema interagujićih regularnih pešaka i p-lavirinta i izučava se problem postojanja univerzalnog sistema automata, tj.sistema koji obilazi sve lavirinte. Dat je elementaran, bitno skraćen i konstruktivan dokaz poznate činjenice da za konačan sistem automata postoji univerzalna klopka. Za automate sa malim brojem stanja opisane su njihove mogućnosti prebrojavanja. Osim toga, izučen je problem obilaska lavirinata sistemima automata i konstruktivno je dokazano da postoji sistem od dva automata, a isto tako sistem koji se sastoji od jednog automata i dva kamena, koji obilazi proizvoljan ravni lavirinat. Posebno se izučava problem obilaska beskonačnih lavirinata pomoću automata i konstruktivno, za razliku od već postojećeg dokaza, i pregledno se utvrđuje ranije poznati fakt postojanja sistema, koji se sastoji iz automata i 7 kamenova, koji obilazi sve konačne i beskonačne lavirinte.

Napominjem da su rezultati ovog rada izloženi na seminarima Teorija automata (pod rukovodstvom V.B.Kudrjavceva) i Matematički problemi iz kibernetike (pod rukovodstvom S.V.Jablonskog) Moskovskog državnog univerziteta, a isto tako na Seminaru iz algebre i logike u Institutu matematike, Novosibirsk.

Glava 1.

Neki osnovni pojmovi teorije funkcionalnih sistema

U ovoj glavi daćemo neke fundamentalne pojmove teorije funkcionalnih sistema i osnovne rezultate koji se odnose na te pojmove [1], na koje ćemo se pozivati u daljem radu.

1. Pojam istinitosnog funkcionalnog sistema

Uvešćemo jedan od osnovnih pojmova - pojam istinitosnog funkcionalnog sistema, i.f.s., koji predstavlja par (M,Ω), gde je M - neki skup funkcija, a Ω - neki skup operacija nad funkcijama iz M sa vrednostima u M.

Prvo ćemo razmotriti pojmove: sheme, mreže i logičke mreže, i pokazati kako ti pojmovi dovode do pojma operacije nad funkcijama.

Za definisanje pojma sheme i logičke mreže potrebni su nam pomoćni pojmovi elementa i sheme. Mi ćemo razmatrati elemente dva tipa: elementi F_n (n=1,2,...) i element G (elementi tipa F i tipa G redom). Skup tih elemenata označimo sa E. Element F_n ima n ulaza i jedan izlaz, a element G ima jedan ulaz i jedan izlaz. Pretpostavlja se da su ulazi elementa tipa F uređeni sleva na desno. Iz elemenata, ćemo graditi sheme (sheme nad E), pri čemu jedan te isti elemenat može biti korišćen pri gradnji sheme više puta. Shema se definiše na sledeći način.

1. Svaki element je shema. Ulazi i izlazi tih shema su redom ulazi i izlazi odgovarajućih elemenata.

2. Neka je data shema S sa nekim brojem ulaza i izlaza. Izdvojmo u njoj kao nove izlaze neki prazan podskup izlaza sheme S. Dobijamo shemu kod koje su ulazi svi ulazi sheme S, a skup izlaza se podudara sa izdvojenim skupom.

3. Neka su date sheme S_1 i S_2, koje nemaju opštih izlaza, ulaza i elemenata. Shema S, kod koje su ulazi svi ulazi shema S_1 i S_2, a izlazi - svi izlazi shema S_1 i S_2 se naziva **sumom shema** S_1 i S_2.

4. Neka je data shema S. Slepićemo proizvoljna dva ulaza ove sheme, pri tome, uopšteno rečeno, svaki od ulaza može biti slepljen i sam sa sobom. Kao rezultat dobijamo shemu S', kod koje su ulazi svi ulazi sheme S različiti ot slepljenih, i bilo koji (po izboru) iz slepjenih ulaza, a izlazi - izlazi sheme S. Kaže se u tom slučaju, da je shema S' dobijena iz sheme S pomoću operacije **lepljenja ulaza**.

5. Neka su date sheme S_1 i S_2, koje nemaju opštih ulaza, izlaza i elemenata. Slepimo proizvoljni ulaz sheme S_1 sa proizvoljnim izlazom sheme S_2. U rezultatu dobijamo shemu S, kod koje su ulazi svi ulazi shema S_1 i S_2, osim tog ulaza sheme S_2, koji je bio slepljen sa izlazom sheme S_1, a izlazi - svi izlazi shema S_1 i S_2. Rećićemo da je shema S dobijena iz shema S_1 i S_2 pomoću **operacije zamene sheme** S_1 **u shemi** S_2.

6. Neka je data shema S, koja ima ne manje od dva ulaza. Neka je neki njen ulaz (slučaj a) ili izlaz (slučaj b) istovre-

meno ulaz, odnosno izlaz samo elemenata tipa G. Tada:

a) lepljenjem proizvoljnog izlaza sheme S sa uočenim ulazom, dobijamo novu shemu S';

b) lepljenjem proizvoljnog ulaza sheme S sa uočenim izlazom, dobijamo novu shemu S''.

Ulazi shema S' i S'' su svi ulazi sheme S, osim slepljenog sa izlazom, a izlazi - svi izlazi sheme S. Kažemo da su sheme S' i S'' dobijene iz sheme S pomoću operacije obratne sprege.

Ubuduće posmatraćemo sheme koje imaju samo jedan izlaz. Skup svih takvih shema nad E označimo sa $\mathfrak{S}(E)$.

Moć proizvoljnog skupa X označimo sa $|X|$. Neka je A neki beskonačan ili konačan skup koji sadrži barem dva elementa i $U=\{u_1,u_2,\ldots,u_n,\ldots\}$ azbuka promenljivih u_n, koje uzimaju vrednosti iz A. Označimo sa P_A skup svih funkcija $f(u_{i_1},u_{i_2},\ldots$ $\ldots,u_{i_n})$ sa vrednostima u A, gde je $i_j<i_{j'}$ pri $j<j'$; $1\leq j,j'\leq n$; $n=1,2,\ldots$ Te funkcije su preslikavanja vida $f:A^n\to A$, gde je $A^n=A_{i_1}\times A_{i_2}\times\ldots\ldots\times A_{i_n}$, $A_{i_j}=A$, i zovu se ponekad funkcijama $|A|$ -značne logike. Da bi smo izbegli složena označavanja indeksa promenljivih, mi ćemo upotrebiti u ulozi metaoznaka simbole x, $y,z,\ldots$, a takodje te simbole s indeksima. Na taj način, zapis $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ se shvata kao zapis funkcije iz P_A, koja zavisi od promenljivih $u_{i_1},u_{i_2},\ldots,u_{i_n}$ pri datom gore svojstvu njihovih indeksa. Govorićemo da funkcija $f(x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_n)$ suštinski zavisi od promenljivih x_i, ako postoje takve niske $(a_1,a_2,\ldots,a_i,\ldots,a_n)$ i $(a_1,a_2,\ldots,a_{i-1},a_i',a_{i+1},\ldots a_n)$, da je $a_i\neq a_i'$ i $f(a_1,a_2,\ldots,a_i,\ldots,a_n)\neq f(a_1,a_2,\ldots,a_{i-1},a_i',a_{i+1},\ldots a_n)$. Promenljiva x_i u tom slučaju se naziva suštinskom za funkciju

f. Promenljiva koja nije suštinska se naziva fiktivnom. Da bi smo ukazali činjenicu da mi imamo dve razne oznake $g(y_1,\dots,y_n)$ i $h(z_1,\dots,z_n)$ za istu funkciju $f(x_1,\dots,x_n)$ koristićemo znak jednakosti $=$, to jest pisaćemo $g(y_1,\dots,y_n)=h(z_1,\dots,z_n)$. Označimo sa $\vec{a}^n=(a_{i_1},a_{i_2},\dots,a_{i_n})$ proizvoljni elemenat iz A^n i sa $(A^n)^*$ skup svih reči oblika $\alpha^k=\vec{a}_1^n\vec{a}_2^n\dots\vec{a}_k^n$, t.j. konačnih nizova dužine k u azbuci A^n. Ponekad ćemo kao zapis reči α^k iz $(A^n)^*$ koristiti oznaku $\alpha^k=\vec{a}^n(1)\vec{a}^n(2)\dots\vec{a}^n(k)$.

Neka je F_n elemenat iz E. Numerišimo na neki način s raznim brojevima $i_1,i_2,\dots,i_n$ njegove ulaze (ovde je i_j broj j-tog ulaza elementa F_n). Neka je $f(u_{i_1},u_{i_2},\dots,u_{i_n})$ funkcija iz P_A. Smatraćemo nju pripisanu elementu F_n sa datom numeracijom ulaza. U tom slučaju kaže se da elemenat F_n sa datom numeracijom ulaza realizuje funkciju f i interpretira se to na sledeći način. Uvodi se parametar t, koji se naziva vremenom. Pretpostavlja se da t uzima redom vrednosti 1,2,..., a "rad" elementa F_n se odvija u tim momentima. Smatra se da se ulazi i izlazi elemenata mogu nalaziti u nekim stanjima, koja u ukupnosti određuju skup A. Ako se ulazi elemenata, s obzirom na numeraciju, u momentu t nalaze u stanjima $a_{i_1},a_{i_2},\dots,a_{i_n}$, to izlaz elementa u tom momentu se nalazi u stanju $f(a_{i_1},a_{i_2},\dots\ \dots,a_{i_n})$. Elemenat tipa G "radi" u istim tim momentima i stanje $b(t+1)$ njegovog izlaza u momentu t+1 se poklapa sa stanjem $a(t)$ njegovog ulaza u momentu t, t.j. $b(t+1)=a(t)$. U prvi momenat izlazu elementa tipa G se pripisuje neko početno stanje $b(1)$, koje uopšteno rečeno zavisi od elementa G koji se posmatra. Kaže se da u tom slučaju elemenat tipa G realizuje operator jedinične zadrške.

Posmatrajmo sada proizvoljnu shemu S sa n ulaza. Pripišimo na nekii način njenim ulazima promenljive $u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_n}$, gde je $i_j < i_{j'}$ pri $j < j'$, a ulaze elemenata sheme S numerišimo na neki gore dati način. Smatraćemo, da su elementima iz kojih je izgrađena shema dodeljeni gore opisani operatori. "Rad" sheme S se odvija u istim momentima t=1, 2,..., i sastoji se u sledećem. Pretpostavlja se da se u datim momentima svaki ulaz i izlaz svakog elementa sheme može nalaziti u nekim stanjima, pri čemu slepljeni ulazi, a takođe slepljeni izlazi i ulazi se nalaze u odgovarajućim jednakim stanjima. Smatra se da se u momentima 1,2,..., na ulazima sheme pojavljuju redom slova neke reči iz $(A^n)^*$. U skladu sa zakonima funkcionisanja elemenata sheme i s obzirom na to da su izlazi elemenata tipa G već definisani, davanje na ulaz sheme slova $\vec{a}^n(1)$ odrediće stanje svih ulaza i izlaza svakog elementa sheme S u momentu t=1, a tim samim i stanja svih izlaza elemenata tipa G u momentu t=2. Pojava slova $\vec{a}^n(2)$ u sledećem momentu dovodi do situacije koja je analogna posmatranoj i.t.d. Na taj način, izlaz svakog elementa sheme S će redom prolaziti neka stanja. Opisana "prerada" reči α^k iz $(A^n)^*$ uz pomoć sheme S i niza stanja, koja uzimaju izlazi svakog elementa sheme S, se zove funkcionisanje sheme S, a sama shema, čije funkcionisanje smo, upravo, definisali se zove **logička mreža** (l.m.).

Neka l.m. S ima n ulaza, kojima su pripisane promenljive $u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_n}$, $i_l < i_{l'}$ pri $l < l'$, i ukupno m elemenata tipa G ili tipa F, čiji su izlazi numerisani brojevima $j_1, j_2, \ldots, j_m$,

$j_r < j_{r'}$ pri $r < r'$; $m \geq 1$.

Izdvojmo u skupu $A_{j_1} \times A_{j_2} \times \ldots \times A_{j_n}$ neki podskup Q, čije elemente nazovimo **završnim stanjima**, i posmatrajmo neku funkciju $f(u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_n})$ iz P_A. Kažemo da l.m. S izračunava u odnosu na Q funkciju f u tački $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n})$, ako su ispunjeni sledeći uslovi:

1) postoji takvo $k \geq 1$ da se pri preradi reči $\alpha^k = \vec{a}^n(1)\vec{a}^n(2) \ldots \vec{a}^n(k)$, gde je $\vec{a}^n(l) = (a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n})$, $l = 1, 2, \ldots \ldots, k$, izlazi elemenata l.m. S nađu u momentu k u stanjima koja obrazuju nisku $(q_{j_1}, q_{j_2}, \ldots, q_{j_m})$ koja pripada Q;

2) izlaz l.m. S u momentu k je $f(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n})$;

3) pri $k > 1$, za svako l takvo da je $l < k$, pri preradi reči $\alpha^l = \vec{a}^n(1)\vec{a}^n(2) \ldots \vec{a}^n(l)$, gde je $\vec{a}^n(r) = (a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n})$, $r = 1, 2, \ldots, l$, izlazi elemenata l.m. S će se naći u momentu l u stanjima koja obrazuju nisku $(q'_{j_1}, q'_{j_2}, \ldots, q'_{j_m})$, koja ne pripada Q.

Rečićemo da l.m. S izračunava u odnosu na Q funkciju f, ako l.m. S izračunava u odnosu na Q funkciju f u svakoj tački. Radi kratkoće u daljem izlaganju ćemo izraz "u odnosu na" ponekad ispuštati. Na taj način, l.m. S se pojavljuje u ulozi računača funkcije.

Primetimo da jedna te ista shema S može zadavati različite računače, ako pretpostavimo mogućim variranje pripisivanja: (1) različitih promenljivih ulazima sheme, (2) različitih brojeva ulazima sheme (3) različitih funkcija iz P_A elementima sheme, (4) početnih stanja njenim elementima tipa G, a takođe (5) izdvajanje skupa Q završnih stanja.

Neka su u shemi S ulazima pripisane neke promenljive, numerisani ulazi njenih elemenata, nekim elementima tipa F, a takođe svim elementima tipa G dodeljeni su odgovarajući operatori, data su početna stanja elemenata tipa G i fiksiran je skup Q završnih stanja. Dobijeni objekat nazivamo mrežom S. Neka elementima tipa F, označenim sa $F_{i_1},F_{i_2},\ldots,F_{i_m}$, nisu pripisani odgovarajući operatori. Pretpostavljajući da je tim elementima moguće dodeljivanje svake funkcije iz P_A od odgovarajućih promenljivih, možemo smatrati da mreža S zadaje neku parcijalnu operaciju $\omega:(P_A)_{i_1}\times(P_A)_{i_2}\times\ldots\times(P_A)_{i_m}\to P_A$, koja je definisana na sledeći način. Neka su elementima $F_{i_1},F_{i_2},\ldots,F_{i_m}$ dodeljene odgovarajuće funkcije $f_{i_1},f_{i_2},\ldots,f_{i_m}$; tada se shema S može razmatrati kao l.m., t.j. računač neke funkcije iz P_A. Ako takva funkcija f iz P_A postoji, to se ona proglašava vrednošću $\omega(f_{i_1}, f_{i_2},\ldots,f_{i_m})$, u protivnom, vrednost $\omega(f_{i_1},f_{i_2},\ldots,f_{i_m})$ se smatra nedefinisanom. Operacija ω, zadata mrežom S, kod koje nikakvom elementu tipa F nije pripisana neka fiksirana funkcija, se naziva slobodnom operacijom; dati elementi mreže S, a takođe mreža S se, takođe, nazivaju slobodnima. Operacije, mreže i elementi koji nisu slobodni nazivaju se povezanima. Operacije zadate mrežama koje ili ne sadrže elemenat tipa F, ili kod kojih su elementi tipa F povezani nazivaju se konstantama.

Skup svih mreža koje se dobijaju iz skupa $\mathfrak{S}(E)$, uz pomoć odgovarajućeg pripisivanja promenljivih ulazima mreža, numeracije ulaza njenih elemenata, dodeljivanja funkcija iz P_A elementima tipa F, izbora početnih stanja elemenata tipa G i fiksacije skupa završnih stanja, označimo sa $\mathfrak{S}(E,P_A)$. Skup svih operacija nad funkcijama, zadatim uz pomoć mreža iz skupa N,

$N\subseteq\mathfrak{P}(E,P_A)$, označimo sa $\Omega(N)$. Neka je $M\subseteq P_A$, $M\neq\emptyset$ i $\Omega\subseteq\Omega(\mathfrak{P}(E,P_A))$, $\Omega\neq\emptyset$; par (M,Ω) se naziva **istinosnim funkcionalnim sistemom**, i.f.s., ako se pri primeni operatora ω iz Ω na elemente iz M dobijaju elementi iz M.

2. Sistemi i operatori zatvaranja. Operator A-zatvaranja. Problem potpunosti za i.f.s.

Neka je $\mathfrak{M}$ proizvoljan skup i $\mathfrak{B}(\mathfrak{M})$ skup svih njegovih podskupova. Podskupove od $\mathfrak{B}(\mathfrak{M})$ nazivaćemo sistemima podskupova skupa $\mathfrak{M}$. Sistem $\mathfrak{C}$ podskupova skupa X se naziva **sistemom zatvaranja** ako: (1) $X\in\mathfrak{C}$ i (2) sistem $\mathfrak{C}$ je zatvoren u odnosu na presek, t.j. $\cap\mathfrak{D}\in\mathfrak{C}$ za svaki podsistem $\mathfrak{D}\subseteq\mathfrak{C}$.

Uvedimo sada pojam operatora zatvaranja na skupu, koji je ekvivalentan pojmu sistema zatvaranja. **Operator zatvaranja** na skupu X je preslikavanje J skupa $\mathfrak{B}(\mathfrak{M})$ u sebe, koje ima sledeća svojstva:

1) Ako je $A\subseteq B$, to je $J(A)\subseteq J(B)$,

2) $A\subseteq J(A)$,

3) $JJ(A)=J(A)$

za sve $A,B\in\mathfrak{B}(\mathfrak{M})$.

Dokazuje se sledeća teorema.

<u>Teorema 2.1.</u> [2] Svaki sistem zatvaranja $\mathfrak{C}$ na skupu $\mathfrak{M}$ definiše operator zatvaranja J na $\mathfrak{M}$ tako što je

$$J(A) = \cap \{B\in\mathfrak{C} \mid A\subseteq B\}.$$

Obratno, svaki operator zatvaranja J na $\mathfrak{M}$ određuje sistem zatvaranja

$$\mathfrak{C}=\{A\subseteq X \mid J(A)=A\}$$

i tako dobijena korespodencija $\mathfrak{C}\longleftrightarrow J$ između sistema zatvaranja i operatora zatvaranja uzajamno je jednoznačna.

Elementi sistema $\mathfrak{C}$ se nazivaju **zatvorenim skupovima** skupa $\mathfrak{M}$, a $J(A)$ se naziva **zatvaranjem skupa** A u $\mathfrak{M}$ (jasno je da iz definicije operatora J sledi da je $J(A)$ zatvoren).

Neka je $\mathfrak{M}$ neki neprazan skup i J neki operator zatvaranja na tom skupu. U daljem izlaganju će objekt našeg izučavanja biti par $(\mathfrak{M},J)$. Neka je $\mathfrak{M}_1,\mathfrak{M}_2\subseteq\mathfrak{M}$; $\mathfrak{M}_2$ je **izrazivo** preko $\mathfrak{M}_1$ u $(\mathfrak{M},J)$ ako je $\mathfrak{M}_2\subseteq J(\mathfrak{M}_1)$. Problem izrazivosti za $(\mathfrak{M},J)$ se sastoji u opisivanju svih takvih parova $(\mathfrak{M}_1,\mathfrak{M}_2)$ za koje je $\mathfrak{M}_2$ izrazivo preko $\mathfrak{M}_1$. Problem izrazivosti za klasu svih parova $(\mathfrak{M}',J)$, takvih da je $\mathfrak{M}'\subseteq\mathfrak{M}$ i $J(\mathfrak{M}')=\mathfrak{M}'$, pri pretpostavci da je u parovima oblika $(\mathfrak{M}_1,\mathfrak{M}_2)$ ispunjeno $J(\mathfrak{M}_1)=\mathfrak{M}_2$ i $\mathfrak{M}_1\subseteq\mathfrak{M}_2$, ekvivalentan je problemu potpunosti za parove $(\mathfrak{M}',J)$, koji se sastoji u sledećem. Podskup $\mathfrak{M}'$ skupa $\mathfrak{M}$ se zove **potpunim** u $(\mathfrak{M},J)$ (ponekad radi kratkoće samo "potpunim"), ako je $J(\mathfrak{M}')=\mathfrak{M}$. Problem potpunosti se sastoji u opisivanju svih podskupova $\mathfrak{M}'$ potpunih u $(\mathfrak{M},J)$. Jedan od osnovnih prilaza rešenju problema potpunosti sastoji se u dobijanju kriterijuma potpunosti u terminima tzv. predpotpunih klasa [3]. U tom prilazu jedan od osnovnih pojmova je pojam kriterijalnog sistema. Neka je $\mathfrak{C}(\mathfrak{M})$ sistem svih zatvorenih podskupova skupa $\mathfrak{M}$. Jasno je da je $\mathfrak{C}(\mathfrak{M})\neq\phi$. Podskup $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}\subseteq\mathfrak{C}(\mathfrak{M})$, se zove **kriterijalnim sistemom** ako je svaki skup $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}'\subseteq\mathfrak{M}$, potpun tada i samo tada, kada za svako $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}\in\mathfrak{K}$, nije ispunjeno da je $\mathfrak{M}'\subseteq\mathfrak{N}$. Primer kriterijalnog sistema je, očito, skup $\mathfrak{C}(\mathfrak{M})\setminus\{\mathfrak{M}\}$. Isto tako, jasno je, da ako je $\mathfrak{K}$ kriterijalni sistem i za neke njegove elemente $\mathfrak{N}_1$ i $\mathfrak{N}_2$ važi $\mathfrak{N}_1 \subset \mathfrak{N}_2$, to skup $\mathfrak{K} \setminus \{\mathfrak{N}_1\}$ obrazuje takođe kriterijalni sistem. Ako pri traženju potpunih skupova izaberemo kao osnovni instrument kriterijalni sistem, to je prirodno zahtevati, da on ne sadrži i suvišne elemente, t.j. da bude sveden. Struktura kriterijalnog sistema sa te tačke gledišta može biti tačnije određena. Kaže se da je zatvoreni skup $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}' \in \mathfrak{C}(\mathfrak{M})$, $\mathfrak{M}' \neq \mathfrak{M}$, **predpotpuna klasa** u $(\mathfrak{M}, J)$ (ili prosto predpotpuna klasa), ako za svaki elemenat m takav da je $m \in \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{M}'$, važi $J(\mathfrak{M}' \cup \{m\}) = \mathfrak{M}$. Nije teško videti, da ako je $\mathfrak{K}$ kriterijalni sistem, to se svaka predpotpuna klasa sadrži u $\mathfrak{K}$; tim samim kriterijalni sistem se može predstaviti u obliku $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1 \cup (\mathfrak{K} \setminus \mathfrak{K}_1)$, gde je $\mathfrak{K}_1$ skup svih predpotpunih klasa. Pri tome, ograničavajući se po mogućnosti na "svedene" kriterijalne sisteme možemo, očito, pretpostaviti da se u drugom sabirku $\mathfrak{K} \setminus \mathfrak{K}_1$, koji označimo sa $\mathfrak{K}_2$, ne nalaze svi takvi elementi iz $\mathfrak{N}$ koji su podskupovi predpotpunih klasa. U opštem slučaju konstrukcija odgovarajučih primera [3] pokazuje da se može realizovati svaka od sledećih logičkih mogućnosti: $\mathfrak{K}_1 \neq \Phi$ i $\mathfrak{K}_2 = \Phi$; $\mathfrak{K}_1 \neq \Phi$ i $\mathfrak{K}_2 \neq \Phi$; $\mathfrak{K}_1 = \Phi$ i $\mathfrak{K}_2 \neq \Phi$; $\mathfrak{K}_1 = \Phi$ i $\mathfrak{K}_2 = \Phi$. Poslednja mogućnost je ispunjena, očito, u tom slučaju, kada je u $(\mathfrak{M}, J)$ potpun prazan skup. Takođe se možemo lako uveriti, da u slučaju, kada je $\mathfrak{K}_2 \neq \Phi$, za svaki elemenat $\mathfrak{N}$ iz $\mathfrak{K}_2$, postoji u $\mathfrak{K}_2$ takav elemenat $\mathfrak{N}'$, da je $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{N}'$. Odavde, očito, sledi da u datom slučaju uvek postoji takav podskup $\mathfrak{K}'$ skupa $\mathfrak{K}$ koji sam obrazuje kriterijalni sistem. Na taj način, uvođenje pojma svedenog kriterijalnog sistema, kao sistema koji ne sadrži prave podsisteme koji su kriterijalni, dovodi do toga, da ako postoji svedeni kriterijalni sistem, to je on jednoznačno određen i, u slučaju kada nije prazan, sastoji se od svih predpotpunih klasa. Očito je uslov postojanja nepraznog svedenog kriterijalnog sistema za par $(\mathfrak{M},J)$ ekvivalentan uslovu da se svaki zatvoren skup različit od $\mathfrak{M}$ sadrži u nekoj predpotpunoj klasi para $(\mathfrak{M},J)$. Označimo za $(\mathfrak{M},J)$ svojstva postojanja nepraznog svedenog kriterijalnog sistema, mogućnosti smeštanja svake zatvorene klase $\mathfrak{M}'\subset\mathfrak{M}$ u neku predpotpunu klasu i, to da je skup $\mathfrak{K}_2$ prazan i u isto vreme skup $\mathfrak{K}_1$ neprazan, redom sa A, B i C. Dolazimo do istinitosti sledećeg tvrđenja.

<u>Tvrđenje 2.1.</u> Za par $(\mathfrak{M},J)$ svojstva A, B i C su ekvivalentna i pri ispunjenu svakog od njih skup $\mathfrak{M}'\subseteq\mathfrak{M}$ je potpun u $(\mathfrak{M},J)$ tada i samo tada, kada on nije podskup nijedne predpotpune klase u $(\mathfrak{M},J)$.

Zbog tvrđenja 2.1 problem potpunosti za par $(\mathfrak{M},J)$ koji poseduje svojstva A, B i C postaje u određenom smislu ekvivalentan traženju svih predpotpunih klasa u $(\mathfrak{M},J)$. Kaže se da je par $(\mathfrak{M},J)$ **pravilan**, ako on poseduje svojstva A, B i C. Rećićemo da se u paru $(\mathfrak{M},J)$ skup $\mathfrak{M}$ generiše podskupom $\mathfrak{M}'\subseteq\mathfrak{M}$, ako je $J(\mathfrak{M}')=\mathfrak{M}$. U slučaju, kada je $\mathfrak{M}'$ konačan, govore da je $\mathfrak{M}$ ili $(\mathfrak{M},J)$ **konačno generisan**. Operator zatvaranja J na skupu $\mathfrak{M}$ je **algebarski** ako za svako $\mathfrak{X}\subseteq\mathfrak{M}$ i $m\in\mathfrak{M}$, iz $m\in J(\mathfrak{X})$ sledi da je $m\in J(\mathfrak{X}_1)$ za neki konačan podskup $\mathfrak{X}_1$ skupa $\mathfrak{X}$. Sistem zatvaranja je algebarski ako i samo ako je odgovarajući operator zatvaranja algebarski. Možemo pokazati da važi sledeća teorema [2].

<u>Teorema 2.2.</u> Neka je $\mathfrak{C}$ algebarski sistem zatvaranja u $\mathfrak{M}$, i neka su $\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}_2,\mathfrak{Y}$ takvi podskupovi skupa $\mathfrak{M}$ da je $\mathfrak{Y}\in\mathfrak{C}$ i $\mathfrak{Y}\cap\mathfrak{X}_2=$

$=\mathfrak{X}_1$. Tada $\mathfrak{C}$ sadrži element $\mathfrak{Z}$ koji je maksimalan u $\mathfrak{C}$ u odnosu na svojstva $\mathfrak{Y}\subseteq\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}\cap\mathfrak{X}_2=\mathfrak{X}_1$.

Iz ove teoreme direktno sledi sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 2.2. Konačno generisani par $(\mathfrak{M},J)$, kod koga je $J(\Phi)\neq\mathfrak{M}$, je pravilan.

Ako sad i.f.s. (P_A,Ω) posmatramo kao parcijalnu algebru, to s njim na prirodan način možemo povezivati operator J_Ω, koji preslikava skup P_A u sebe. Ovaj operator se definiše na sledeći način. Neka je $M\subseteq P_A$. Uvedimo po indukciji skupove M_l, $l=1,2,\ldots$ Uzmimo da je $M_0=M$, a M_{l+1} jednako skupu svih takvih funkcija f iz P_A koje ili pripadaju M_l, ili za koje postoje takve operacije ω iz Ω i funkcije $f_1,f_2,\ldots,f_s$ iz M_l, $s\geq 1$, tako da je $\omega(f_1,f_2,\ldots,f_s)=f$. Tada je $J_\Omega(M)=\bigcup_{l=0}^{\infty}M_l$. Nije teško uveriti se, da je (1) $M\subseteq J_\Omega(M)$, (2) $J_\Omega(J_\Omega(M))=J_\Omega(M)$ i (3) ako je $M_2\subseteq M_1$, to je $J_\Omega(M_2)\subseteq J_\Omega(M_1)$. Na taj način, J_Ω je operator zatvaranja i zove se ponekad **automatnim zatvaranjem** ili kratko **A-zatvaranjem** Operator J_Ω ima važnu ulogu pri izučavanju f.s.

Nije teško videti, da je u svakom i.f.s. (M,Ω) operator J_Ω algebarski. Pošto će nas interesovati i.f.s., prije svega, s tačke gledišta delovanja u njima operatora J_Ω, možemo sve pojmove koje smo gore uveli za par (M,J_Ω) uvesti i za i.f.s. (M,Ω). Tada iz tvrđenja 2.2 direktno sledi sledeće tvrđenje.

Posledica 2.1. Konačno generisan i.f.s. (M,Ω), za koji je $J_\Omega(\Phi)\neq M$, je pravilan.

U daljem izlaganju će nas najviše interesovati "problem potpunosti" za i.f.s. (M,Ω). U kontekstu sa već datim, taj problem shvatićemo, kao problem potpunosti za par (M,J_Ω). Osnovni objekt naših istraživanja će biti i.f.s. $(P_N,\Omega(N_{CB}))$, gde je N_{CB} skup svih slobodnih mreža iz (E,P_A), a N skup svih nenegativnih celih brojeva.

3. Neka svojstva A-zatvaranja

Osobenosti rešenja problema potpunosti za i.f.s. (M,Ω) zavise kako od svojstva skupa M, tako i od klase operacija Ω. Označimo sa K_a^A i K^A redom klase svih algebarskih zatvaranja i automatskih zatvaranja na P_A. Važi sledeće tvrđenje

Teorema 3.1.[1] Klase K_a^A i K^A se podudaraju.

Ta teorema pokazuje da, neobazirući se na dojam da su operacije definisane mrežama dosta jednostavne, generisani njima operatori A-zatvaranja obrazuju tako moćnu klasu, kao što je klasa svih algebarskih zatvaranja. Samim tim, pri rešavanju problema izrazivosti i potpunosti za i.f.s. u punoj meri se pojavljuju svi ti problemi koji su prisutni i u slučaju algebarskih operatora zatvaranja.

Dopunsku karakteristiku računskih mogućnosti mreža daje i to kakve se funkcije iz P_A mogu "izračunati" uz pomoć slobodnih mreža, t.j. od kakvih funkcija se sastoji klasa $J_{\Omega(N_{CB})}(\Phi)$. Funkcija. $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ iz P_A je kvaziselektorna ako postoji takav konačan podskup $A_f\subseteq A$ i takvo i, $1\leq i\leq n$, da je za svaku nisku $(a_1,a_2,\ldots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\ldots,a_n)$ ispunjen barem jedan od sledećih uslova: $(a_1,a_2,\ldots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\ldots,a_n)\in A_f$ ili $(a_1,a_2,\ldots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\ldots,a_n)=a_i$. Ako funkcija f uzima pri tome beskonačno vrednosti, to se uočena promenljiva naziva indikatornom. Očito da kvaziselektorna funkcija nema fiše od jedne indikatorne promenljive. Skup A_f kvaziselektorne funkcije f se naziva njenim **sobstvenim skupom**. Klasu svih kvaziselektornih funkcija označimo sa M_{KC}. Nije teško videti, da pri $|A|<\aleph_0$, važi da je $P_A=M_{KC}$. Imamo sledeća tvrđenja.

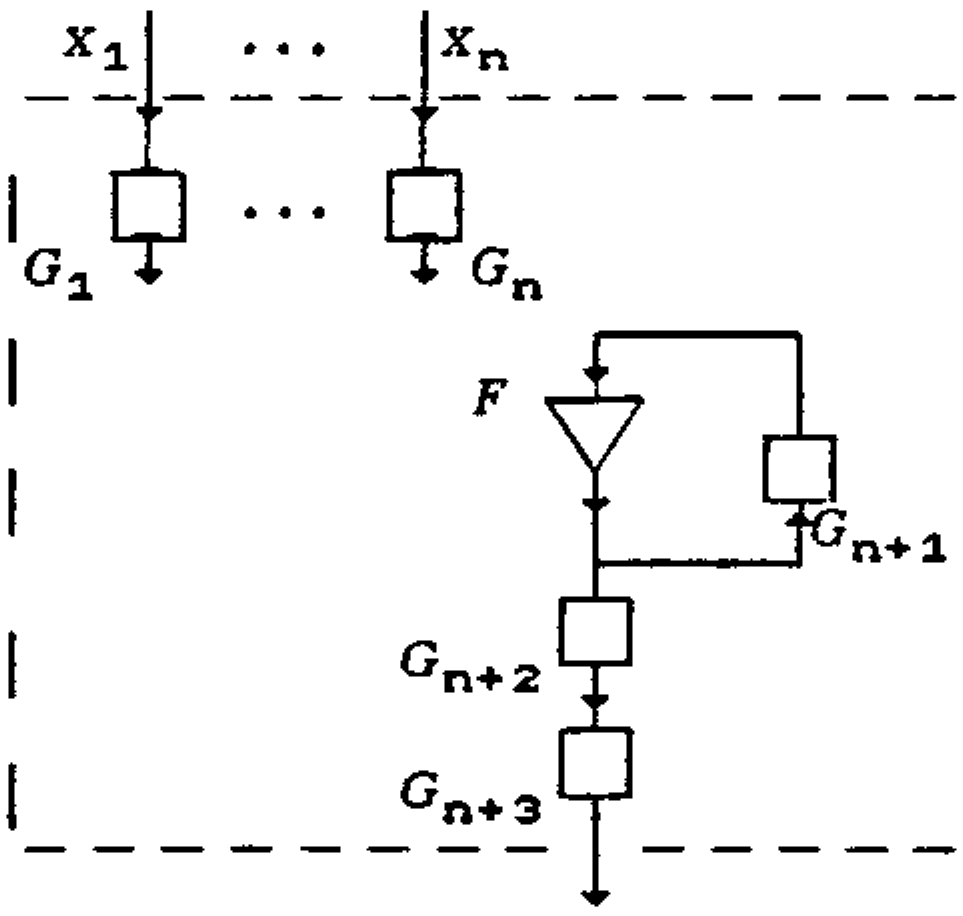
Teorema 3.2.[1] Klase $J_{\Omega(N_{CB})}(\Phi)$ i M_{KC} se podudaraju.

Posledica 3.1.[1] Jednakost $J_{\Omega(N_{CB})}(\Phi)=P_A$ važi tada i samo tada, kada je $|A|<\aleph_0$.

Dalje možemo pokazati da važi sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 3.1.[1] I f s. $(P_A,\Omega(N_{CB}))$ je konačno generisan.

Dokaz. Pokažimo da je $J(\{s\})=P_A$, gde je $s(x)=x+1$; odavde će slediti dato tvrđenje. Uzmimo mrežu S datu na sl.1. U njoj



Sl.1.

elementu F je dodeljena funkcija s. Neka je $f(x_1,\dots,x_n)\in P_A$ i funkcija f nije konstanta; pretpostavimo da su u S početna stanja izlaza elemenata G_{n+1}, G_{n+2} i G_{n+2} jednaka 0. Očigledno, postojaće niska $(a_1,\dots,a_n)$ takva da je $f(a_1,\dots,a_n)\neq 0$. Uzmimo da su početna stanja izlaza elemenata G_j, $j=1,2,\dots,n$, jednaka a_j. Izaberimo, kao skup Q za S, skup svih niski $(q_1,q_2,\dots,q_n,q_{n+1},q_{n+2},q_{n+3},q_{n+4})$, gde je q_i stanje izlaza elementa G_i, $i=1,2,\dots,n+3$, a q_{n+4} stanje izlaza elementa F, takvih da je $f(q_1,q_2,\dots,q_n)=q_{n+3}$. Nije teško videti, da mreža S izračunava funkciju f. Pošto saglasno sa teoremom 3.2. sve konstante leže u $J_{\Omega(N_{CB})}(\phi)$, to je $J_{\Omega(N_{CB})}(\{s\})=P_N$.□

Glava 2.

O rešetki zatvorenih klasa funkcionalnog sistema (P_N, Ω_{CB})

Kao što smo već rekli jedan od najvažnijih problema za funkcionalne sisteme je problem potpunosti. U vezi s tim, prije svega, nameće se problem nalaženja procedure koja bi po datom podskupu određivala da li je on potpun ili ne. Osobito je interesantan slučaj kada je ta procedura data preko kriterijalnog sistema. Nazovimo takve procedure κ-procedurama. Ako se ograničimo slučajem κ-procedura to za svaki funkcionalni sistem postoji barem takva trivijalna procedura: kao kriterijalni sistem možemo, prosto, uzeti sve zatvorene sopstvene podskupove datog f.s. S druge strane, jasno je, da ako zatvorenih podskupova ima više od prebrojivo mnogo da postojanje takve procedure s praktične tačke gledišta nije od nikakvog značaja pošto je ona neefektivna. Na sreću, ponekad, u nekim veoma važnim slučajevima (npr., slučaj konačno-značne logike), skup svih predpotpunih klasa je konačan i obrazuje kriterijalni sistem.

U vezi sa slučajem beskonačno-značne logike, osobito su interesantni rezultati dobijeni u [4]. U tom radu se posmatra funkcionalni sistem $(P_N, \Omega(\bar{N}_{CB}))$, gde je $\bar{N}_{CB}$ skup svih slobodnih mreža čije su odgovarajuće sheme dobijene bez primene operacije povratne sprege. Pokazuje se da i najbolja κ-procedura, ako ona postoji, nije bolja od trivijalne, t.j. u [4] se pokazuje da je moć skupa svih predpotpunih klasa te i.f.s. jednaka moći skupa svih zatvorenih skupova, jednaka hiperkontinumu. A kakav bi bio odgovor ako bi smo proširili skup $\Omega(\bar{N}_{CB})$, i, naprimer, ako bi smo posmatrali kao desnu stranu i.f.s. skup Ω_{CB} svih slobodnih operatora? Prirodno je za očekivati da se broj predpotpunih klasa u takvom f.s. smanjio. No, u ovoj glavi je pokazano da i u slučaju i.f.s. (P_N,Ω_{CB}) dobijamo isti takav odgovor, t.j. pokazuje se da je moć skupa predpotpunih klasa u (P_N,Ω_{CB}) jednaka hiperkontinumu. Takođe se istražuju neka svojstva rešetke svih zatvorenih skupova u (P_N,Ω_{CB}).

1. Osnovni pojmovi i rezultati

Objekt našeg izučavanja biće istinitosni funkcionalni sistem (P_N,Ω_{CB}), t.j. par (P_N,J_{CB}). Ovde je Ω_{CB} - skup svih slobodnih operacija, N - skup svih nenegativnih celih brojeva, a J_{CB} - operator A-zatvaranja $J_{\Omega_{CB}}$. U [1] je pokazano da je svaki i.f.s. (P_A,Ω_{CB}), između ostalog i (P_N,Ω_{CB}), konačno generisan i da se klase $J_{CB}(\phi)$ i M_{KC} poklapaju, gde je M_{KC} klasa svih kvaziselektornih funkcija. Na taj način, par (P_N,J_{CB}) je pravilan, t.j. kao kriterijalni sistem za par (P_N,J_{CB}) možemo uzeti klasu svih predpotpunih klasa. Naš cilj je dokaz sledeće dve teoreme.

<u>Teorema 1.1.</u> Par (P_N,J_{CB}) ima tačno $2^{\aleph_1}$ predpotpunih klasa.

Označimo sa L_θ rešetku klase θ svih zatvorenih skupova u (P_N,J_{CB}) u odnosu na relaciju podskup, a sa $h(L_\theta)(b(L_\theta))$ visinu (širinu) te rešetke. Tada važi sledeće tvrđenje.

Teorema 1.2. Za (P_N, J_{CB}) je ispunjeno:

a) $|M|=\aleph_1$ za svako $M\in\theta$.

b) $h(L_\theta)=b(L_\theta)=2^{\aleph_1}$.

v) Svako parcijalno uređenje $(L,\leq)$ takvo da je $|L|\leq\aleph_1$ možemo izomorfno utopiti u rešetku L_θ.

Pre nego što pristupimo dokazu ovih teorema dajmo definiciju nekih pojmova koji će nam trebati u daljem izlaganju.

Dat je par $(\mathfrak{M},J)$, gde je J algebarski operator zatvaranja nad skupom svih podskupova datog skupa $\mathfrak{M}$, i neka je $A,B\subseteq\mathfrak{M}$. Par (A,B) je **simetričan**, ako i samo ako:

1. postoji uzajamno jednoznačno preslikavanje F skupa A na skup B;

2. za svako $a\in A$, $J(\{a,F(a)\})=\mathfrak{M}$;

3. za svako $S\subseteq A$ važi $J(S\cup C_B(F(S)))\neq\mathfrak{M}$ (gde je $C_B(F(S))$ komplement skupa $F(S)$ u B).

Sa $P_N^{(1)}$ označimo skup svih funkcija od jedne promenljive iz P_N. Neka su f i g dve proizvoljne funkcije iz $P_N^{(1)}$. Kažemo da se one jako razlikuju ako postoji k, k$\in$N, takvo da je $f(x)\neq g(x)$, kada je $x>$k. Označimo takav minimalan broj k za date funkcije sa $r(f,g)$. Skup $R\subseteq P_N^{(1)}$ je regularan ako se za svako $f,g\in R$, f i g jako razlikuju. Za proizvoljne $f_1,\ldots,f_n\in R$ sa $r(f_1,\ldots,f_n)$ označimo minimalan broj za koji je $f_i(x)\neq f_j(x)$ ako je $x>r(f_1,\ldots,f_n)$; i$\neq$j; i,j=1,...,n. Očito da ovaj broj uvek postoji kada je R regularan skup.

Dalje će nama biti potrebna takozvana kantorovska numeracija svih parova prirodnih brojeva ([5]). Rasporedimo sve parove prirodnih brojeva u sledeći niz:

$$(0,0);(0,1),(1,0);(0,2)(1,1),(2,0);(0,3),\ldots$$

Sa $c(x,y)$ označimo redni broj para (x,y) u tom nizu. Lako se uveriti da je

$$c(x,y)=[(x+y)^2+3x+y]/2.$$

Broj $c(x,y)$ se naziva kantorovskim brojem para (x,y). Sa $l(n)$ i $r(n)$ označimo levi odnosno desni član para sa rednim brojem n.

Za proizvoljnu funkciju f označimo sa $\mathrm{Dom}(f)$ oblast definisanosti funkcije f, a sa $\mathrm{Ran}(f)$ - skup njenih vrednosti.

2. Dokaz teoreme 2.1.1

Pokažimo najpre tri pomoćna tvrđenja.

Lema 2.1. Neka je $(\mathfrak{M},J)$ konačno generisan par, gde je J algebarski operator zatvaranja; tada ako u $(\mathfrak{M},J)$ postoji simetričan par (A,B), to u $(\mathfrak{M},J)$ postoji ne manje od $2^{|A|}$ predpotpunih klasa.

Dokaz. Uzmimo proizvoljne $X_1,X_2\subseteq A$, $X_1\neq X_2$, i neka je $Y_1=C_B(F(X_1))$ i $Y_2=C_B(F(X_2))$. Iz definicije simetričnog para sledi da je $J(X_1\cup Y_1)\neq\mathfrak{M}$ i $J(X_2\cup Y_2)\neq\mathfrak{M}$. Pošto je $(\mathfrak{M},J)$ konačno generisan par i J algebarski operator zatvaranja, to je on pravilan i iz toga sledi da postoje predpotpune klase $\mathcal{M}_1$ i $\mathcal{M}_2$ takve da je $X_1\cup Y_1\subseteq\mathcal{M}_1$ i $X_2\cup Y_2\subseteq\mathcal{M}_2$. Pokažimo da je $\mathcal{M}_1\neq\mathcal{M}_2$. Predpostavimo suprotno, t.j. da je $\mathcal{M}_1=\mathcal{M}_2=\mathcal{M}$. Znači, $X_1\cup Y_1\cup X_2\cup Y_2\subseteq\mathcal{M}$. No, tada postoji $a\in X_1\cup X_2$, takvo da je $F(a)\in Y_1\cup Y_2$. Iz poslednjeg sledi da je $\mathfrak{M}=J(\{a,F(a)\})\subseteq\mathcal{M}$. Znači $\mathcal{M}$ ne može biti predpotpunom klasom i mi smo došli do kontradikcije, to jest $\mathcal{M}_1 \neq \mathcal{M}_2$. Odavde neposredno sledi da predpotpunih klasa ima barem toliko koliko i svih podskupova skupa A, što je i trebalo pokazati.

Lema 2.2. Postoji regularan podskup skupa $P_N^{(1)}$ čija je moć jednaka $\aleph_1$.

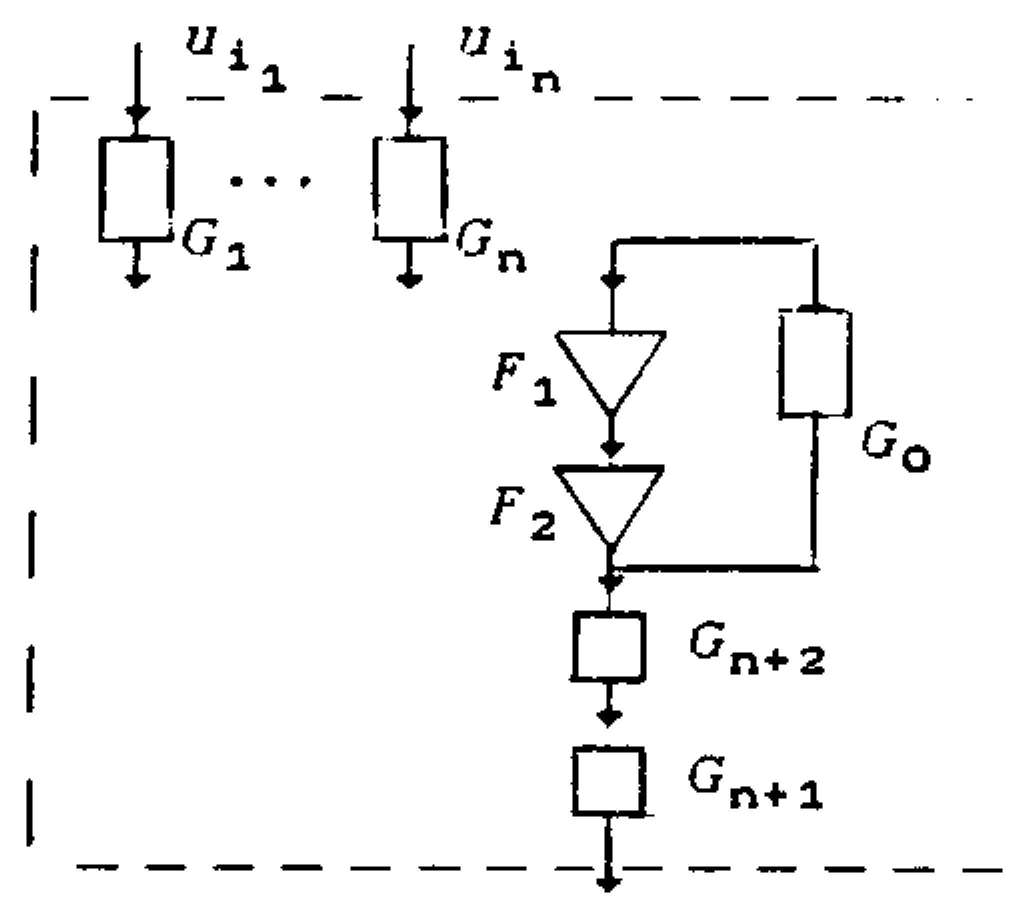
Dokaz. Uzmimo klasu svih podskupova skupa $P_N^{(1)}$, koji zadovoljavaju dati uslov i čija je moć $\geq\aleph_0$. Jasno je da je taj skup prazan. Uredimo elemente te klase saglasno relaciji "biti podskup". Iz leme Corna sledi da u dobijenom parcijalnom uređenju postoji barem jedan maksimalni element R. Pokažimo da je $|R|=\aleph_1$. Pretpostavimo da to ne važi, t.j. da elemente skupa R možemo poređati u niz $f_1, f_2, \ldots$ Pokažimo da postoji $f\notin R$, $f\in P_N^{(1)}$, za koju skup $R\cup\{f\}$ pripada uočenoj klasi. Neka je, $m_i=r(f_1, \ldots, f_i)$ ako je $i\geq 2$ i $m_1=-1$. Pretpostavljajući da je $f(x)=f_i(x)$ ako je $m_i<x\leq m_{i+1}$, $i=1,2,\ldots$, dobijamo traženu funkciju f. No, tada, R nije maksimalni element, i mi smo došli do kontradikcije. Znači, zaista je $|R|=\aleph_1$, što je i trebalo pokazati.$\square$

Sada svakoj funkciji $f\in P_N^{(1)}$ dodelimo funkciju $g_f\in P_N^{(1)}$ takvu da je $g_f(x)=c(x,f(x))$ za sve $x\in N$, i funkciju h_f za koju je

$$h_f(x) = \begin{cases} x'+1, & \text{ako je } x=c(x',f(x')); \\ 0 & \text{u protivnom slučaju.} \end{cases}$$

Lema 2.3. Za sve $f\in P_N^{(1)}$, $J_{CB}(\{g_f,h_f\})=P_N$.

Dokaz. Posmatrajmo mrežu sa sl. 2 za proizvoljnu funkciju $s(u_{i_1},\ldots,u_{i_n})\in P_N$, čiji su ulazi numerisani s leva na desno



SL.2

brojevima $i_1,\dots,i_n$. Pošto je $J_{CB}(\phi)=M_{KC}$, to možemo pretpostaviti da s nije konstanta, odakle sledi da postoji niska $(a_1,\dots,a_n)$, takva da je $s(a_1,\dots,a_n)\neq 0$. Kao početno stanje zadrške G_i, $1\leq i\leq n$, uzmimo broj a_i, a zadrški G_0, G_{n+1} i G_{n+2} - broj 0. Elementima F_1 i F_2 dodelimo redom funkcije g_f i h_f. Izaberimo, kao skup završnih stanja za datu mrežu, skup svih niski $(y_0,\dots,y_{n+2},z_1,z_2)$, gde je y_i, $1\leq i\leq n+2$, - stanje izlaza elementa G_i, a z_ℓ, $1\leq l\leq 2$, - stanje izlaza elementa F_ℓ, takvih da je $s(y_1,\dots,y_n)=y_{n+1}$. Nije teško videti, da data mreža izračunava s, a odavde neposredno sledi da je $J_{CB}(\{g_f,h_f\})=P_N$, što je i trebalo dokazati.□

<u>Dokaz teoreme 2.1.1.</u> Pošto je $|P_N|=\aleph_1$, to broj w predpotpunih klasa nije veći od $2^{\aleph_1}$. Pokažimo, takođe, da važi i $w\geq 2^{\aleph_1}$.

Uzmimo skup funkcija $R\subset P_N$ koji zadovoljava lemu 2.2.2. Posmatrajmo preslikavanje $F:A\to B$, $F(g_f)=h_f$, gde je $A=\{g_f|f\in R\}$ i $B=\{h_f|f\in R\}$. Saglasno sa lemom 2.1 dovoljno je pokazati da je par (A,B) simetričan. Iz leme 2.3 sledi da u suštini treba pokazati da treći uslov u definiciji za simetričan par važi za par (A,B). Da bi smo se uverili u to, dovoljno je pokazati da za sve $M_1\subseteq A$ i $M_2\subseteq B$ takve da je $F(M_1)\cap M_2=\phi$ važi $J_{CB}(M_1\cup M_2)\neq P_N$.

Za svako $g_f\in M_1$ i $k\geq 2$, $k\in N$, posmatrajmo skup

$$N_{f,k}=E_k\cup\{c(t,f(t))\}_{t=0}^{\infty}.$$

Neka je $P_{N,f}=\bigcup_{k=2}^{\infty} P_{N,f,k}$, gde je $P_{N,f,k}=\{f' \in P_N \mid \mathrm{Ran}(f')\subseteq N_{f,k}\}$. Označimo sa M_1^* skup $\bigcup_{g_f\in M_1} P_{N,f}$. Takođe za svako $h_f\in M_2$ posmatrajmo skup $T_{N,f,k}$ kojem pripadaju sve funkcije $f'(x_1,\dots,x_n)$ iz P_N za koje postoje i, $1\leq i\leq n$, i $t_{f'}\in N$ takvi da je $f'(x_1,x_2,\dots,x_n)\leq$ $\leq x_i$, ako je $x_i>t_{f'}$ i $x_i=c(t',f(t'))$ za neko $t'\in N$, a $f'(x_1,\dots$ $\dots,x_n)\in E_k$ u protivnom slučaju. U datom slučaju x_i nazovimo indikatornom promenljivom za f'. Jasno je, da funkcija f' može imati više od jedne indikatorne promenljive. Neka je $T_{N,f}=$ $=\bigcup_{k=2}^{\infty} T_{N,f,k}$ i $M_2^*=\bigcup_{h_f\in M_2} T_{N,f}$. Primetimo da je $M_1\subseteq M_1^*$ i $M_2\subseteq M_2^*$.

Uzmimo sada proizvoljnu slobodnu mrežu S i pokažimo da ona određuje operator σ, koji je zatvoren na skupu $M=M_{KC}\cup M_1^*\cup M_2^*$. Pokažimo da ako je σ definisan za tačku $(f'_1,\dots,f'_n)$, to funkcija $\lambda=\sigma(f'_1,\dots,f'_n)$ pripada skupu M za svako $f'_1,\dots,f'_n\in M$. Da bi smo to pokazali krećimo se po mreži S počev od njenog izlaza. Neka je E_1 prvi elemenat mreže S do kog dolazimo. Ako je taj elemenat zadrška to se krećemo dalje kroz ulaz tog elementa; ako je tom elementu pripisana kvaziselektorna funkcija koja ima indikatornu promenljivu ili funkcija iz M_2^*, to krećimo se dalje kroz ulaz tog elementa kome odgovara indikatorna promenljiva; u svim ostalim slučajevima se zaustavljamo. Ponavljajući tu proceduru mi na kraju krajeva u slučaju da se nismo zaustavili dolazimo do ulaza mreže ili do već uzetog elementa. Na taj način dolazimo do niza $e:E_1,E_2,\dots,E_r$, $r\geq 1$. Mogući su sledeći slučajevi:

a) Elementu E_r u S dodeljena je funkcija $g_f\in P_{N,f,k}$. No, tada elementi $E_i, 1\leq i\leq r-1$, su ili zadrške, ili su njima pripisane funkcije iz $M_{KC}\cup M_2^*$. Neka su $E_{i_1},\dots,E_{i_{n_1}}$, $1\le i_1<\dots<i_{n_1}\le r$, - sve zadrške u e, $E_{j_1},\dots,E_{j_{n_2}}$, $1\le j_1<\dots<j_{n_2}\le r$, - elementi iz e kojima su pripisane funkcije iz M_{KC}, a $E_{l_1},\dots,E_{l_{n_3}}$, $1\le l_1<\dots<l_{n_3}\le r$, - sve funkcije iz e kojima su pripisane funkcije iz M_2^*. Sa a_m označimo početna stanja zadrški E_{i_m}, $1\le m\le n_1$, sa f_{A_m} - funkciju iz M_{KC} dodeljenu elementu E_{j_m}, $1\le m\le n_2$, gde je A_m njen sopstveni skup i, napokon, sa h_{f_m}, $h_{f_m}\in T_{N,f_m,k_m}$, - funkciju iz M_2^* koja je dodeljena elementu E_{l_m}, $1\le m\le n_3$. Očito, da ako je $n_3\ne 0$, to je $f\ne f_i$ za svako $i, 1\le i\le n_3$. Neka je $l_1=\max\{0,a_1,\dots,a_{n_1}\}$ i $l_2=\max[(\bigcup_{i=1}^{n_2}A_i)\cup\{0\}]$. Moguća su dva slučaja.

1) $n_3=0$. Tada je jasno da je $\lambda\in P_{N,f,k'}$; $k'=\max\{l_1,l_2,k\}$.

2) $n_3>0$. Neka je $d=r(f,f_{n_3})$, $d_1=\max(\{c(t,f(t))\}_{t=1}^{d})$ i $l_3=\max\{l_1,l_2\}$. Označimo sa q i $p_i, 1\le i\le n_3$, redom brojeve $\max\{l_3,d_1,k\}$ i $\max\{l_3,k_{n_3-i+1}\}$, $1\le i\le n_3$, i uzmimo skup $V=E_{v_0}$, $v_0=\max\{q,p_1,\dots,p_{n_3}\}$. Tada je $\mathrm{Ran}(\lambda)\subset V$, i, znači, $\lambda\in M_{KC}$.

b) Elementu E_r i S pripisana je kvaziselektorna funkcija koja nema indikatornu promenljivu. Tada, kao i gore, možemo se uveriti da je $\lambda\in M_{KC}$.

v) Ulaz elementa E_r je ulaz mreže S. Koristićemo oznake kao u slučaju a). Pošto iz $n_3=0$ sledi, neposredno, da je $\lambda\in M_{KC}$, to možemo pretpostaviti da je $r_3>0$. Neka je $p_0=\max\limits_{1\le i\le n_3} p_i$. Tada je $\lambda\in T_{N,f_{n_3},p_0}\subseteq M_2^*$.

d) $E_{r+1}\equiv E_{i_0}$, za neko i_0, $1\le i_0\le r$. Tada je jasno da nijednom elementu iz e nije dodeljena funkcija iz skupa M_1^*. Neka je $w_0=\max\{k_1,\dots,k_{n_3},l_1,l_2\}$. Pokažimo da se na izlazu elementa E_1 ne može pojaviti broj veći od w_0. Pretpostavimo suprotno, t.j.

da se na izlazu pojavio broj $y_0 > w_0$. No tada ili u tom ili u prošlom momentu na izlazu elementa E_2 se morao pojaviti broj y_1, takav da je $y_1 \geq y_0$. Nastavljajući na takav način, mi ćemo dobiti rastući niz $y_0, y_1, \ldots$ (posle elementa E_r ponovo posmatramo elemenat E_{i_0}). No pošto je $l_1 < y_i$, $i=0,1,2,\ldots$, to dolazimo do kontradikcije. Znači, $\lambda \in M_{KC}$.

Napokon, primetimo da funkcija $f(x)=x+1$, $x \in V$, ne pripada skupu M. Odavde sledi da je $J_{CB}(M_1 \cup M_2) \subseteq J_{CB}(M)=M \neq P_N$, što je i trebalo pokazati.□

3. Dokaz teoreme 2.1.2

Dokaz teoreme 2.1.2. Tvrđenje a) sledi iz toga da svaki zatvoren skup sadrži kao podskup skup $J_{CB}(\Phi)=M$, a $|M_{KC}|=C$.

Proverimo svojstvo b). Jasno je da je $h(L_\theta), b(L_\theta) \leq 2^{\aleph_1}$. Nejednakost $b(L_\theta) \geq 2^{\aleph_1}$ sledi iz toga da je broj w predpotpunih klasa u (P_N, J_{CB}) jednak $2^{\aleph_1}$. Ostaje nam da pokažemo još da je $h(L_\theta) \geq 2^{\aleph_1}$. Posmatrajmo klasu A iz dokaza teoreme 1.1 i uzmimo proizvoljne skupove $M_1, M_2 \subseteq A$, $M_1 \neq M_2$. Pokažimo da je $J_{CB}(M_1) \neq J_{CB}(M_2)$. Pretpostavimo suprotno, t.j. da je $J_{CB}(M_1)=J_{CB}(M_2)=M \neq P_N$. Pošto važi $M_1 \neq M_2$, možemo pretpostaviti, naprimer, da postoji $f \in R$ takvo da je $g_f \in M_2 \setminus M_1$. Iz $g_f \in M_2 \subseteq J_{CB}(M_2)$ sledi da je $g_f \in J(M_1)$. No, pošto je $J_{CB}(M_1 \cup \{h_f\}) \neq P_N$, a iz leme 2.3 i iz $g_f \in J(M_1)$ sledi da je $P_N = J_{CB}(\{g_f, h_f\}) \subseteq J_{CB}(M_1 \cup \{h_f\})$, to dolazimo do kontradikcije. Znači, zaista je $J_{CB}(M_1) \neq J_{CB}(M_2)$. Dalje, ako je $M_1 \subseteq M_2$ $(M_2 \subseteq M_1)$, to je jasno da je $J_{CB}(M_1) \subseteq J_{CB}(M_2)$ $(J_{CB}(M_2) \subseteq$

$\subseteq J_{CB}(M_1))$. Sada uzmimo skup Q_1 svih funkcija oblika $f:W\to[0,1]$, gde je W potpuno uređen skup, koji ima ordinalni broj ω_1, t.j. $|W|=\aleph_1$, i izdvojmo podskup Q_2 skupa Q_1, koji je određen svim funkcijama f za koje postoji $x_0\in W$ takvo da je $f(x)=0$ pri $x>x_0$. Skupovi A i Q_2 su ravnomoćni. Dodeljujući elementima skupa A elemente skupa Q_2, kao u tvrđenju 4.1.4 iz [1] možemo pokazati da je $h((2^A,\subseteq))\geq 2^{\aleph_1}$, a odavde da je $h(L_\theta)\geq 2^{\aleph_1}$.

Pokažimo, napokon, tačnost tvrđenja v). Kao i gore, možemo pokazati da ako su M_1 i M_2 neuporedljivi, t.j. $M_1 \| M_2$, to je takođe $J_{CB}(M_1)\| J_{CB}(M_2)$. Iz toga i gore dokazanog sledi da korespodencija $M\to J_{CB}(M), M\subseteq A$, određuje izomorfno potapanje rešetke $(2^A,\subseteq)$ u rešetku L_θ. No, pošto je $|A|=\aleph_1$ to neposredno odavde sledi da je tvrđenje v) zadovoljeno.□

<u>Napomena 3.1.</u> Pri dokazu teoreme 1.2 mi smo pretpostavili da je kontinum-hipoteza tačna.

<u>Napomena 3.2.</u> Možemo lako pokazati da ako uzmemo potpuno uređen skup L, koji ima ordinalan broj ω_2, t.j. $|L|=2^{\aleph_1}$, to se to uređenje već ne može potopiti u L_θ. Na taj način sledi da tvrđenje v) teoreme 1.2 nije moguće poboljšati.

Glava 3.

Bazisi funkcionalnog sistema (P_N, Ω_{CB})

Pokazujemo da svi kriterijalni sistemi u (P_N, Ω_{CB}), koji raspoznaju "šeferovost" svake funkcije iz P_N imaju moć jednaku kontinumu. Ne obazirući se na to što problem postojanja minimalnog takvog sistema ostaje otkriven, možemo reći da ako takav sistem postoji to procedura raspoznavanja šeferovosti svake funkcije iz P_N bi bila neefektivna. Zatim opisujemo klasu svih Šeferovih funkcija jedne promenljive i pokazujemo da u (P_N, J_{CB}) za svaki prirodan broj k postoji kontinum različitih baza moći k.

1. Osnovni pojmovi i rezultati

Neka je f proizvoljna funkcija iz P_N, koja nije funkcija Šefera, i neka je Σ_f proizvoljna predpotpuna klasa u (P_N, J_{CB}) koja sadrži tu funkciju. Tada sistem $\Sigma_{\text{Š}} = \{\Sigma_f \mid f \in P_N, J_{CB}(\cdot\{f\}) \neq P_N\}$ raspoznaje "šeferovost" svake funkcije iz P_N, t.j. $P_N \backslash \cup \Sigma_{\text{Š}}$ je skup svih Šeferovih funkcija u (P_N, J_{CB}). Iz teoreme 1.1 sledi da i.f.s. (P_N, Ω_{CB}) ima ne manje od hiperkontinum tih sistema. Očito da svako $\Sigma_{\text{Š}}$ ima moć ne veću od kontinum. Zapravo važi sledeća teorema.

Teorema 1.1. Moć svakog $\Sigma_{\check{S}}$ u (P_N, J_{CB}) je jednak $\aleph_1$.

Nadalje će nam trebati neke definicije i pojmovi teorije grafova ([6]). Pod **multigrafom** se podrazumeva par $G=(X,\Gamma)$, gde je X - skup čvorova ,a mnogoznačno preslikavanje $\Gamma: X \to X$ određuje skup orjentisanih grana multigrafa G. Uvedimo na G kvaziuređenje $\leq$ na sledeći način; za dva čvora x i y pišemo $x \leq y$, ako je $x=y$ ili postoji put iz x u y. Sa $\hat{\Gamma}x$ označimo skup $\{y \in X \mid x \leq y\}$, a sa $\hat{\Gamma}(V)$, $V \subseteq X$, skup $\bigcup_{x \in V} \hat{\Gamma}x$. Skup $B \subseteq X$ je **baza multigrafa** $G=(X,\Gamma)$, ako on zadovoljava sledeće uslove:

1) $b_1 \in B, b_2 \in B, b_1 \neq b_2 \to$ nije $b_1 \leq b_2$, niti je $b_2 \leq b_1$ $(b_1 \| b_2)$;

2) $x \notin B \to$ postoji takav čvor $b \in B$, da je $x \leq b$.

Važi sledeće tvrđenje

Teorema 1.2. Funkcija $f \in P_N^{(1)}$ je funkcija Šefera u (P_N, J_{CB}) ako i samo ako multigraf (N, f^{-1}) ima konačnu bazu.

Multigraf $G=(X,\Gamma)$ je **induktivan** ako svaki njegov put $\pi=[x_1, x_2, \ldots]$ dopušta majorantu, t.j. ako za svaki put π postoji čvor z, takav, da je $x_n \leq z$, n=1,2,...; **Γ-ograničen** je ako postoji takav ceo broj m, da je $|\Gamma x| \leq m$ za svako $x \in X$; **progresivno ograničen** ako za svako $x \in X$ postoji takav ceo broj $m(x)$, da dužina svakog puta koji počinje u x nije veća od $m(x)$. Možemo pokazati da ako multigraf G ima konačnu bazu B, to je on induktivan. Iz teoreme 1.2 sledi tačnost sledećeg tvrđenja.

Tvrđenje 1.1. Za svaku funkciju f Šefera jedne promenljive u (P_N, J_{CB}) multigraf (N, f^{-1}) je induktivan, Γ-ograničen i progresivno ograničen.

Takođe pokažimo tačnost sledeće teoreme.

Teorema 1.3. Za proizvoljan prirodni broj k postoji u

(P_N, J_{CB}) kontinum različitih baza moći k.

Neka je A proizvoljan podskup skupa N. U daljem izlaganju sa $P_{N,A}$ označavaćemo skup $\{f \in P_N | \mathrm{Ran}(f) \subseteq A\}$.

Neka je S proizvoljna logička mreža, i neka se u njoj u momentu t na izlazu pojavio broj y_0. Posmatrajmo niz $e:E_1,\dots$ $\dots,E_r$, $r \geq 1$, elemenata mreže S takav da je izlaz elementa E_1 u isto vreme i izlaz od S i da je izlaz elementa E_{i+1} slepljen sa nekim od ulaza elementa E_i za svako i, $1 \leq i \leq r-1$. U momentu t ili momentu t-1 (a to zavisi od toga da li je elemenat E_1 zadrška ili ne) stanja ulaza elementa E_1 određuju izlaz y_0 od E_1. Uzmimo ulaz od E_1 koji je slepljen sa izlazom elementa E_2, i neka je njegovo stanje u tom momentu - y_1. Nadalje, postupajući, kao gore, sa elementom E_2, dobijamo broj y_2 i.t.d. Zaustavljamo se kad dobijemo broj y_{r-1}. Dobijeni niz $y_0, y_1, \dots, y_{r-1}$ se zove predistorija izlaza y_0 mreže S u odnosu na dati niz e njenih elemenata. Ako je jedan od ulaza elementa E_r ulaz mreže S, to uzimajući taj ulaz, kao i gore, možemo dobiti još i broj y_r. Takođe ako je za neko r', $1 \leq r' < r$, $E_r \equiv E_{r'}$, to posle elementa E_r možemo posmatrati ponovo elemenat $E_{r'+1}$. U poslednjem slučaju taj proces se mora zaustaviti zato što poslednji član dobijenog niza $\pi: y_0, y_1, \dots, y_{r_1}$, $r \leq r_1$, odgovara početnom momentu funkcionisanja mreže S. I u prvom i u drugom slučaju dobijeni niz π se naziva potpunom predistorijom izlaza y_0 u odnosu na niz e elemenata mreže S.

2. Dokaz teoreme 3.1.1 .

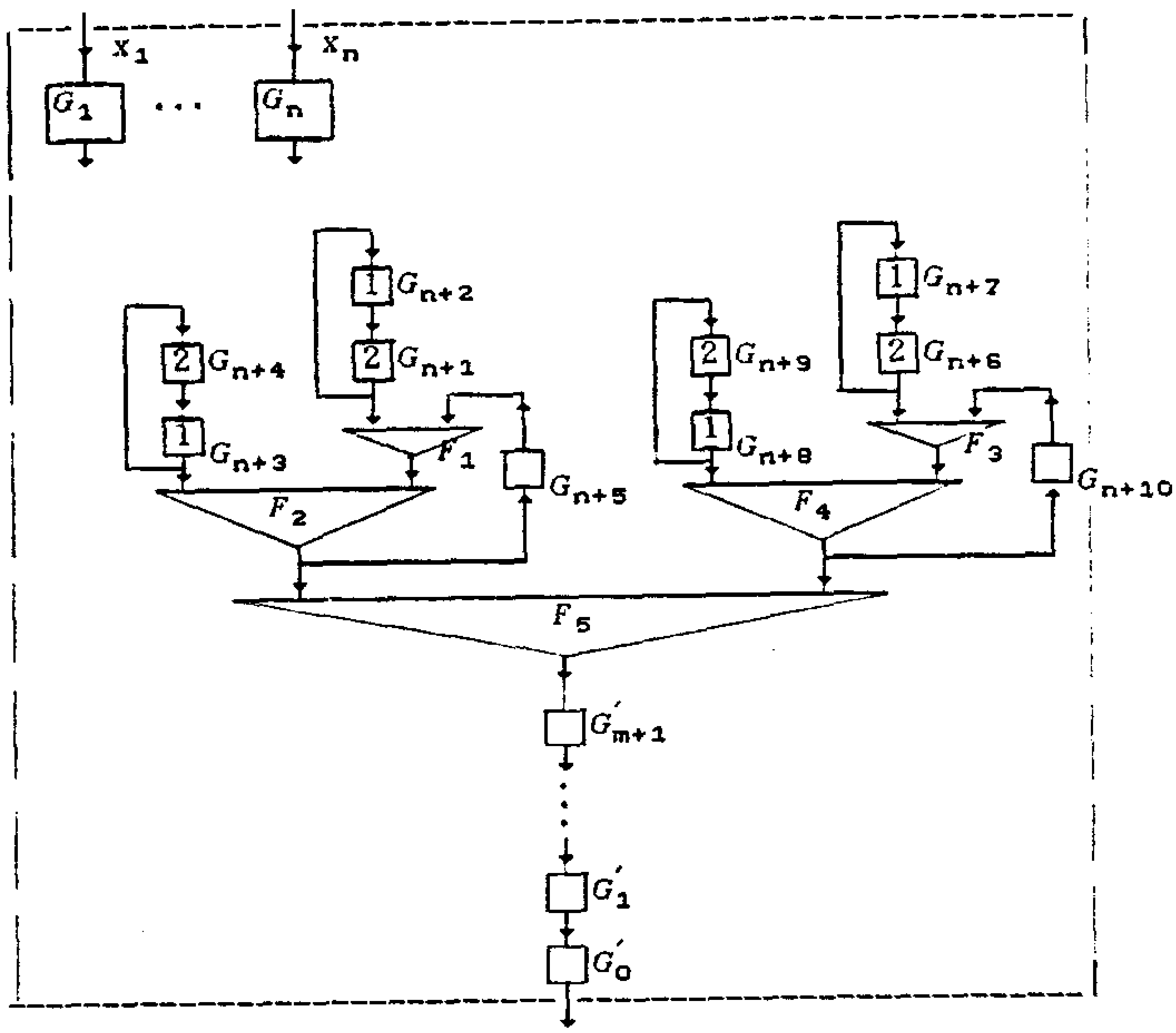
Za proizvoljnu funkciju f iz $P_N^{(1)}$ posmatrajmo funkciju

$$\lambda_f(x,y) = \begin{cases} c(t+1,f(t+1)), & \text{ako je } x=1 \text{ i } y=c(t,\overline{f(t)}); \\ c(t,f(t)) & , \text{ako je } x=2 \text{ i } y=c(t,\overline{f(t)}); \\ t, & \text{ako je } x=y \text{ i } y=c(t,f(t)); \\ 0 & \text{za ostale } x \text{ i } y; \end{cases}$$

gde je sa $\overline{f(t)}$ označen proizvoljan broj različit od $f(t)$.

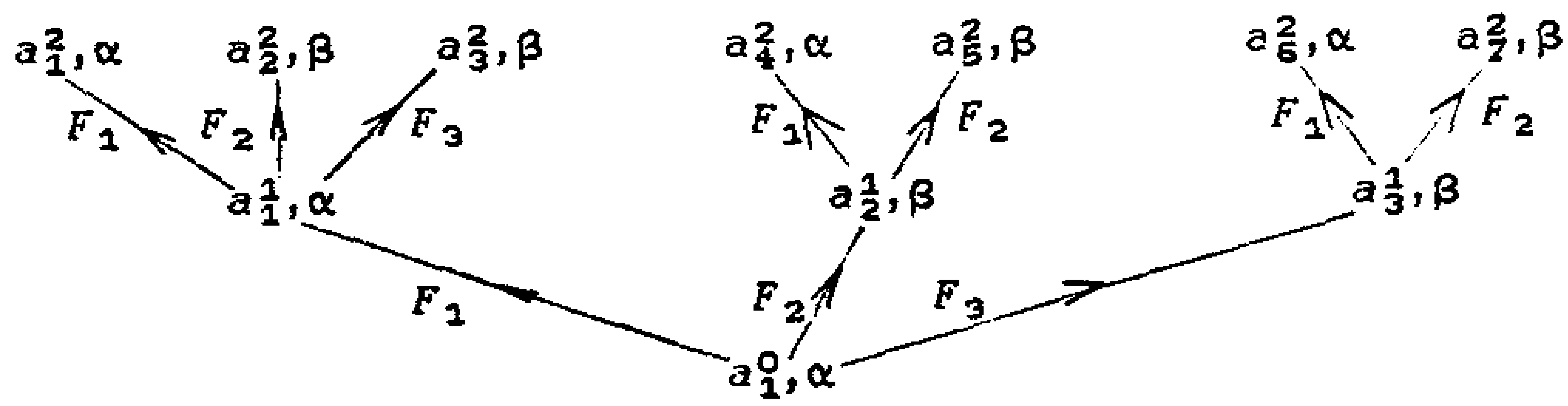
Lema 2.1. Ako su f_1 i f_2 jako različiti, $f_1,f_2 \in P_N^{(1)}$, to je $J_{CB}(\{\lambda_{f_1},\lambda_{f_2}\})=P_N$.

Dokaz. Posmatrajmo mrežu S datu na sl.3. Neka je $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in P_N$. Pošto sve konstante leže u $J_{CB}(\Phi)$, to možemo pretpostaviti da f nije konstanta i da postoji niska $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ takva da je $f(a_1,a_2,\ldots,a_n)\neq 0$. Uzmimo da je početno stanje izlaza elementa G_j, j=1,2,...,n, broj a_j, a kao početno stanje zadrški G_{n+2}, G_{n+7}, G_{n+3} i G_{n+8} uzmimo broj 1,a zadrški G_{n+1}, G_{n+6}, G_{n+4} i G_{n+9} - broj 2. Elementima F_1 i F_2 pripišimo funkciju λ_{f_1}, a elementima F_2, F_4 i F_5 funkciju λ_{f_2}. Pošto se f_1 i f_2 jako razlikuju, to se može naći konačan broj m takav da je $m>r(f_1,f_2)$. Kao početno stanje zadrške G'_i, $1\leq i\leq m+1$, uzmimo broj i-1, zadrške G'_0 - broj 0, a zadrški G_{n+5} i G_{n+10} - broj $c(m,f_2(m))$. Kao skup završnih stanja za mrežu S uzmimo skup svih niski $(y_1,\ldots,y_{n+10},z_0,\ldots,z_{m+1}, w_1,\ldots,w_5)$, gde je y_i, $1\leq i\leq n+10$, - stanje izlaza elementa G_i, z_j, $1\leq j\leq m+1$, - stanje izlaza elementa G'_j, a w_ℓ, $1\leq \ell\leq 5$, - stanje izlaza elementa F_ℓ, takvih da je $f(y_1,y_2,\ldots,y_n)=z_0$. Nije teško videti, da mreža S izračunava funkciju f, a odavde, neposredno, sledi da je $J_{CB}(\{\lambda_{f_1},\lambda_{f_2}\})=P_N$, što je i trebalo pokazati.□



x_1
x_n
G_1
...
G_n
1 G_{n+2}
2 G_{n+4}
2 G_{n+1}
1 G_{n+3}
F_1
G_{n+5}
F_2
1 G_{n+7}
2 G_{n+9}
2 G_{n+6}
1 G_{n+8}
F_3
G_{n+10}
F_4
F_5
G'_{m+1}
G'_1
G'_0

Sl.3.



a_1^2,α
a_2^2,β
a_3^2,β
a_4^2,α
a_5^2,β
a_6^2,α
a_7^2,β
F_1
F_2
F_3
F_1
F_2
F_1
F_2
a_1^1,α
a_2^1,β
a_3^1,β
F_1
F_2
F_3
a_1^0,α

Sl.4.

Neka je f proizvoljna funkcija iz $P_N^{(1)}$. Označimo sa Ψ_1, Ψ_2 i Ψ_3 sledeća preslikavanja skupa N u skup 2^N:

$\Psi_1(x)=\{c(x',f(x')),x'\geq x\}$,

$\Psi_2(x)=\{c(x',y')\,|\,x'\geq\max\{0,x-1\}$ i $y'\neq f(x')\}$

i

$$\Psi_3(x)=\begin{cases}\{c(\bar{x},\bar{y})\,|\,\bar{x}\geq\max\{0,l(x)-1\} \text{ i } \bar{y}\neq f(\bar{x})\}, & \text{ako je } r(x)=f(l(x));\\ \phi & \text{u protivnom slučaju.}\end{cases}$$

Kaže se da je x, $x\in N$, oznaka tipa α, ako je $x=c(t,f(t))$ za neko $t\in N$, u protivnom x je tipa β. Uzmimo proizvoljan broj a_1^0 i konstruišimo beskonačno drvo kod koga na 0-om nivou leži samo jedan čvor sa oznakom a_1^0 na sledeći način. Neka su čvorovi i-tog nivoa označeni brojevima a_j^i, $1\leq j\leq m_i$. Posmatrajmo proizvoljan od njih čvor p_{j_0} i neka je on označen brojem $a_{j_0}^i$, $1\leq j_0\leq m_i$. Tada ako je $a_{j_0}^i$ tipa α, to na i+1-om nivou pravimo čvorove $q_{j_0}^1$, $q_{j_0}^2$ i $q_{j_0}^3$, kojima pripisujemo redom oznake $a_{j_0}^{(1)}$, $a_{j_0}^{(2)}$ i $a_{j_0}^{(3)}$ takve da je $a_{j_0}^{(1)}\in\Psi_1(a_{j_0}^i)$, $a_{j_0}^{(2)}\in\Psi_2(a_{j_0}^i)$ i $a_{j_0}^{(3)}\in\Psi_3(a_{j_0}^i)$ i povezujemo ih orjentisanim granama sa čvorom p_{j_0} (p_{j_0} je početni čvor tih grana), koje označavamo redom sa slovima Ψ_1, Ψ_2 i Ψ_3. Ako je $a_{j_0}^i$ tipa β, to postupamo kao gore, ne uzimajući u obzir samo čvor $q_{j_0}^3$. Uradivši taj postupak za sve čvorove i-tog nivoa mi dobijamo i+1-vi nivo kod koga su čvorovi označeni, posle preimenovanja, brojevima $a^{i+1},\ldots,a_{m_{i+1}}^{i+1}$(sl.4). Očito da drvo koje se može dobiti na ovaj način nije jedinstveno, t.j. broj a_1^0 određuje beskonačnu klasu drveta $L_f(a_1^0)$.

Lema 2.2. Neka je $L\in L_f(a_1^0)$, gde je a_1^0, $a_1^0\geq 2$, proizvoljan broj tipa β i neka su a_j^i, $1\leq j\leq m_i$, oznake čvorova njegovog i-tog nivoa; $i=0,1,2,\ldots$; $m_0=1$. Tada je $a_1^0-1\leq l(a_j^i)$ ako je a_j^i tipa β, t.j. $a_1^0 \leq l(a_j^i)$ ako je a_j^i tipa α; specijalno je $a_1^0 \leq a_j^i$ za sve i,j; $i=1,2,\ldots$; $1 \leq j \leq m_i$.

Dokaz. Primetimo najpre da u drvetu L ne postoje susedne grane označene sa Ψ_3. Jasno je, da za sve čvorove prvog nivoa u L tvrđenje leme važi. Pretpostavimo da je tvrđenje leme tačno za sve a_j^i, gde je $i \leq k$, i pokažimo da je u tom slučaju tačno i za sve čvorove $k+1$-og nivoa. Uzmimo proizvoljano a_j^{k+1} i pretpostavimo da je a_j^{k+1} tipa β. Tada postoji $a_{j'}^{k}$ takvo da je ili $a_j^{k+1} \in \Psi_2(a_{j'}^{k})$, ili $a_j^{k+1} \in \Psi_3(a_{j'}^{k})$. Znači:

a) $a_j^{k+1} \in \Psi_2(a_{j'}^{k})$. No tada je $a_j^{k+1} = c(a,b)$ za neko b, $b \neq f(a)$, i a, $a \geq a_{j'}^{k} - 1$. Iz induktivne hipoteze i iz toga da je $a_{j'}^{k} - 1 \geq$ $\geq l(a_{j'}^{k})$, sledi da je $l(a_j^{k+1}) = a \geq l(a_{j'}^{k}) \geq a_1^0 - 1$.

b) $a_j^{k+1} \in \Psi_3(a_{j'}^{k})$. Tada je $a_{j'}^{k} = c(t, f(t))$ za neko $t \in V$ i pri tome postoji $a_{j''}^{k-1}$ takvo da je $a_{j'}^{k} \in \Psi_1(a_{j''}^{k-1})$, odakle sledi da je $t \geq a_{j''}^{k-1}$. Takođe je $l(a_j^{k+1}) \geq t-1$, t.j. $l(a_j^{k+1}) \geq a_{j''}^{k-1} - 1$. Ako je $k=1$, to očito dobijamo traženo, a ako je $k>1$, to tvrđenje leme sledi iz induktivne hipoteze, t.j. $l(a_j^{k+1}) \geq a_{j''}^{k-1} - 1 \geq a_1^0 - 1$.

Predpostavimo sada da je a_j^{k+1} tipa α. Tada postoji $a_{j'}^{k}$ takvo da je $a_j^{k+1} \in \Psi_1(a_{j'}^{k})$, odakle je $l(a_j^{k+1}) \geq a_{j'}^{k}$. No, kako je $a_{j'}^{k} \geq a_1^0$, to je $l(a_j^{k+1}) \geq a_1^0$, što je i trebalo dokazati. $\square$

Lema 2.3. Neka je $L \in L_f(a_1^0)$, gde je a_1^0 proizvoljan broj ≥ 3 tipa α, i neka su a_j^i, $1 \leq j \leq m_i$, oznake čvorova njenog i-tog nivoa; $i=0, 1, \ldots$; $m_0=1$. Tada je $l(a_1^0) - 1 \leq l(a_j^i)$, ako je a_j^i tipa β, t.j. $l(a_1^0) \leq l(a_j^i)$, ako je a_j^i tipa α; $i=0,1,\ldots$; $1 \leq j \leq m_i$.

Dokaz. Uzmimo proizvoljan čvor a_j^i drveta L. Pretpostavimo da se do a_j^i može doći od korena drveta L samo preko grana označenih sa Ψ_1. No iz toga kako mi pravimo drva iz $L_f(a_1^0)$ i iz

$l(a)\leq a$, $a\in N$, sledi da je $l(a_1^0)\leq l(a_j^i)$. Pretpostavimo sada, da se do a_j^i može doći preko grana grafa koje su označene tako da je samo poslednja od njih označena ili sa Ψ_2 ili sa Ψ_3. Neka je čvor $a_{j_1}^{i-1}$ početak te grane. Iz gore pokazanog imamo da je $l(a_1^0)\leq l(a_{j_1}^{i-1})$. No pošto za proizvoljno $a'\in\Psi_2(a)\cup\Psi_3(a)$ važi $l(a')>l(a)-1$, to je $l(a_1^0)-1\leq l(a_j^i)$. Napokon, pretpostavimo da se do a_j^i može doći preko čvorova sa oznakama koje nisu sve tipa α. Označimo prvi takav čvor sa $a_{j_2}^{i_2}$ i neka je $a_{j_3}^{i_2-1}$ početak grane za koju je kraj u čvoru $a_{j_2}^{i_2}$. Iz $l(a_{j_3}^{i_2-1})\geq a_1^0\geq 3$ i $l(a_{j_2}^{i_2})\geq$ $\geq l(a_{j_3}^{i_2-1})-1$ sledi, da je $a_{j_2}^{i_2}\geq l(a_{j_3}^{i_2-1})+1$. No, pošto je $a_{j_2}^{i_2}$ tipa β, to iz leme 2.2 sledi da je $l(a_j^i)\geq a_{j_2}^{i_2}-1$. Znači, $l(a_j^i)\geq$ $\geq l(a_{j_3}^{i_2-1})\geq l(a_1^0)$. Odavde neposredno sledi tvrđenje date leme.□

<u>Lema 3.2.4.</u> $J_{CB}(\{\lambda_f\})\neq P_N$ za svaku funkciju f iz P_N.

<u>Dokaz.</u> Posmatrajmo sve moguće funkcije $h(x_1,\dots,x_{n(h)})\in P_N$ za koje postoje i, $1\leq i\leq n(h)$, i k, $k\in N$, takvi, da ako je $l[h(x)]\geq 3$, to ili je $h(x)\leq k$, ili $l[h(x)]-1\leq l(x_i)$; ovde je $x=(x_1,\dots,x_{n(h)})$Označimo skup svih takvih funkcija sa H. Neka je dalje, $T_k=N\setminus\{c(x,y),x>k\}$, $k\in N$, i $W=\bigcup_{k=0} P_{N,T_k}$. Označimo sa M skup $M_{KC}\cup W\cup H$. Jasno je da je $M\neq P_N$. Ako pokažemo da je $J_{CB}(\{\lambda_f\})\subseteq M$, to će odatle neposredno slediti tvrđenje date leme.

Odredimo niz skupova $X_1,X_2,\dots$ na sledeći način. Nazovimo promenljivu y funkcije λ_f indikatornom promenljivom za λ_f. Neka je $X_1=\{\lambda_f\}$ i pretpostavimo da je skup X_i već izračunat. Uzmimo proizvoljnu slobodnu mrežu S. Dodelimo svim slobodnim elementima mreže S funkciju iz $X_i\cup M_{KC}$ i označimo dobijenu logičku mrežu sa S'. Izdvojimo u mreži S' neki njen deo na sledeći način.

Kretaćemo se po mreži S' počev od njenog izlaza u suprotnom pravcu od odgovarajuće izlazne strelice. Neka je E_1 prvi elemenat do koga dolazimo. Ako je E_1 zadrška, to prolazeći kroz nju idemo dalje po njenom ulazu, a ako je tom elementu pripisana funkcija iz $M_{KC} \cup X_i$, to se krećemo dalje po njegovom ulazu koji odgovara njegovoj indikatornoj promenljivoj (ako takav ulaz postoji). Ponavljajući tu proceduru mi na kraju krajeva dolazimo ili do ulaza mreže S' ili do već posmatranog elementa ili do elementa kojem je dodeljena funkcija iz M_{KC} koja nema indikatornu promenljivu. Na taj način mi dolazimo do niza elemenata $e:E_1,\ldots,E_r$, $r\geq 1$. Aka smo došli do ulaza mreže S' nazovimo taj ulaz indikatornim. Sve takve funkcije koje izračunavaju takve mreže S' daju skup X_{i+1}. Neka je $X=\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$.

Posmatrajmo ponovo proizvoljnu slobodnu mrežu S nad skupom $V=M_{KC}\cup W\cup X$. Izdvojimo neki deo od S na način koji je analogan gore opisanom. Neka je E_1, kao i gore, prvi elemenat do koga dolazimo. Ako je E_1 zadrška, to prolazeći kroz nju krećemo se dalje po njenom ulazu, a ako je tom elementu pripisana funkcija iz M_{KC} ili iz X, to se krećemo po ulazu koji odgovara indikatornoj promenljivoj (ako postoji); u svim ostalim slučajevima se zaustavljamo. Kao i gore, dobijamo niz elemenata $e:E_1,\ldots,E_r,r\geq 1$ date mreže. Neka su $E_{i_1},\ldots,E_{i_{n_1}}$, $1\leq i_1<\ldots<i_{n_1}\leq r$, - sve zadrške u e, $E_{j_1},\ldots,E_{j_{n_2}}$, $1\leq j_1<\ldots<j_{n_2}\leq r$, - svi elementi iz e kojima su pripisane funkcije iz M_{KC}, a $E_{l_1},\ldots,E_{l_{n_3}}$, $1\leq l_1<\ldots<l_{n_3}\leq r$, - svi elementi iz e kojima su dodeljene funkcije iz X. Sa a_m označimo početno stanje zadrške E_{i_m}, $1\leq m\leq n_1$, sa f_m - funkciju iz M_{KC} koja je dodeljena elementu E_{j_m}, $1\leq m\leq n_2$, sa A_m -

sopstveni skup funkcije f_m, $1 \le m \le n_2$, i, napokon, sa g_m - funkciju iz X koja je dodeljena elementu E_{ℓ_m}, $1 \le m \le n_3$. Dalje, sa S_m označimo mrežu koja izračunava funkciju g_m, $1 \le m \le n_3$, i neka je

$$m_k = \max \{ l(\{a_s^k\}_{s=1}^{n_1^k} \cup (\bigcup_{s=1}^{n_2^k} A_s^k))\},$$

gde su a_s^k, $1 \le s \le n_1^k$, početna stanja svih zadrški iz S_k, $1 \le k \le n_3$, a A_s^k, $1 \le s \le n_2^k$, sopstveni skupovi svih funkcija iz M_{KC} koje su dodeljene elementima iz S_k. Mogući su sledeći slučajevi.

a) $n_3 = 0$ i $f_{E_r} \notin W$. Tada je $\delta \in M_{KC} \subset V$, gde je δ funkcija izračunata mrežom S.

b) Elementu E_r je dodeljena funkcija iz W. Pretpostavimo najpre, da je $n_3 = 0$. Neka je $m_0 = \max\{m, k_0\}$, gde je

$$m = \max \{ l((\bigcup_{i=1}^{n_2} A_i) \cup \{a_i\}_{i=1}^{r} \}.$$

Ovde je k_0 takav broj za koji je $f_{E_r} \in P_{N,T_{k_0}}$ (f_{E_r} - funkcija dodeljena elementu E_r). Tada očito da je $\delta \in P_{N,T_{m_0}} \subset W$. Sada posmatrajmo slučaj kada je $n_3 > 0$. Uzmimo broj $m_0' = \max(\{m_i\}_{i=1}^{n_3})$ i pretpostavimo da se na izlazu mreže S pojavio broj y_0, $y_0 \ge 3$, takav da je $l(y_0) > m_0' + 1$. Iz toga kako smo izabrali y_0 sledi da su sve moguće predistorije tog izlaza u odnosu na e opisane nekim podskupom skupa svih prostih puteva drva klase $L_f(y_0)$ sa početcima u njihovim korenima. Očito da ovde možemo misaono zamenjivati elemente kojima su dodeljene funkcije iz X logičkim mrežama koje ih izračunavaju. Koristeći leme 2.2 i 2.3, dolazimo do zaključka da se tada u jednom od prethodnih momenata na izlazu elementa E_r pojavio broj y' takav da je $l(y') \ge \ge l(y_0) - 1 > m_0'$. Znači, došli smo do kontradikcije, t.j. $\delta \in P_{N,T_{m_0'+1}} \subset W$.

v) $E_r \equiv E_i$ za neko i, $1 \le i \le r-1$. Tada je jasno da nijednom elementu iz e nije pripisana funkcija iz W. Kao i gore, možemo pokazati da je $\delta\in P_{N,T_{m_0''}}\subset W$, gde je $m_0''=\max\{m,m_1,\dots,m_{n_3}\}+1$. U stvari, ako pretpostavimo da se na izlazu mreže S pojavio broj y_0, $y_0\geq 3$, takav da je $l(y_0)>m_0''$ to će njegova potpuna predistorija $y_0,y_1,\dots,$ biti beskonačna pošto iz lema 2.2 i 2.3 sledi da je $l(y_i)>m_0''-1$ za svako i, $i=0,1,\dots,$ t.j. mi dolazimo do kontradikcije.

g) Elementu E_r je dodeljena funkcija iz M_{KC} koja nema indikatorne promenljive. Tada je jasno, kao i gore, da je $\delta\in P_{N,T_{m_0''}}\subset W$.

d) Ulaz elementa E_r je istovremeno ulaz mreže S i $n_3>0$. Za svako g_m, $1\leq m\leq n_3$, postoji i_m takvo da je $g_m\in X_{i_m}$. Uzmimo $i_0=\max_m i_m$. Tada je jasno da je $g_m\in X_{i_0+1}\subset X$.

Primečujući na kraju da iz lema 2.2 i 2.3 sledi da je $X\subset H$, dobijamo to što se i trebalo dokazati.□

Dokaz teoreme 3.1.1. Uzmimo regularan skup funkcija $R\subset P_N^{(1)}$ moći $\aleph_1$ (lema 2.2.2) i posmatrajmo skup $R'=\{\lambda_f\,|\,f\in R\}$. Iz leme 3.2.4 sledi da za svako λ_f postoji predpotpuna klasa $\mathfrak{M}_f$, koja nju sadrži. Neka je f_1, f_2 proizvoljna funkcija iz R, $f_1\neq f_2$. Pokažimo tada, da nezavisno od izbora predpotpunih klasa važi da je $\mathfrak{M}_{f_1}\neq\mathfrak{M}_{f_2}$. Predpostavimo suprotno, t.j. da je $\mathfrak{M}_{f_1}=\mathfrak{M}_{f_2}=\mathfrak{M}$. Tada koristeći lemu 3.2.1 imamo da je $P_N=J_{CB}(\{\lambda_{f_1},\lambda_{f_2}\})\subset\mathfrak{M}$, t.j. dolazimo do kontradikcije. Pošto je $|R|=\aleph_1$, to za svako $\Sigma_{\check{s}}$ važi da je $|\Sigma_{\check{s}}|\geq\aleph_1$. No, iz očite nejednakosti $|\Sigma_{\check{s}}|\leq\aleph_1$ sledi da je $|\Sigma_{\check{s}}|=\aleph_1$, što je i trebalo da se dokaže.□

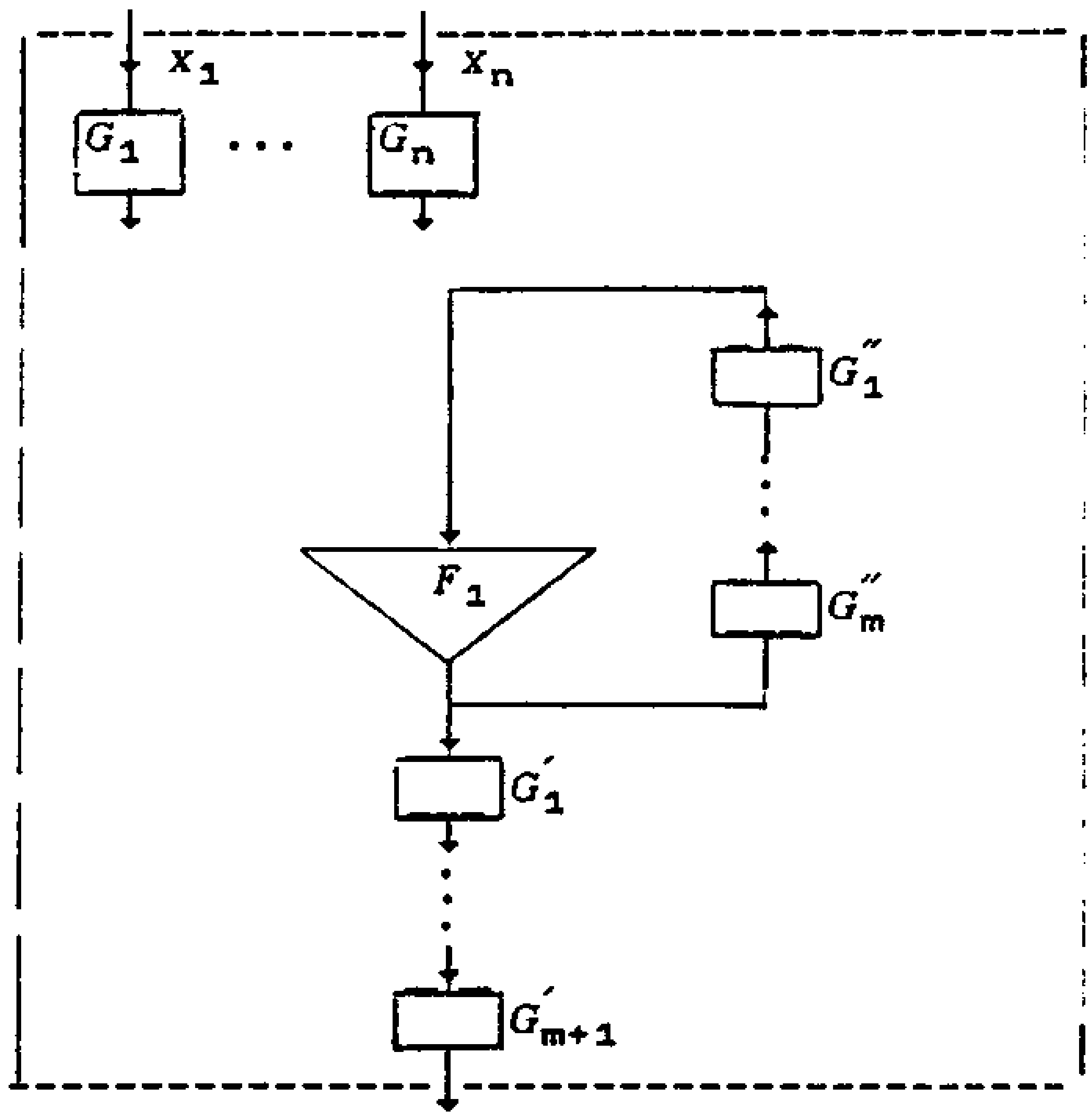
3. Dokaz teorema 3.1.2 i 3.1.3

Dokaz teoreme 3.1.2. Pretpostavimo najpre da multigraf (N,f^{-1}) ima konačnu bazu $B=\{b_1,\ldots,b_m\}$ i pokažimo da je tada funkcija f funkcija Šefera. Razmotrimo takođe i multigraf $G=(N,f)$ i primetimo da iz definicije baze sledi da je u tom multigrafu $\hat{f}(B)=N$. Uzmimo mrežu S datu na sl. 5. U njoj elementu F_1 je dodeljena funkcija f. Neka je $g(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in P_N$. Očito da možemo pretpostaviti da g nije konstanta pošto je $J_{CB}(\phi)=M_{KC}$. Uzmimo kao početna stanja zadrški $G'_1,\ldots,G'_m$ i G'_{m+1} redom brojeve $b_1,\ldots,b_m$ i 0, a kao početna stanja zadrški $G''_1,\ldots,G''_m$ brojeve $b_1,\ldots,b_m$. Očigledno da postoji niska $(a_1,\ldots,a_n)$ takva da je $g(a_1,\ldots,a_n)\neq 0$. Uzmimo kao početno stanje izlaza elementa G_j, $1\leq j\leq n$, broj a_j. Takođe, uzmimo, kao skup Q završnih stanja za S, skup svih niski

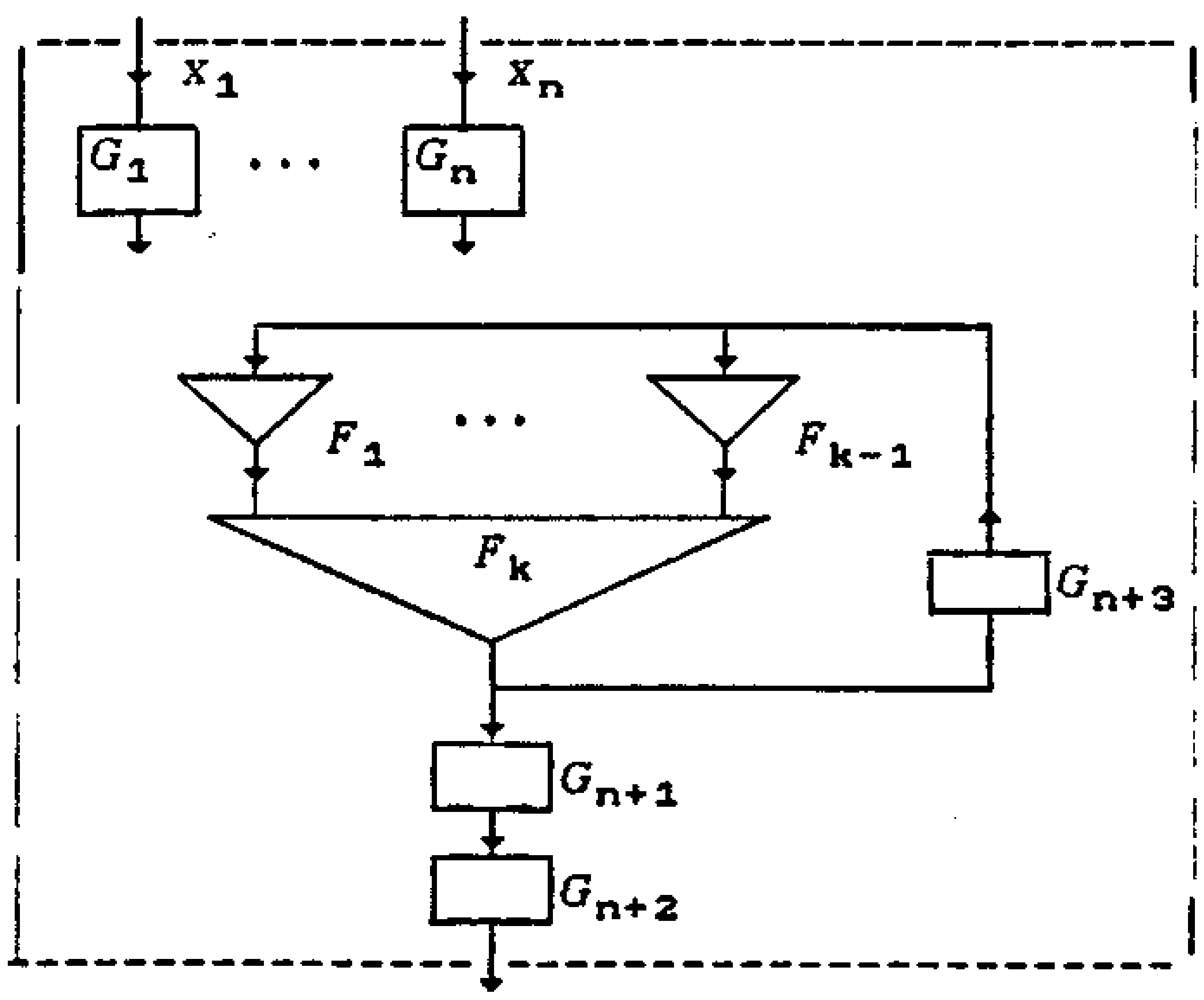
$$(y_1,\ldots,y_n,y_{n+1},z_1,\ldots,z_{m+1},w_1,\ldots,w_m),$$

gde je y_j stanje izlaza elementa G_j, $1\leq j\leq n$; y_{n+1} - stanje izlaza elementa F_1; z_j - stanje izlaza elementa G'_j, $1\leq j\leq m+1$, i w_j - stanje izlaza elementa G''_j, $1\leq j\leq m$, takvih da je $g(y_1,\ldots,y_n)=$ $=y_{m+1}$. Nije teško videti, da mreža S izračunava funkciju g. Iz proizvoljnosti izbora funkcije g sledi da je f funkcija Šefera.

Pretpostavimo sada da je $J_{CB}(\{f\})=P_N$. Posmatrajmo multigraf $G=(N,f)$. Pokažimo da G ima ne više od konačnog broja visećih čvorova iz kojih izlazi po jedna grana. Pretpostavimo suprotno, t.j. da G ima beskonačan broj takvih čvorova; označimo sa N_0 skup svih tih čvorova. Pokažimo tada da f nije funkcija Šefera. Neka je



Sl.5.



Sl.6.

$$P'_{N,N\setminus N_0}=\{f'\in P_N \mid (\exists k\in N)(k\geq 2 \wedge \mathrm{Ran}(f')\subseteq[(N\setminus N_0)\cup E_k])\}.$$

Jasno je da je $f\in P'_{N,N\setminus N_0}$ i $J_{CB}(P'_{N,N\setminus N_0})=P'_{N,N\setminus N_0}\cup M_{KC}\neq P_N$. Odavde je $J_{CB}(\{f\})\subset J_{CB}(P'_{N,N\setminus N_0})\neq P_N$, što se i trebalo pokazati.

Pretpostavimo sada da G ima beskonačan broj komponenti povezanosti. Označimo sa $N_i, i=1,2,\ldots$, te komponente i neka je $A=\{N_i\}_{i=1}^{\infty}$. Tada za proizvoljno $\mathcal{B}$ iz $K(A)$, gde je $K(A)=\{\mathcal{B}' \mid \mathcal{B}'\subset A \wedge |\mathcal{B}'|<\aleph_0\}$, uzmimo skup

$$P'_{N,\mathcal{B}}=\{f'(x_1,\ldots,x_n) \mid (\exists k\in\{1,\ldots,n\})(\forall x_1,\ldots,x_n\in N)(\forall i\in N)$$
$$(x_j\in N_i\rightarrow f'(x_1,\ldots,x_n)\in N_i\cup(\cup\mathcal{B}))\}.$$

Sa $P'_{N,A}$ označimo skup $\bigcup_{\mathcal{B}\in K(A)} P'_{N,\mathcal{B}}$. Lako se možemo uveriti, da je $J_{CB}(P'_{N,A})=P'_{N,A}$. No pošto je $f\in P'_{N,A}$ i $P'_{N,A}\neq P_N$, dolazimo do kontradikcije, t.j. dobijamo da G ima konačan broj komponenti.

Pretpostavimo, napokon, da postoji niz $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ takav da je $x_i=f(x_{i+1})$, $i=1,2,\ldots$ Razmotrimo odgovarajuće kvaziuređenje $\leq$ u (N,f^{-1}) (paragraf 3.1.). Sa A_1 označimo skup $\{A\subset N \mid |A|<\aleph_0\}$. Neka je $T=\bigcup_{A\in A_1} P_{N,\hat{f}(A)}$ i

$$P'_N=\{f'(x_1,\ldots,x_n)\in P_N \mid (\exists j\in\{1,\ldots,n\})(\exists A\in A)(\forall x_1,\ldots,x_n\in N)$$
$$(f'(x_1,\ldots,x_n)\leq x_j \vee f'(x_1,\ldots,x_n)\in\hat{f}(A))\}.$$

Označimo sa M skup $T\cup P'_N$. Primetimo da je $f\in M$ i $M_{KC}\subset M$. Ako sada posmatramo slobodnu mrežu S, to, izdvajajući u njoj deo, kao i u dokazu teoreme 1.1., i posmatrajući sve moguće slučajeve, dobijamo da je $J_{CB}(M)=M$. No, pošto funkcija $s(x)=x+1$, $x\in N$, ne pripada skupu M, mi opet dolazimo do kontradikcije.

Primećujići da u G iz svakog čvora izlazi tačno po jedna grana, iz gore pokazanog sledi da G ima konačnu bazu. Kao bazu za G, možemo uzeti skup $N_0\cup V$, gde je $V, V\subset N$, minimalan skup takav da je $|V\cap N_i|=1$ za svako N_i iz A, koje zadovoljava uslov da je $N_1 \cap N_0 = \Phi$.□

Svakoj funkciji $f \in P_N^{(1)}$ dodelimo funkciju g_f takvu da je $g_f = c(x, f(x))$, $x \in N$. Takođe za svaki konačan niz funkcija $f_1, \ldots$ $\ldots, f_r \in P_N^{(1)}$ konstruišimo funkciju

$$h_{f_1,\ldots,f_r}(x_1,\ldots,x_r) = \begin{cases} x+1, & \text{ako je } x = c(x, f_i(x)) \text{ za svako } i, 1 \le i \le r; \\ 0 & \text{u protivnom slučaju.} \end{cases}$$

Dokaz teoreme 3.1.3. Iz teoreme 1.2 sledi da je tvrđenje tačno za k=1. Znači, možemo pretpostaviti da je k>1.

Neka je A proizvoljan regularan podskup skupa $P_N^{(1)}$ moći $\aleph_1$ (lema 2.2.2). Posmatrajmo skup

$$B = \{g_{f_1}, \ldots, g_{f_{k-1}}, h_{f_1,\ldots f_{k-1}}\},$$

gde su $f_1, \ldots, f_{k-1}$ proizvoljne funkcije iz A. Pokažimo da je B baza u (P_N, J_{CB}).

Razmotrimo mrežu S datu na sl. 6. Elementima $F_1, \ldots, F_{k-1}$ i F_k redom su pripisane funkcije $g_{f_1}, \ldots, g_{f_{k-1}}$ i $h_{f_1,\ldots f_{k-1}}$. Uzmimo da su početna stanja izlaza zadrški G_{n+1}, G_{n+2} i G_{n+3} jednaka 0. Neka je $g(x_1, \ldots, x_n) \in P_N$. Pošto je $J_{CB}(\Phi) = M_{KC}$, to možemo pretpostaviti da g nije konstanta. Birajući nisku $(a_1, \ldots$ $\ldots, a_n)$, kao u lemi 2.1, lako se uveriti, da za odgovarajući skup Q završnih stanja, mreža S izračunava funkciju g. Odavde je $J_B(B) = P_N$, t.j. skup B generiše čitavo P_N. Iz dokaza teoreme 2.1.1 sledi da je $J_{CB}(\{g_{f_1}, \ldots, g_{f_{k-1}}\}) \neq P_N$. Pokažimo takođe da važi $J_{CB}(B \setminus \{g_{f_i}\}) \neq P_N$ za svako i, $1 \le i \le k-1$. Neka je $W_1^i = \bigcup_{\substack{\ell=1 \\ \ell \ne i}} P_{N,l}$, gde je

$$P_{N,l} = \{f' \in P_N \mid (\exists j \ge 2)\ \mathrm{Ran}(f') \subset N_{\ell,j}\};$$

$N_{\ell,r} = \{c(t, f_\ell(t))\}_{t=0}^{\infty} \cup E_r$, r=2,3,..., $1 \le l \le k-1$. Posmatrajmo, takođe, skupove $T^i_{N,l}$, $l=2,3,\dots$, $1\leq i\leq k-1$, svih funkcija $f(x_1,\dots$ $\dots,x_{n_f})$ iz P_N, za koje postoje i_f, $1\leq i_f\leq n_f$, i $t\in N$ takvi da je $f(x_1,\dots,x_{n_f})\leq x_{i_f}$ ako je $x_{i_f}=c(t',f_i(t'))>t$ za neko $t'\in N$, i $f(x_1,\dots,x_{n_f})<1$ u protivnom. Sa W^i_2 označimo skup $\bigcup_{l=2}^{\infty} T^i_{N,l}$, a sa M_i skup $M_{KC}\cup W^i_1\cup W^i_2$. Za $f\in W^i_2$ odgovarajuće x_{i_f} nazovimo indikatornom promenljivom. Tada zaključujući, kao u teoremi 2.1.1, možemo pokazati da je $J_{CB}(M_i)\neq M_i$, $1\leq i\leq k-1$. Pošto je očigledno da je $M_i\neq P_N$, to je $J_{CB}(B\setminus\{g_{f_i}\})\neq P_N$, $1\leq i\leq k-1$, što je i trebalo pokazati. Odavde sledi, da je B bazis u (P_N,J_{CB}). No, pošto je A moći $\aleph_1$, to je broj takvih baza u (P_N,J_{CB}) jednak kontinumu.□

Glava 4.

Rekurzivne funkcije i slobodne mreže

U prethodnim glavama mi smo razmatrali slobodne operatore na skupu P_N svih funkcija beskonačnoznačne logike, t.j. na skupu svuda definisanih funkcija sa N u N. Imajući u vidu naš cilj u vezi sa radom [4], i pošto proširujući klasu operacija mi nismo došli do željenog cilja, t.j. u tako dobijenom i.f.s. (P_N, J_{CB}) moć skupa svih predpotpunih klasa je ponovo bila suviše velika, to se potpuno prirodno nameće sledeće pitanje: postoji li dovoljno bogata podklasa od P_N takva da zajedno sa skupom slobodnih operacija daje i.f.s. kod kojeg bi moć skupa svih predpotpunih klasa bila prihvatljivija? U vezi s tim nameće se i pitanje kakav bi bio taj i.f.s. u slučaju nekih dovoljno interesantnih podklasa skupa P_N. Mi se u ovoj glavi ograničimo, kao važnim primerom, skupom $\tilde{\mathfrak{R}}$ svih totalnih rekurzivnih funkcija. Jasno je, da se u takvom slučaju moramo ograničiti i skupom J'_{CB} slobodnih operatora određenih svim slobodnim mrežama kod kojih su skupovi završnih stanja rekurzivni. U paragrafu 1 razmatraćemo neka opšta pitanja povezana sa sistemom $(\tilde{\mathfrak{R}}, \Omega'_{CB})$. Prije svega, formulisaće se odgovarajući analogoni rezultata dobijenih u prethodnim glavama. U takvom i.f.s. imaće smisla i pitanje algoritamske razrešivosti problema da li je neka rekurzivna funkcija od jedne promenljive funkcija Šefera ili ne. Negativni odgovor na to pitanje sledi direktno iz teoreme Rajsa (teorema 1.2). Osim ovog trivijalnog za dokazivanje, no sa druge strane važnog fakta, u paragrafu 3 se pokazuje, daleko ne tako očita činjenica, da je skup indeksa svih Šeferovih funkcija od jedne promenljive u i.f.s. $(\tilde{\mathfrak{X}}, \Omega'_{CB})$ produktivan.

1. Neki osnovni rezultati teorije rekurzivnih funkcija

Postoje mnogi prilazi ka izračunljivosti, no osnovni rezultat u teoriji izračunljivih funkcija je taj koji tvrdi da sve te formalizacije pojma efektivne izračunljivosti dovode do jedne te iste klase izračunljivih funkcija.

Koristićemo se ovde MNR prilazom ka izračunivosti [7]. MNR predstavlja idealizovani kompjuter sa neograničenim registrima. MNR sadrži beskonačan broj registara $R_1, R_2, R_3, \ldots$, svaki od kojih u svakom vremenskom momentu sadrži neki prirodan broj; broj koji se nalazi u R_n označimo sa r_n. Niz tih brojeva se naziva konfiguracijom, i to je moguće predstaviti na sledeći način.

$$\begin{array}{cccccc} R_1 & R_2 & R_3 & R_4 & & R_n \\ | \; r_1 & | \; r_2 & | \; r_3 & | \; r_4 & | \; \cdots & | \; r_n \; | \; \cdots \end{array}$$

MNR može menjati sadržaj registara kao odgovor na neku komandu, ili instrukciju, koju on može prihvatiti. Konačan spisak komandi obrazuje program. Neka je W neki MNR program. Komande imaju sledeća četri oblika. Komanda anuliranja Z(n) za svako n=1,2,3,... primorava MNR da zameni R_n na 0, ne dirajući pri tome ostale registre; pod dejstvom komande S(n) MNR povečava r_n na 1. Odgovor na komandu T(m,n) je zamena sadržaja u R_n brojem r_m koji se sadrži u R_m. I, napokon, za sve m=1,2,...; n=1,2,3,... i q=1,2,3,... imamo komande J(m,n,q). Reakcija MNR na komandu J(m,n,q) je sledeća. Upoređujemo sadržaje registara R_m i R_n, no, oba registra ostaju neizmenjena. Pri tome, ako je $r_m = r_n$, to MNR prelazi na q-tu komandu programa W, a ako je $r_m \neq r_n$, to MNR prelazi na izvršenje sledeće komande u W. Ako je uslovni prelaz nemoguć zbog toga što je u W manje od q komandi, to se MNR zaustavlja.

Da bi vršio izračunavanja MNR mora biti snabdeven programom W i početnom konfiguracijom, t.j. nizom $a_1, a_2, a_3, \ldots$ prirodnih brojeva koji se nalaze u registrima $R_1, R_2, R_3, \ldots$ Pretpostavimo da se program W sastoji iz niza od s komandi I_1, $I_2, \ldots, I_s$, $W = I_1 I_2 \ldots I_s$. Tada rad MNR po programu W možemo opisati na sledeći način. MNR počinje rad sa izvršenjem komande I_1. Neka se u nekom sledećem momentu izračunavanja MNR izvršava komanda I_k. Tada posle njenog izvršenja MNR prelazi na sledeću komandu u izračunavanju koja se određuje na sledeći način: ako I_k nije komanda uslovnog prelaza, to je sledeća komanda u izračunavanju komanda I_{k+1}; ako je $I_k = J(m,n,q)$, to je sledeća komanda u izračunavanju I_q ako je $r_m = r_n$ i I_{k+1} u protivnom slučaju, gde su r_m i r_n redom tekuće vrednosti registara R_m i R_n.

MNR produžava da radi na takav način tako dugo dok je to moguće; izračunavanje se zaustavlja tada i samo tada, kada nema sledeće komande, t.j. kada je MNR upravo izvršila komandu i sledeća komanda u izračunavanju je I_v, $v > s$. Konfiguracija koja se dobija posle zaustavljanja MNR se zove **završnom**.

Neka je $a_1,a_2,a_3,\ldots$ beskonačan niz elemenata iz N, a W program; označavaćemo i zapisivaćemo:

1) sa $W(a_1,a_2,a_3,\ldots)$ izračunavanje po programu W sa početnom konfiguracijom $a_1,a_2,a_3,\ldots$;

2) $W(a_1,a_2,a_3,\ldots)\downarrow$ označava da se izračunavanje $W(a_1,a_2,a_3,\ldots)$ na kraju krajeva završava;

3) $W(a_1,a_2,a_3,\ldots)\uparrow$ označava da se izračunavanje $W(a_1,a_2,a_3,\ldots)$ nikada ne završava.

Neka je $a_1,a_2,\ldots,a_n$ konačan niz prirodnih brojeva; označimo sa $W(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ izračunavanje $W(a_1,a_2,\ldots,a_n,0,0,\ldots)$.

Neka je f ne svuda definisana, t.j. parcijalna funkcija iz N^n u N. Pretpostavimo da je W program, a $a_1,a_2,\ldots,a_n,b\in N$.

Izračunavanje $W(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ **konvergira** ka b ako je $W(a_1,a_2,\ldots,a_n)\downarrow$ i završna konfiguracija u registru R_1 ima broj b. Ta činjenica se zapisuje, kao $W(a_1,a_2,\ldots,a_n)\downarrow b$.

Program W **MNR-izračunava** f ako za sve $a_1,a_2,\ldots,a_n,b$ važi $W(a_1,a_2,\ldots,a_n)\downarrow b$ tada i samo tada, kada je $(a_1, a_2,\ldots,a_n)\in\in\mathrm{Dom}(f)$ i $f(a_1,a_2,\ldots,a_n)=b$.

Funkcija f je **MNR-izračunljiva** ako postoji program koji MNR izračunava f. Često ćemo ubuduće umesto termina MNR-izračunljiva koristiti termin izračunljiva u istom smislu, a umesto MNR-program mi ćemo prosto pisati program.

Klasa MNR-izračunljivih funkcija se označava sa $\mathfrak{R}$, a klasa MNR-funkcija koje zavise od n promenljivih sa $\mathfrak{R}_n$.

Za svaki program W i n≥1 rezultat primene programa W na početne konfiguracije oblika $a_1,a_2,\ldots,a_n,0,0,\ldots$ je jedinstvena funkcija od n promenljivih koja se izračunava programom W i označava sa $f_W^{(n)}$.

Program $W=I_1I_2...I_s$ ima standardni oblik ako za svaku komandu uslovnog prelaza $J(m,n,q)$ u W mi imamo $q\leq s+1$. Jasno je, da insistiranje na standardnom obliku ne ograničava opštost i da, ubuduće, možemo pretpostaviti da su svi konkretni programi koji se ovde daju standardnog oblika.

Neka su X i Y programi standardnog oblika redom dužina s i t. **Konkatenacijom programa** X i Y (u zapisu: XY) nazivamo program $I_1,...,I_s,I_{s+1},...,I_{s+t}$, gde je $X=I_1...$ $...I_s$, a komande $I_{s+1},...,I_{s+t}$ su komande programa Y kod kojih je svaki uslovni prelaz $J(m,n,q)$ zamenjen sa $J(m,n,s+q)$.

Sa $\rho(W)$ označimo najmanji broj u, takav, da nijedan registar R_v, gde je $v\geq u$, nije korišćen u izračunavanju po programu W.

Nadalje će nam biti potrebno neko efektivno kodiranje skupa svih MNR-programa skupom prirodnih brojeva.

Neka je X skup konačnih objekata; X se naziva **efektivno prebrojivim** ako postoji bijekcija $f:X\to N$ takva da su obe funkcije f i f^{-1} efektivno izračunljive (u neformalnom smislu). Lako je proveriti, da su sledeće funkcije bijekcije:

$\pi:N\times N\to N$, $\pi(m,n)=2^m(2n+1)-1$; $\eta:N^+\times N^+\times N^+\to N$, $\eta(m,n,q)=\pi(\pi(m-1,n-1),q-1)$ i $\tau:\bigcup_{k=1}^{\infty} N^k\to N$, $\tau(x_1,...,x_k)=2^{x_1}+2^{x_1+x_2+1}+2^{x_1+x_2+x_3+2}+...+2^{x_1+\cdots+x_k+k-1}-1$.

Eksplicitno odredimo bijekciju $\beta:K\to N$, gde je K skup komandi MNR na sledeći način:

$$\beta(Z(n))=4(n-1);$$

$$\beta(S(n))=4(n-1)+1;$$

$$\beta(T(m,n))=4\pi(m-1,n-1)+2;$$

$$\beta(J(m,n,q))=4\eta(m,n,q)+3;$$

$m=1,2,\ldots$; $n=1,2,\ldots$; $q=1,2,\ldots$. Neka je $\mathcal{P}$ skup svih MNR programa. Odredimo bijekciju $\gamma:\mathcal{P}\to N$ koristeći bijekcije τ i β na sledeći način: ako je $W=I_1\ldots I_s$, to je $\gamma(W)=\tau(\beta(I_1),\ldots,\beta(I_s))$. Jasno je, da su γ b γ^{-1} efektivno izračunljive funkcije. Odavde sledi da je $\mathcal{P}$ efektivno prebrojivo. Broj $\gamma(W)$ se naziva kodnim brojem, ili gedelovim brojem, programa W ili prosto indeksom od W. Uzmimo da je $W_n=\gamma^{-1}(n)$. Koristeći numeraciju γ možemo zanumerisati izračunljive funkcije, a takođe oblasti njihove definisanosti i skupove vrednosti.

Za svako $a\in N$ i $n\geq 1$ sa $f_a^{(n)}$ označimo funkciju od n promenljivih $f_{W_a}^{(n)}$ izračunljivu po programu W_a, sa $W_a^{(n)}$ - oblast definisanosti funkcije $f_a^{(n)}$, a sa $E_a^{(n)}$ - skup vrednosti od $f_a^{(n)}$. Pisaćemo f_a umesto $f_a^{(1)}$, W_a umesto $W_a^{(1)}$ i E_a umesto $E_a^{(1)}$.

Takođe koristićemo se sledećim rezultatima teorije rekurzivnih funkcija.

Teorema (s-m-n - teorema) 1.1. Za sve $m,n\geq 1$ postoji totalna (svuda definisana) izračunljiva funkcija $s_n^m(e,x)$ od m+1 promenljive, takva, da je $f_e^{(m+n)}(x,y)=f_{s_n^m(e,x)}(y)$.

Univerzalna funkcija za izračunljive funkcije od n promenljivih je funkcija $\psi_U^{(n)}$ od n+1 promenljive koja je određena sledećom relacijom

$$\psi_U^{(n)}(e,x_1,\ldots,x_n)=f_e^{(n)}(x_1,\ldots,x_n).$$

Umesto $\psi_U^{(1)}$ pišemo samo ψ_U.

Skup A je rekurzivan ako je karakteristična funkcija tog skupa

$$c_A(x)=\begin{cases}1, & \text{ako je } x\in A,\\ 0, & \text{ako je } x\notin A,\end{cases}$$

izračunljiva. Takođe predikat $M(x)$ je **razrešiv** ako je funkcija zadata formulom

$$c_M(x)=\begin{cases}1, & \text{ako je } M(x) \text{ istinito},\\ 0, & \text{ako je } M(x) \text{ lažno},\end{cases}$$

izračunljiva. U sledećoj teoremi pod terminom problem mi ćemo ustvari imati u vidu odgovarajući predikat.

<u>Teorema (teorema Rajsa) 1.2.</u> Neka je $\mathfrak{B}\subseteq\mathfrak{R}_1$ i $\mathfrak{B}\neq\phi,\mathfrak{R}_1$. Tada je problem "$f_x\in\mathfrak{B}$" nerazrešiv.

Skup A je rekurzivno prebrojiv ako je funkcija f zadata formulom

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{ako je } x\in A,\\ \text{nije određeno} & \text{ako je } x\notin A,\end{cases}$$

je parcijalno rekurzivna. Nama će ubuduće biti potrebna jedna od osnovnih teorema teorije rekurzivnih funkcija, koja predstavlja uopštenje teoreme Rajsa. (U formulaciji te teoreme konačnom funkcijom zvačemo funkciju kod koje je oblast definisanosti konačan skup.)

<u>Teorema (teorema Rajsa-Šapiro) 1.3.</u> Neka je $\mathcal{A}$ skup funkcija jedne promenljive takav da je skup $\{x\,|\,f_x\in\mathcal{A}\}$ rekurzivno prebrojiv. Tada za svaku funkciju od jedne promenljive f, $f\in\mathcal{A}$ tada i samo tada, kada postoji konačna funkcija $\theta\subseteq f$, takva, da je $\theta\in\mathcal{A}$.

Skup A se zove **produktivnim** tada i samo tada, kada postoji totalna izračunljiva funkcija g, takva, da iz $W_x\subseteq A$ sledi da je $g(x)\in A\setminus W_x$. Funkcija g se naziva **produktivnom funkcijom** za skup A. Skup A je **kreativan** ako on nije rekurzivno prebrojiv i ako je njegov komplement $\bar{A}$ produktivan.

Sa f_{Φ} označimo funkciju koja nigde nije definisana. Tada važi sledeće tvrđenje.

Teorema 1.4. Neka je $\mathfrak{B}$ skup izračunljivih funkcija od jedne promenljive takav da je $f_{\Phi} \in \mathfrak{B}$ i $\mathfrak{B} \neq \mathfrak{K}_1$. Tada je skup $B = \{x \mid f_x \in \mathfrak{B}\}$ produktivan.

Takođe, ubuduće, u dokazima ćemo se koristiti hipotezom Čerča, koja se u terminima MNR prilaza može sformulisati na sledeći način.

Hipoteza Čerča: intuitivno i neformalno određena klasa izračunljivih parcijalnih funkcija se podudara sa klasom $\mathfrak{K}$ svih MNR-izračunljivih funkcija.

2. Istinitosni funkcionalni sistem $(\tilde{\mathfrak{K}}, \Omega'_{CB})$

Označimo sa $\tilde{\mathfrak{K}}$, $\tilde{\mathfrak{K}} \subset \mathfrak{K}$, skup svih totalnih izračunljivih funkcija, sa Ω'_{CB} - skup svih slobodnih mreža kod kojih je skup završnih stanja rekurzivan, a sa J'_{CB} - skup svih odgovarajućih operatora. Tada važi sledeće tvrđenje.

Teorema 2.1. $J'_{CB}(\tilde{\mathfrak{K}}) = \tilde{\mathfrak{K}}$.

Dokaz. Dokažimo ovaj fakt ne koristeći hipotezu Čerča. Neka je S proizvoljna mreža sa n ulaza kojima su pripisane promenljive $x_1, \ldots, x_n$. Skup završnih stanja te mreže označimo sa Q i pretpostavimo da je Q rekurzivan skup. Sa $F_1, \ldots, F_k$ označimo sve elemente tipa F u S, sa $G_1, \ldots, G_m$ sve zadrške u S, a sa a_i, $1 \leq i \leq m$, početno stanje elementa G_i. Ne gubeći u opštosti možemo pretpostaviti da su izlazi elemenata mreže S numerisani na takav način da je izlazu F_i, $1\leq i\leq k$, dodeljen broj i, a izlazu od G_i, $1\leq i\leq m$, broj $k+i$. Za dva elementa F_i i F_j, $1\leq i, j\leq k$, pišemo $F_i<F_j$ ako je izlaz od F_j jedan od ulaza elementa F_i. Pretpostavimo da su elementi tipa F u nizu $F_1,\dots,F_k$ dati tako da ako je $i<j$, $1\leq i,j\leq k$, to ne važi $F_i<F_j$. Neka je elementu F_i, $1\leq i\leq k$, dodeljena rekurzivna funkcija $f(x_1,\dots,x_{n_i})$, koju MNR-izračunava program W_i. Sa s označimo broj max $\{m+n, k+m, \rho(W_1),\dots,\rho(W_k),\rho(\widetilde{W})\}$. Pretpostavimo da mreža S izračunava funkciju f. Pokažimo da je ta funkcija takođe rekurzivna, t.j. pokažimo da postoji program W koji MNR-izračunava funkciju f. Za svako F_i, $1\leq i\leq k$, odredimo konačan niz brojeva $l_1^i,\dots,l_{n_i}^i$ na sledeći način. Ako je r-ti ulaz tog elementa izlaz od F_j, $1\leq j\leq k$, to je $l_r^i=s+n+j$, a ako je izlaz elementa G_l, $1\leq l\leq m$, to je $l_r^i=s+n+k+l$; u protivnom slučaju r-ti ulaz od F_i je v-ti ulaz mreže S za neko v, $1\leq v\leq n$, i mi ćemo uzeti da je $l_r^i= =s+v$. Tada sa W_i' označimo program koji ima sledeći oblik:

$T(l_1^i,1)$

$T(l_2^i,2)$

...

$T(l_{n_i}^i,n_i)$

$Z(n_i+1)$

...

$Z(s)$

W_i

$T(1,n+s+i)$.

Za svako G_j, $1\leq j\leq m$, odredimo, na isti način, kao i gore, broj $\tilde{I}_j$. Sa W_{k+1} označimo program

$T(\tilde{I}_1,s+n+k+m+1)$

...

$T(\tilde{I}_m,s+n+k+m+m)$

$T(s+n+k+m+1,s+n+k+1)$

...

$T(s+n+k+m+m,s+n+k+m)$.

Pošto je Q rekurzivan skup, to je karakteristična funkcija c_Q tog skupa izračunljiva. Označimo sa $\tilde{W}$ MNR-program koji izračunava funkciju c_Q. Neka je $Y=W_1'W_2' \ldots W_k'W_{k+1}$. Tada je lako pokazati, da program:

$T(1,s+1)$

...

$T(n,s+n)$

$S(s+n+k+m+1)$

$[S(s+n+k+1)]$

...

$[S(s+n+k+m)]$

I_q Y

$T(s+n+1,1)$

...

$T(s+n+k+m,k+m)$

$Z(k+m+1)$

...

$Z(s)$

$\tilde{W}$

$J(1,s+n+k+m,q)$

$T(\bar{I},1)$

MNR-izračunava funkciju f. Odavde sledi da je $J'_{CB}(\tilde{\mathfrak{X}})\subseteq\tilde{\mathfrak{X}}$. Broj $\bar{I}$ biramo na sledeći način. Ako je izlaz od S izlaz elementa F_i za neko i, $1\leq i\leq k$, to je tada $\bar{I}=s+n+i$, a ako je izlaz nekog elementa G_j za neko j, $1\leq j\leq m$, to je $\bar{I}=s+n+k+j$.

Ostaje nam samo još da pokažemo da je $\tilde{\mathfrak{X}}\subseteq J'_{CB}(\tilde{\mathfrak{X}})$. Funkcija $s(x)=x+1$, $x\in N$, je očito totalna rekurzivna funkcija. Uzmimo za proizvoljnu funkciju $f(x_1,\ldots,x_n)$ mrežu sa sl.1. Kao skup završnih stanja Q uzmimo skup kod koga je karakteristična funkcija oblika

$$c_Q=\overline{sg}(f(U_1^{n+3}(y),\ldots,U_n^{n+3}(y))-U_{n+2}^{n+3}(y))$$

Jasno je da ta mreža izračunava f, i da je Q rekurzivan skup. Znači zaista je

$$\tilde{\mathfrak{X}}\subseteq J'_{CB}(\{s\})\subseteq J'_{CB}(\tilde{\mathfrak{X}}),$$

što je i trebalo dokazati.□

Označimo sa $\mathcal{F}_n$, $n\geq 1$, klasu svih parcijalnih funkcija sa N^n u N. Operatorom nazovimo svako preslikavanje oblika $\Psi:\mathcal{F}_{m_1}\times\ldots\times\mathcal{F}_{m_k}\to\mathcal{F}_n$. Posmatrajmo par $(\mathcal{F},J''_{CB})$, gde je $\mathcal{F}$ skup svih parcijalnih funkcija iz N^n u N, a J''_{CB} skup svih slobodnih operacija određenih slobodnim mrežama kod kojih je skup završnih stanja rekurzivno prebrojiv. Primenom neke slobodne operacije iz J''_{CB} na neke funkcije iz $\mathcal{F}$ dobijamo u opštem slučaju neku parcijalnu izračunljivu funkciju. Jasno je, da svaka slobodna operacija određuje jedan operator oblika $\Psi_\omega:\mathcal{F}_{m_1}\times\ldots\times\mathcal{F}_{m_k}\to\mathcal{F}_n$. Lako je pokazati da je taj operator rekurzivan ([7], 194 c.). Odavde korišćenjem prvog dela teoreme Majhila-Šeperdsona [7] dobijamo sledeće tvrđenje.

Teorema 2.2. Za svaku slobodnu operaciju ω iz J''_{CB}, koja određuje rekurzivni operator $\Psi_\omega:\mathcal{F}_{m_1}\times\ldots\times\mathcal{F}_{m_k}\to\mathcal{F}_n$, postoji totalno izračunljiva funkcija h, takva da je

$$\omega(f^{(m_1)}_{e_1},\ldots,f^{(m_k)}_{e_k})=f^{(n)}_{h(e_1,\ldots,e_k)}.$$

Imajući u vidu da je skup izračunljivih funkcija prebrojiv, možemo analognim načinom, kao u glavi 2 i 3, pokazati da važe sledeća tvrđenja:

Teorema 2.3. Par $(\tilde{\mathfrak{R}},J'_{CB})$ ima tačno $2^{\aleph_0}$ predpotpunih klasa.

Teorema 2.4. Za $(\tilde{\mathfrak{R}},J'_{CB})$ je ispunjeno:

a) $|M|=\aleph_0$, za svako $M\in\theta$.

b) $h(L_\theta)=b(L_\theta)=2^{\aleph_0}$.

v) Svaki parcijalni poredak $(L,\leq)$ takav da je $|L|\leq\aleph_0$ moguće je izomorfno potopiti u rešetku L_θ.

Teorema 2.5. Moć svake $\Sigma_{\check{S}}$ u $(\tilde{\mathfrak{R}},J'_{CB})$ je $\aleph_0$.

3. Problem šeferovosti u $(\tilde{\mathfrak{R}},\Omega'_{CB})$

Mi smo već posmatrali Šeferove funkcije koje zavise od jedne promenljive. Pošto ovde mi posmatramo totalne rekurzivne funkcije, t.j. skup $\tilde{\mathfrak{R}}$, to se potpuno prirodno nameće problem postojanja efektivne procedure koja bi za proizvoljno $f_x\in\tilde{\mathfrak{R}}$ odgovarala na pitanje da li je f_x funkcija Šefera ili ne.

Sa $A_{\check{S}}$ označimo skup svih Šeferovih funkcija od jedne promenljive i.f.sistema $(\tilde{\mathfrak{R}},\Omega'_{CB})$. Tada je direktna posledica teoreme Rajsa sledeća teorema.

<u>Teorema 3.1.</u> Problem "$f_x \in A_{\check{S}}$", t.j. da li je f_x funkcija Šefera ili ne, je nerazrešiv.

Poslednje tvrđenje ustvari znači da je skup

$$A_{\check{S}} = \{x \mid f_x \in A_i\}$$

rekurzivan. Pošto konačna funkcija, t.j. funkcija sa konačnom oblašću definisanosti ne može biti Šeferova, to iz teoreme 1.3 sledi da skup $A_{\check{S}}$ nije rekurzivno prebrojiv. Kako je taj fakt i direktna posledica sledeće teoreme, to ga nećemo posebno isticati.

Pre nego što damo sledeću teoremu odredimo funkciju $(x)_y$ na sledeći način:

$$(x)_y = \begin{cases} \text{stepen broja } p_y \text{ u razlaganju } x \text{ na proste činioce, ako je } x,y>0, \\ 0, \text{ ako je } x=0 \text{ ili } y=0, \end{cases}$$

gde je p_y - y-ti prosti broj (uzimimo da je $p_0=0$). Jasno je, da je funkcija $(x)_y$ izračunljiva.

<u>Teorema 3.2.</u> Skup $A_{\check{S}}$ je produktivan.

Uzmimo proizvoljan skup W_x. Neka je a neki indeks funkcije $s(x)=x+1$, $x \in N$. Sa P_x označimo program koji MNR-izračunava funkciju f_x, čija je oblast definisanosti skup W_x. Posmatrajmo funkciju

$$g(x,y,t) = \begin{cases} y, \text{ ako je } P_x(y)\downarrow \text{ za } t \text{ koraka,} \\ a \quad \text{u ostalim slučajevima.} \end{cases}$$

Uzmimo da je $\tilde{g}(x,y)=g(x,(y)_1,(y)_2)$. Jasno je, da je $\tilde{g}$ totalna izračunljiva funkcija i $\mathrm{Ran}(\tilde{g})=\mathrm{Ran}(g)=W_x \cup \{a\}$. Posmatrajmo izračunljivu funkciju

$$w(x,y,z)=\psi_U(\tilde{g}(x,y),z),$$

gde je ψ_U univerzalna funkcija za sve izračunljive funkcije od jedne promenljive. Iz s-m-n-teoreme sledi da postoji totalno izračunljiva funkcija $k(x)$, takva da je

$$f^{(2)}_{k(x)}(y,z)=w(x,y,z).$$

Neka je $h(x)=\max\ \{\rho(P^{(2)}_{k(x)}),2\}$, $x\in N$. Za svako $x\in N$ posmatrajmo sledeći program Q_x:

I_1	$T(1,h(x)+1)$
I_2	$S(h(x)+3)$
I_3	$S(h(x)+4)$
I_4	$S(h(x)+4)$
I_5	$S(h(x)+6)$
I_6	$T(h(x)+2,1)$
I_7	$T(h(x)+5,2)$
I_8	$Z(3)$
	...
$I_{h(x)+5}$	$Z(h(x))$
	$P_{k(x)}$
I_{q+1}	$S(h(x)+2)$
I_{q+2}	$T(1,h(x)+5)$
I_{q+3}	$J(1,h(x)+3,q+8)$
I_{q+4}	$T(h(x)+3,h(x)+5)$
I_{q+5}	$T(h(x)+4,h(x)+3)$
I_{q+6}	$S(h(x)+4)$
I_{q+7}	$J(h(x)+8,h(x)+8,q+10)$
I_{q+8}	$T(h(x)+4,h(x)+5)$
I_{q+9}	$S(h(x)+4)$
I_{q+10}	$J(h(x)+1,h(x)+5,q+13)$
I_{q+11}	$J(h(x)+6,h(x)+7,q+15)$
I_{q+12}	$J(h(x)+8,h(x)+8,5)$
I_{q+13}	$S(h(x)+7)$
I_{q+14}	$J(s+8,s+8,5)$.

Tipična konfiguracija pri izračunavanju po tom programu je sledeća:

	...		y	n	a	b	i_n	1	(*)
-	$h(x)$	-	$h(x)+1$	$h(x)+2$	$h(x)+3$	$h(x)+4$	$h(x)+5$	$h(x)+6$	

Za svako $x\in N$ može se efektivno naći odgovarajući program P_x sa indeksom x, izračunati koliko komandi ima taj program i efektivno naći suma kodova svih njenih komandi. Iz posledenjeg korišćenjem hipoteze Čerča sledi da su $l(x)$ i $a(x)=\beta(I^x_1)+\ldots$

$\ldots+\beta(I^{x}_{\ell(x)})$, gde je $P_x=I^x_1\ldots I^x_{\ell(x)}$, izračunljive funkcije, a takođe je jasno da je gore određena funkcija $h(x)$, takođe, izračunljiva. Indeks $\chi(x)$ programa Q_x tada možemo izračunati po sledećoj formuli:

$$\begin{aligned}\chi(x)=\;&2^{a_1}+2^{a_1+a_2+1}+\ldots+2^{a_1+\cdots+a_{h(x)+5}+h(x)+4}+2^{a_1+\cdots+a_{h(x)+5}+h(x)+4}\\ &k(x)+2^{a_1+\cdots+a_{h(x)+5}+a(k(x))+l(k(x))+h(x)+4}\\ &[2^{a_{q+1}+1}+\ldots+2^{a_{q+1}+\cdots+a_{q+14}+14}],\end{aligned}$$

gde je $a_j=\beta(I_j)$, $1\le j\le q+14$. Očito je da je $\chi(x)$ izračunljiva totalna funkcija.

Pretpostavimo sada da je dato neko W_x takvo da je $W_x\subseteq A_{\bar{S}}$. Posmatrajmo niz $i_0,i_1,\ldots$ ((*)). Pošto je u tom slučaju za proizvoljno $y\in N$ funkcija $w_{x,y}(z)=w(x,y,z)$ izračunljiva totalna funkcija, jasno je, da se taj niz prirodnih brojeva može konstruisati i na sledeći način. Neka je $i_0=0$. Uzmimo kao broj i_1 najmanji prirodan broj različit od i_0 i $w(x,0,i_0)$. Pretpostavimo da smo već našli brojeve $i_0,\ldots,i_n$. Broj i_{n+1} odredimo kao najmanji prirodan broj koji se razlikuje od brojeva $i_0,\ldots,i_n$ i $w(x,n,i_n)$. Pokažimo da se u nizu $i_0,i_1,\ldots$ nalaze svi prirodni brojevi (**). Uzmimo proizvoljan prirodan broj m i pokažimo da on leži u nizu $i_0,i_1,\ldots$ Primetimo najpre da za beskonačno vrednosti n_j, $j=0,1,2,\ldots$, važi

$$w(x,n,i_{n_j})=s(i_{n_j})=i_{n_j}+1.$$

No, tada postoji j, $j=0,1,2,\ldots$, takvo da je $n_j>m$, a odavde neposredno sledi da konačan niz $i_0,\ldots,i_{n_j+1}$ sadrži broj m. Uzmimo sada neki proizvoljan broj t. Za broj t će postojati $j,j\in N$, takvo da je $i_j=t$. Uzmimo da je $v_x(t)=i_{j+1}$. Pošto svako i_j možemo efektivno naći, to i za svako t možemo efektivno naći vrednost $v_x(t)$ (niz $i_0, i_1, \ldots$ se pravi dok ne dobijemo kroz konačan broj koraka i_j koje je jednako t i kao $v_x(t)$ izaberemo i_{j+1}). Odavde sledi iz hipoteze Čerča da je v_x totalno izračunljiva funkcija. Iz definicije funkcije v_x, iz (**) i iz teoreme 3.1.2 sledi da je v_x funkcija Šefera za svako $x\in V$. Ustvari, konstrukcija funkcije v_x je bila ništa drugo do konstrukcija na drugi način funkcije $f_{\chi(x)}$, koju definiše program Q_x, t.j. $f_{\chi(x)}=v_x$. Sledstveno, ako je $W_x\subseteq A_{\check{s}}$, to je $f_{\chi(x)}$ funkcija Šefera, t.j. $\chi(x)\in A_{\check{s}}$. Ostaje još da se pokaže da za svako $x\in V$ takvo da je $W_x\subseteq A_{\check{s}}$, $\chi(x)\notin W_x$ i, sledstveno, $\chi(x)\in A_{\check{s}}\setminus W_x$. Pokažimo, ustvari, da je za svako $f\in W_x$, $f\neq f_{\chi(x)}$. Pošto je $f(z)=w(x,n,z)$ za neko $n\in V$, to je $f_{\chi(x)}(i_n)\neq w(x,n,i_n)=f(i_n)$, i mi dobijamo traženo. Odavde sledi da funkciju χ možemo uzeti kao produktivnu funkciju za skup $A_{\check{s}}$, i, znači, zaista je skup $A_{\check{s}}$ produktivan, što je i trebalo pokazati.

Pošto je produktivan skup za nas od interesa uglavnom, kada on obrazuje komplement nekog rekurzivno prebrojivog skupa, to se potpuno prirodno nameće pitanje da li je $\overline{A_{\check{s}}}$ kreativno ili ne. Iz teoreme 1.4 sledi direktno da je $\overline{A_{\check{s}}}$, ustvari, produktivno i mi imamo sledeće tvrđenje

<u>Posledica 3.1.</u> Skup $\overline{A_{\check{s}}}$ nije kreativan.

Glava 5.

Automati u lavirintima

Daćemo osnovne pojmove sa kojima ćemo operisati u daljem radu. Daćemo pojam sistema uzajamno dejstvujućih, ili interagujućih, regularnih pešaka i pojam p̃-lavirinta, a takođe razmotrićemo odnos tih pojmova ka već postojećim pojmovima lavirinta i automata-miša [8]. Takođe, sformulisaćemo i neke poznate rezultate koji se odnose na konačne automate u lavirinatima na koje ćemo se pozivati u daljem radu. Osnovni pojmovi teorije konačnih automata, kao i osnovne oznake, kojima ćemo se koristiti, a koji nisu definisani ovde se mogu naći u [8] i [9].

1. Sistem interagujućih automata u p-lavirintima

Za svaki skup A sa $P_0(A)$ označimo skup svih njegovih nepraznih podskupova. Ako je $A\subset Z^2$ to sa $\mathrm{pr}_i(A)$ označimo projekciju skupa A na Z u odnosu na i-tu kordinatu; i=1,2. Označimo: e=(1,0), s=(0,-1), n=(0,1), w=(-1,0), θ={e,s,w,n}, $\dot{\theta}_0=\{\vec{0}\}\cup\theta$, $Q_0=\{q_e,q_s,q_w,q_n\}$; $\vec{0}$=(0,0). Sa π^- i π^+ označimo redom odgovarajuće ciklične permutacije (e,s,w,n) i (e,n,w,s). Takođe pretpostavimo da je $\bar{e}=e^{-1}=w, \bar{w}=w^{-1}=e, \bar{s}=s^{-1}=n, \bar{n}=n^{-1}=s$.

Neka su $a=(a_1,a_2)$ i $b=(b_1,b_2)$ proizvoljni vektori iz Z^2, tada je $\|a-b\|=[(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2]^{1/2}$. Kažemo da su a i b (slabo susedni) susedni ako je ($\|a-b\|<2$) $\|a-b\|=1$.

Neka su a,b proizvoljni vektori iz Z^2. Niz $p_0=a,p_1,\dots$ $\dots,p_m=b$ se naziva (slabim) **lancem** koji povezuje a s poljem b ako su polja p_{i-1} i p_i (slabo) susedna za svako i, $1\leq i\leq m$. Skup V, $V\subseteq Z^2$, je (slabo) povezan ako za svako a i b iz V postoji (slabi) lanac u V, koji ih povezuje. **Komponenta** (slabe) povezanosti skupa V je svaki maksimalno (slabo) povezan podskup skupa V.

P-lavirint je svako preslikavanje c, $c:Z^2\to E^2$, takvo da je $P_c=c^{-1}(\{1\})$ povezan skup. Neka je p_0 proizvoljno polje iz P_c. Par (c,p_0) se naziva p-lavirintom c s početkom p_0. P-lavirint je (konačan) beskonačan, ako je skup P_c (konačan) beskonačan. U sledeće dve glave pod p-lavirintom ćemo podrazumevati konačan p-lavirint. **Rupom** p-lavirinta c nazivamo proizvoljnu komponentu slabe povezanosti skupa $Z^2\backslash P_c$. Jasno je, da za svaki p-lavirint postoji samo jedna beskonačna rupa. Za proizvoljne p-lavirinte c_1 i c_2 pišemo $c_1\leq c_2$, ako je $P_{c_1}\subseteq P_{c_2}$.

Neka je c proizvoljan p-lavirint. Posmatrajmo graf $G_c=(P_c,X_c)$, gde je P_c skup čvorova, X_c skup grana, i p_1 je povezano sa p_2 granom iz X_c tada i samo tada, kada su p_1 i p_2 susedna polja; $p_1,p_2\in P_c$. U slučaju ako je G_c drvo, p-lavirint c se naziva **linearnim**. Takođe, sa proizvoljnim p-lavirintom c povežimo i označeni orgraf $\tilde{G}_c$. Taj orgraf, takođe, kao svoje čvorove ima skup P_c i iz čvora p_1 polazi grana ka čvora p_2, označena simbolom $\omega\in\{e,s,w,n\}$, ako je $p_2=p_1+\omega$; $p_1,p_2\in P_c$.

Neka je c proizvoljan p-lavirint i π jedna od cikličkih permutacija π^- i π^+. Za proizvoljne $M\subset\Theta$, $M\neq\Phi$, i $\omega\in\Theta$ sa $\pi_M(\omega)$ označimo elemenat $\pi^{d_0}(\omega)$, gde je $d_0=\min\{d\in N\ \{0\}\,|\,\pi^d(\omega)\in M\}$. Neka je takođe $\Theta(p)=\{\alpha\in\Theta\,|\,p+\alpha\in P_C\}$ i $p_{\alpha_1,\alpha_2}=p+(\alpha_1,\alpha_2)$ za proizvoljno p i (α_1,α_2) iz Z^2.

Neka su dati inicijalni automat $\mathfrak{A}_i=(A_i,Q_i,B_i,\varphi_i,\psi_i,q_{i0})$ i niska $\vec{V}_i=(p_1^i,\ldots,p_{n_i}^i)$ nenula vektora iz Z^2 za svako i, $1\leq i\leq n$. Pretpostavimo da je automat $\mathfrak{A}_i$ takav da je $B_i\subset V_i'=\{\vec{0},p_1^i,\ldots$ $\ldots,p_{n_i}^i\}$, i A_i skup svih

$$a^i=(a_0^i,a_1^i,\ldots,a_{n_i}^i)\in[\{0,1\}\cup P_0[\bigcup_{j=1}^{n}(\{j\}\times Q_j)]]^{n_i+1}$$

koji zadovoljavaju uslov: ako je $a_{k_l}^i\notin\{0,1\}$, $l=1,2,3$, to je $pr_1(a_{k_1}^i)\cap pr_1(a_{k_2}^i)=\Phi$ i $|a_{k_3}^i\cap\{j\}\times Q_j|\leq 1$ za svako j, $1\leq j\leq n$; $0\leq k_1$, $k_2,k_3\leq\ \leq n_i$, $k_1\neq k_2$; $1\leq i\leq n$. Dopustimo dalje da za proizvoljno $q\in Q_i$, ako je $a_0^i\neq 0$ i $\psi_i(q,a^i)=p_k^i$ za neko k, $0\leq k\leq n_i$, to je $a_k^i\neq 0$; $p_0^i=0$; $1\leq i\leq n$. Sistem $A=(\mathfrak{A}_1,\ldots,\mathfrak{A}_n)$ koji zadovoljava gore date uslove se naziva sistemom interagujućih regularnih pešaka, a niska $\vec{V}_i$, $1\leq i\leq n$, vidnim poljem pešaka $\mathfrak{A}_i$. Specijalni slučaj sistema interagujućih regularnih pešaka je taj kada se on satoji od samo jednog elementa. Tada ćemo govoriti prosto o regularnom pešaku. Jasno je da ako je $\mathfrak{A}=(A,Q,B,\varphi,\psi,q_0)$ regularan pešak i $\vec{V}=(p_1,\ldots,p_n)$ vidno polje tog pešaka, to je $A=(E^2)^n$.

Neka je A, $A=(\mathfrak{A}_1,\ldots,\mathfrak{A}_n)$, proizvoljan sistem interagujućih pešaka i a, $a=(a_0,a_1,\ldots,a_{n_i})$, proizvoljan elemenat skupa A_i za neko i, $1\leq i\leq n$; A_i, $1\leq i\leq n$, - skup ulaza pešaka $\mathfrak{A}_i$. Sa $\bar{a}$ često ćemo označavati nisku $(a_0',\ldots,a_{n_i}')\in[\{0,1\}]^{n_i+1}$, takvu da je $a_j'=0$ ako je $a_j=0$, i $a_j'=1$ u protivnom; $0\leq j\leq n_i$. Takođe ako je za pešaka $\mathfrak{A}_i$ niska $\vec{V}_i=(p_1^i,\ldots,p_{n_i}^i)$ vidno polje i $p_j^i=(\alpha_j^1,\alpha_j^2)$, $0\leq j\leq n_i$, to pod $a_{\alpha_j^1,\alpha_j^2}$ podrazumevamo a_j; $\vec{p_0^i}=0$.

Neka je c proizvoljni p-lavirint, i z_0^i, $1\leq i\leq n$, proizvoljna polja iz P_c. Tada ponašanjem sistema pešaka A u p-lavirintu c nazivamo niz $\pi(A;c,\vec{z}_0)$: $(\vec{z}_0,\vec{a}_0,\vec{B}_0,\vec{q}_0)$, $(\vec{z}_1,\vec{a}_1,\vec{B}_1,\vec{q}_1),\ldots$, gde je $\vec{z}_t=(z_t^1,\ldots,z_t^n)$, $\vec{a}_t=(a_t^1,\ldots,a_t^n)$, $a_t=(a_{t0}^j, \ldots,a_{tn_j}^j)\in A_j$ $(1\leq j\leq n)$, $\vec{B}_t=(b_t^1,\ldots,b_t^n)$, $b_t^j\in B_j$ $(1\leq j\leq n)$ i $\vec{q}_t=(q_t^1, \ldots,q_t^n)$, $q_t^j\in Q_j$ $(1\leq j\leq n)$, takvo da je $\vec{z}_{t+1}=\vec{z}_t+\vec{B}_t$, $b_t^j=\psi_j(q_t^j,a_t^j)$, $q_{t+1}^j=\varphi_i(q_t^j,a_t^j)$, a

$$a_{tk}^j=\begin{cases}0, & \text{pri } z_t^j+p_k^j\in P_c;\\ 1, & \text{pri } z_t^l-z_t^j\neq p_k^j \text{ za svako } l\neq j, 1\leq l\leq n, \text{ i } z_t^j+p_k^j\in P_c;\\ \{(j',q_t^{j'})\,|\,z_t^{j'}-z_t^j=p_k^j, j'\neq j, 1\leq j'\leq n\} & \text{u ostalim slučajevima.}\end{cases}$$

Ako je dat sistem interagujućih regularnih pešaka $A=(\mathfrak{A}_1,\ldots,\mathfrak{A}_n)$ i njegovo ponašanje $\pi(A;c,\vec{z}_0)$: $(\vec{z}_0,\vec{a}_0,\vec{B}_0,\vec{q}_0)$, $(\vec{z}_1,\vec{a}_1, \vec{B}_1,\vec{q}_1),\ldots$, to za svako i, $1\leq i\leq n$, i svako t, $t=0,1,\ldots$, kažemo da se u momentu t regularni pešak $\mathfrak{A}_i$ nalazi u stanju q_t^i i leži na polju z_t^i. Jasno je, da je za svako t, $t=0,1,\ldots$, $\vec{z}_t\in P_c^n$. U daljem ćemo uvek uzimati da je $\vec{V}_i=\vec{V}_0$ i $B_i=\theta_0$ za svako i, $1\leq i\leq n$, gde je

$$\vec{V}_0=((1,-1),(1,0),(1,1),(0,-1),(0,1),(-1,-1),(-1,0),(-1,1)).$$

Ako posmatramo ponašanje takvog sistema u p-lavirintu c, to ćemo uvek pretpostaviti, da je $z_0=z_0^1=\ldots=z_0^n$. Znači, dalje ćemo govoriti o ponašanju sistema interagujućih regularnih pešaka $A=(\mathfrak{A}_1,\ldots,\mathfrak{A}_n)$ u p-lavirintu (c,z_0), $z_0\in P_c$. Takođe u daljem pod sistemom pešaka se podrazumeva sistem interagujućih regularnih pešaka. Neka je

$$\mathrm{Int}(\mathcal{A};c,z_0)=\bigcup_{i=0}^{\infty}\left(\bigcup_{j=1}^{n} z_i^j\right).$$

Skup

$$\mathrm{Fr}(\mathcal{A};c,z_0)=P_c\setminus\mathrm{Int}(\mathcal{A};c,z_0)$$

se naziva krajem za sistem $\mathcal{A}$ u (c,z_0). Ako je $\mathrm{Int}(\mathcal{A};c,z_0)=\Phi$, to kažemo da sistem $\mathcal{A}$ obilazi p-lavirint c; ako poslednji uslov važi za svako $z_0\in P_c$, to sistem $\mathcal{A}$ jako obilazi c.

Napokon, dajmo neke konvencije kojima ćemo se koristiti ubuduće.

Za proizvoljnog pešaka $\mathfrak{A}$ često ćemo sa $A_{\mathfrak{A}}$, $Q_{\mathfrak{A}}$ i $B_{\mathfrak{A}}$ označavati redom njegov skup ulaza, skup stanja i skup izlaza, a sa $\psi_{\mathfrak{A}}$ i $\varphi_{\mathfrak{A}}$ redom njegove funkcije izlaza i prelaza.

Neka je $\mathcal{A}=(\mathfrak{A}_1,\dots,\mathfrak{A}_n)$ proizvoljan sistem interagujućih pešaka i c proizvoljan p-lavirint. Pretpostavimo da je pešak $\mathfrak{A}_i$ u stanju q_i i leži na polju p_i; $q_i\in Q_{\mathfrak{A}_i}$; $p_i\in P_c$; $1\le i\le n$. Odredimo ulaz $a_{\mathfrak{A}_i}(p_i)$ pešaka $\mathfrak{A}_i$,$1\le i\le n$, na sledeći način:

$$[a_{\mathfrak{A}_i}(p_i)]_{\alpha_1,\alpha_2}=\begin{cases}0, & \text{pri } p_i+(\alpha_1,\alpha_2)\notin P_c;\\ 1, & \text{pri } p_j-p_i\neq(\alpha_1,\alpha_2) \text{ za svako } j\neq i, 1\le j\le n, \text{ i } p_i+(\alpha_1,\alpha_2)\in P_c;\\ \{(j',q_{j'})\mid p_{j'}-p_i=(\alpha_1,\alpha_2), j'\neq i, 1\le j'\le n\} & \text{u protivnom;}\end{cases}$$

$(\alpha_1,\alpha_2)\in V_0'$. Jasno je, da $a_{\mathfrak{A}_i}(p_i)$ zavisi od $\mathcal{A}$ i od razmeštaja pešaka tog sistema, t.j. od $\{p_i\}_{i=1}^{n}$. No, pošto će uvek biti jasno iz konteksta o kakvom se sistemu radi i gde se pešaci tog sistema nalaze, to ćemo se koristiti tim oznakama bez posebnog naglašavanja istih.

2. Automati-miševi i ravni lavirinti

Svi pojmovi i rezultati u ovom paragrafu su uzeti iz [8]. Pojmovi regularnog pešaka i sistema interagujućih pešaka su na neki način uopštenja pojma automata-miša iz [8].

Neka je $\mathfrak{A}=(A,Q,B,\varphi,\psi,q_0)$ proizvoljan konačni automat i $\mathfrak{A}'=(B,Q',A,\varphi',\psi',q_0')$ inicijalni konačni automat Mura, t.j. automat kod kojeg funkcija izlaza ne zavisi od ulaza, $\psi'=\psi'(q')$. **Interakcijom automata** $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{A}'$ nazovimo niz (q_0,q_0',a_0,b_0), $(q_1,q_1',a_1,b_1),\ldots$, takav, da je $a_0=\psi'(q_0')$, $b_0=\psi(q_0,a_0)$, $q_{i+1}=\varphi(q_i,a_i)$, $q_{i+1}'=\varphi'(q_i',b_i)$, $a_{i+1}=\psi'(q_{i+1}')$ i $b_{i+1}=\psi(q_{i+1},a_{i+1})$. Taj niz, kao što nije teško videti, opisuje ponašanje sistema koji nastaje spajanjem izlaza od $\mathfrak{A}$ sa ulazom od $\mathfrak{A}'$ i ulaza automata $\mathfrak{A}$ sa izlazom automata $\mathfrak{A}'$. Primetimo da je pri takvom vezivanju neophodno da je jedan od njih, u našem slučaju $\mathfrak{A}'$, automat Mura.

Pri razmatranju interakcije dva automata prirodno se nameće sledeći pojam upravljanja. Neka je $S\subseteq A$. Kažemo da automat $\mathfrak{A}$ **S-upravlja** automatom $\mathfrak{A}'$ ako se u interakciji tih automata na izlazu automata $\mathfrak{A}'$ u nekom momentu pojavi signal iz skupa S. Automat $\mathfrak{A}'$ se naziva **S-upravljivim** ako postoji reč $\beta\in B^*$, takva da je $\psi'(q_0',\beta)\in S$. Moguće je pokazati da je interakciju automata $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{A}'$ moguće predstaviti kao proces kretanja automata $\mathfrak{A}$ po nekom lavirintu, a upravljanje automatom $\mathfrak{A}'$ kao traženje s automatom $\mathfrak{A}$ izlaza iz tog lavirinta.

Neka su A i B konačni neprazni skupovi. Nazovimo **orjentisanim (A,B)-lavirintom** konačni orgraf L, sa izdvojenim čvorom 0 i izdvojenim podskupom $S\subseteq A$, za koji su ispunjeni sledeći uslovi:

a) svakom čvoru v dodeljen je simbol $\rho(v)\in A$;

b) svakoj grani je dodeljen simbol iz B, pri čemu različitim granama su dodeljeni različiti simboli;

v) skup $\theta(v)$ oznaka grana koje izlaze iz čvora v jednoznačno se određuje po oznaci a tog čvora: $\theta(v)=\gamma(a)$;

g) postoji put od čvora 0 do čvora koji je označen simbolom iz S.

Čvor 0 se naziva **početkom lavirinta**; svaki čvor označen sa simbolom iz S se naziva **izlazom** lavirinta L.

Kažemo da je konačni inicijalni automat $\mathfrak{A}=(A,Q,B,\varphi,\psi,q_0)$ **dopustiv** za lavirint L ako je ispunjen uslov da je

$$\forall q\in Q\ \forall a\in A\ (\psi(q,a)\in\gamma(a)).$$

Ako je automat $\mathfrak{A}$ dopustiv za orjentisani lavirint L, to se **ponašanjem** $\mathfrak{A}$ u L naziva beskonačan niz oblika (q_0,v_0,a_0,b_0), $(q_1,v_1,a_1,b_1),\ldots$, gde je $v_0=0$; $a_i=\rho(v_i)$; $b_i=\psi(q_i,a_i)$; $q_{i+1}=\varphi(q_i,a_i)$ i v_{i+1} je čvor ka kome od v_i polazi grana sa oznakom b_i. Ako je barem jedan od čvorova v_i u tom nizu izlaz iz L, to kažemo da $\mathfrak{A}'$ **izlazi**[1] iz L.

Dodelimo proizvoljnom upravljivom inicijalnom automatu Mura $\mathfrak{A}'=(B,Q',A,\varphi',\psi',q_0')$, sa izdvojenim podskupom S izlaznih simbola, orjentisani lavirint L($\mathfrak{A}'$) koji se dobija iz dijagrama Mura automata $\mathfrak{A}'$ ako u njemu kod svake strelice ostavimo samo oznaku ulaznog signala i svakom čvoru pripišemo odgovarajući izlazni signal. Početak tog lavirinta je čvor koji odgovara

[1] umesto reči obilazi iz [8] ovde upotrebljavamo reč izlazi, zato što smo reč obilazi upotrebili već u vezi s regularnim pešacima u nešto izmenjenom smislu.

stanju q_0', izlaz - svaki čvor sa oznakom iz S. Očito da se interakcija svakog automata $\mathfrak{A}$ sa automatom $\mathfrak{A}'$ podudara sa ponašanjem automata $\mathfrak{A}$ u lavirintu $L(\mathfrak{A}')$, pri čemu $\mathfrak{A}$ S-upravlja automatom $\mathfrak{A}'$ tada i samo tada, kada $\mathfrak{A}$ izlazi iz lavirinta $L(\mathfrak{A}')$.

Obratno, ako je dat neki orjentisani (A,B)-lavirint L, to njemu dodelimo automat Mura $\mathfrak{A}'=(B,Q',A,\varphi',\psi',0)$ čiji je skup stanja Q' skup čvorova L; $\varphi'(q,b)$ se određuje, kao čvor u koji iz q polazi grana sa oznakom b ako je $b\in\theta(q)$ i $\varphi'(q,b)=q$ u protivnom; $\psi'(q)$ je oznaka čvora q i 0 je početni čvor od L. Očigledno da svaki automat koji izlazi iz L, S-upravlja automatom $\mathfrak{A}'$ i za svaki automat koji S-upravlja automatom $\mathfrak{A}'$ je lako napraviti automat koji izlazi iz L. Na taj način, problemi konstrukcije automata koji upravlja datim automatom i automata koji izlazi iz datog lavirinta su u određenom smislu ekvivalentni.

Neka je $B=\{w,s,e,n\}$ i neka je A skup svih parova oblika (M,μ), gde je M neprazan podskup skupa B i $\mu\in\{0,1\}$. Nadalje ćemo razmatrati (A,B)-lavirinte koji ispunjavaju sledeće uslove:

1) ako iz čvora v_1 polazi ka čvoru v_2 grana sa oznakom x, to iz v_2 ka v_1 polazi grana sa oznakom x^{-1};

2) ako je skup oznaka grana, koje polaze iz čvora v, $\theta(v)$, to oznaka tog čvora v je oblika $(\theta(v),\mu)$;

3) S je skup oznaka oblika $(M,1)$, pri čemu u lavirintu postoji jedinstven čvor označen simbolom iz S. Taj čvor označimo sa T i nazovimo izlazom iz lavirinta.

Lavirint L se naziva ravnim ako su njegovi čvorovi tačke ravni sa celobrojnim kordinatama, pri čemu grana koja polazi iz nekog čvora (i,j) se može završavati samo u jednom od čvorova (i+1,j), (i-1,j), (i,j+1) i (i,j-1), i ima, kao svoju oznaku, simbol ω odgovarajućeg pravca, $\omega\in\{w,s,e,n\}$. Neka je $\kappa(i,j)=\{(i,j),(i+1,j),(i,j+1),(i+1,j+1)\}$. Ako za svako $\kappa(i,j)$ koje je podskup skupa svih čvorova lavirinta L iz toga što tri para grana sa oznakama x i x^{-1}, $x\in\{w, s,e,n\}$, koje povezuju neke od čvorova iz $\kappa(i,j)$ leže u L sledi da i četvrti par pripada L, to lavirint L nazivamo **kvadratnim**. Jasno je, da za svaki p-lavirint c označeni graf $\overline{G}_c$ (zajedno sa odgovarajućim oznakama čvorova) je ravan lavirint, t.j. ako pod p-lavirintom podrazumevamo njegov odgovarajući označeni graf, to je klasa svih p-lavirinata podklasa klase svih ravnih lavirinata. Sa druge strane, jasno je, da ako je neki ravan lavirinat L kvadratni, to je taj lavirint (bez oznaka njegovih čvorova) označeni graf nekog p-lavirinta $\zeta(L)$.

Ravan lavirint je **pravilan**, ako postoji put, koji ide po granama celobrojne rešetke i počinje u T, koji se ne seče sa čvorovima i granama iz L i koji se udaljava u beskonačnost. Automat dozvoljen za lavirint razmatranog oblika se naziva **mišem**.

Neka je $\mathfrak{A}$ neki miš, $\mathfrak{A}'$ - neki regularni pešak sa vidnim poljem $\vec{V}$, a L - neki kvadratni lavirint sa početkom u z_0. Sa $\pi(\mathfrak{A};L,z_0)$: $(q_0,v_0,a_0,b_0),(q_1,v_1,a_1,b_1),\ldots$ i $\pi(\mathfrak{A}';\zeta(L),z_0)$: (p_0,a_0,b_0,q_0), $(p_1,a_1,b_1,q_1),\ldots$, označimo redom ponašanje miša $\mathfrak{A}$ u L i ponašanje regularnog pešaka $\mathfrak{A}'$ u $\zeta(L)$. Kažemo da je $\mathfrak{A}$ **sličan** sa $\mathfrak{A}'$ nad L ako je za svako i, $p_i=v_i$; i=0,1,... Neka je

L neki kvadratni lavirint. Tada je jasno da za svakog miša $\mathfrak{A}$ postoji pešak $\mathfrak{A}'$ (on u opštem slučaju nije jedinstven) sa vidnim poljem $\vec{V}=(e,n,w,s)$, koji je sličan sa $\mathfrak{A}'$ na L.

Važi sledeća teorema.

<u>Teorema 2.1.</u> Za svakog miša $\mathfrak{A}$ postoji pravilni lavirint iz koga taj miš ne izlazi.

Dokaz te teoreme se može naći u [10], a u bitno uprošćenom obliku u [8]. Nama će nadalje biti potrebna neka tvrđenja koja u [8] prethode samom dokazu teoreme 2.1. Primetimo, takođe, da iz dokaza ove teoreme u [8] sledi da za svakog miša možemo pretpostaviti da u odgovarajućoj njegovoj "klopki" oznaka za njegovu početnu tačku 0 ima oblik $(\{e,n,w,s\},0)$.

Označimo sa R skup svih nepraznih reči $p=x_1\ldots x_n$ nad B, takvih da je za svako i, $1\leq i\leq n-1$, $x_{i+1}\neq x_i^{-1}$. Uzmimo da je $p^{-1}=x_n^{-1}\ldots x_1^{-1}$. Konačan orgraf L sa izdvojenim čvorovima 0 i T, čijim su granama dodeljene reči iz R, nazivamo **kvazilavirintom** ako su ispunjeni sledeći uslovi:

a) reči dodeljene različitim granama koje izlaze iz jednog čvora počinju sa različitim slovima;

b) ako iz v_1 u v_2 polazi grana kojoj je dodeljena reč p, to iz v_2 u v_1 polazi grana kojoj je dodeljena reč p^{-1};

d) postoji put od čvora 0 do čvora T. Kao i u slučaju lavirinata, 0 se naziva početkom, a T izlazom iz L.

Neka u kvazilavirintu L od čvora u ka čvoru v ide grana označena sa $p=x_1\ldots x_n$, gde je n>1. Tada od v ka u ide grana označena sa rečju $p^{-1}=x_n^{-1}\ldots x_1^{-1}$. Udaljimo iz L te dve grane i umesto njih prisajedinimo kvazilavirintu L lanac $\omega_1,\dots,\omega_{n-1}$ novih čvorova takvih da od ω_i do ω_{i+1} ide grana x_{i+1}, a od ω_{i+1} do ω_i grana x_{i+1}^{-1}; $\omega_0=u$; $\omega_n=v$; $i=0,1,\dots,n-1$. Uradivši tu operaciju za sve grane od L, a, takođe, dodelivši svakom čvoru $v\neq T$ oznaku $(\theta(v),0)$, a čvoru T oznaku $(\theta(T),1)$, dobijamo neki lavirinat koji označimo sa $\psi(L)$. Očigledno da skup čvorova $\psi(L)$ sadrži skup čvorova od L. Neka je niz (s_0,v_0,a_0,b_0), $(s_1,v_1,a_1,b_1),\dots$ ponašanje miša $\mathfrak{A}$ u lavirintu $\Psi(L)$. Tada **ponašanjem miša $\mathfrak{A}$ u kvazilavirintu** L nazovimo podniz toga niza koji odgovara čvorovima v_i kvazilavirinta L (ono može biti i konačno).

Neka je $p,q\in R$ i $\mathfrak{A}$ miš. Kažemo da su reči p i q **$\mathfrak{A}$-ekvivalentne** ako za svaki kvazilavirint L i svaku njegovu granu sa oznakom p zamenom oznake p sa q (a, takođe, istovremenom zamenom oznake p^{-1} sa q^{-1}) ponašanje $\mathfrak{A}$ u L se ne menja. Tada

<u>Tvrđenje 2.1.</u> Za svaku reč p iz R i svakog miša $\mathfrak{A}$ postoji takav prirodan broj l da su sve reči oblika p^{li}; $i=1,2,\dots$ $\mathfrak{A}$-ekvivalentne.

Za zadatog miša $\mathfrak{A}$ primenimo tvrđenje 2.1 na reči e,n,w,s; uzmimo najmanji opšti sadržalac odgovarajućih vrednosti l i označimo njega sa l'. Označimo: $\tilde{e}=e^{l'}$, $\tilde{w}=w^{l'}$, $\tilde{n}=n^{l'}$, $\tilde{s}=s^{l'}$; $\tilde{B}=\{\tilde{e},\tilde{n},\tilde{w},\tilde{s}\}$. Kvazilavirint, kod kojeg svaka dodeljena reč nekoj njegovoj grani je reč nad $\tilde{B}$, je **$\mathfrak{A}$-kvazilavirint**. Dve reči p i q nad $\tilde{B}$ su **slične** ako se jedna iz njih dobija iz druge zamenama oblika $x\longleftrightarrow xx$ $(x\in\tilde{B})$. Ako je $\mathfrak{A}$-kvazilavirint L_1 dobijen iz $\mathfrak{A}$-kvazilavirinta L_2 zamenama oznaka grana na slične njima oznake, to kažemo da su L_1 i L_2 **slični**. Očigledno da su ponašanja $\mathfrak{A}$ u L_1 i L_2 jednaka.

Kvazilavirint L je **ravan** ako je lavirint $\Psi(L)$ ravan. $\mathfrak{A}$-kvazilavirint L zovemo **planarnim** ako postoji sličan njemu ravan kvazilavirint.

Pretpostavimo da je svakom čvoru v $\mathfrak{A}$-kvazilavirinta L dodeljena uzajamno jednoznačno tačka ravni $\varphi(v)$, a grani koja polazi iz u ka v izlomljena linija koja se sastoji od horizontalnih i vertikalnih odsečaka koja povezuje $\varphi(u)$ i $\varphi(v)$, pri čemu, ako je grani dodeljena reč p i $p=x_1\ldots x_n$, to je prvi odsečak te izlomljene linije usmeren u pravcu x_1, drugi u pravcu x_n i.t.d. Neka se takođe (izuzev početaka i krajeva) različite izlomljene linije ne presecaju. Obrazovanu svim tim izlomljenim linijama figuru nazivamo potapanjem od L. U [8] se pokazuje da je $\mathfrak{A}$-kvazilavirint L planaran tada i samo tada, kada postoji neko njegovo potapanje u ravni. Ako je to potapanje takvo da su njegovi čvorovi u temenima celebrojne rešete sa korakom 1, a izlomljene linije idu po granama te rešetke, to se to potapanje naziva 1-potapanjem. Iz rezultata dobijenih u [8] sledi i takvo tvrđenje.

<u>Tvrđenje 2.2.</u> Za svakog miša postoji planarni $\mathfrak{A}$-kvazilavirint L i broj 1, takvi, da za svako i, i=1,2, ..., svako njegovo il-potapanje je klopka za datog miša.

Glava 6.

O strukturi univerzalnih lavirinata-klopki za konačan skup automata i automati sa malim brojem stanja u lavirintima

U ovoj glavi se izučava problem postojanja univerzalnog sistema automata koji obilazi sve povezane lavirinte u ravni. U radu [11] je ustanovljeno da ne postoje takvi konačni sistemi uopštavanjem glomaznog algebarskog dokaza iz [10], za sistem od jednog automata, na opšti slučaj. U [8] dokaz nepostojanja univerzalnog sistema od jednog automata je dobijen na bitno prostiji način. Ovde ćemo na elementaran način dokazati nepostojanje konačnog univerzalnog sistema automata već za klasu takozvanih p-lavirinata.

1. Osnovni pojmovi i rezultati

Ograničimo se slučajem sistema koji se sastoji samo iz jednog inicijalnog regularnog pešaka $\mathfrak{A}_{q_0}$. Takođe, za pešaka $\mathfrak{A}_{q_0}$ posmatrajmo i odgovarajući neinicijalni automat $\mathfrak{A}$, koji se u tom slučaju naziva **neinicijalnom regularnim pešakom**. Drugim rečima, ako je $\mathfrak{A}$ proizvoljni neinicijalni automat, to ćemo njega nazvati neinicijalnim regularnim pešakom, ako za neko $q_0 \in Q$, automat $\mathfrak{A}_{q_0}$ je regularan pešak. Ovde ćemo, kao i gore, pretpostaviti da je $B=\theta_0$ i, kao vidno polje uzećemo $\vec{V}_0$.

Neka je C proizvoljna klasa p-lavirinata i $\mathfrak{A}$ proizvoljni neinicijalni regularni pešak. Ako za svako $q\in Q_{\mathfrak{A}}$, $c\in C$ i $p\in P_c$, pešak $\mathfrak{A}_q$ obilazi p-lavirinat (c,p), to se taj pešak naziva **univerzalnim za klasu** C. Označimo sa $\mathrm{Un}(C)$ klasu svih takvih pešaka. **Karakterističnim brojem** klase C nazivamo broj

$$\mathrm{Char}(C)=\min_{\mathfrak{A}\in \mathrm{Un}(C)} |Q_{\mathfrak{A}}|.$$

Označimo sa C_4 klasu svih konačnih p-lavirinata bez konačnih rupa.

Neka je c proizvoljni p-lavirinat i $\vec{V}=(p_1,p_2,\dots,p_n)$ proizvoljna niska vektora iz Z^2. Za proizvoljno p iz Z^2 sa $\vec{V}(p)$ označimo nisku $(p+p_1,p+p_2,\dots,p+p_n)$. Kaže se da je p-lavirint c **$\vec{V}$-lokalno kopovežan**, ako je $(Z^2\backslash P_c)\cap\vec{V}(p)$ ili prazan, ili povezan skup za svako p, $p\in P_c$. Sa C_2 označimo klasu svih $\vec{V}_0$-lokalno kopovezanih p-lavirinata bez konačnih rupa.

Za proizvoljan p-lavirint c pod $\mathrm{Nb}(c)$ se podrazumeva skup svih polja iz $Z^2\backslash P_c$ koja su susedna sa barem jednim poljem iz P_c. Odredimo klasu p-lavirinata C_3 na sledeći način. P-lavirint c pripada klasi C_3 tada i samo tada, kada postoji p-lavirint c' iz C_2, takav, da je $P_c\backslash \mathrm{Nb}(c')=P_{c'}$, i u skupu $P_c\cap\mathrm{Nb}(c')$ nema susednih polja.

Važi sledeća teorema.

Teorema 1.1. $\mathrm{Char}(C_i)=i$, $i=2,3,4$.

P-lavirinat c se naziva **slabom klopkom** za neinicijalnog pešaka $\mathfrak{A}$ ako postoje $p_0\in P_c$ i $q_0\in Q_{\mathfrak{A}}$, takvi, da pešak $\mathfrak{A}_{q_0}$ ne obilazi p-lavirinat (c,p_0); u slučaju da posljednji uslov važi za svako $p_0 \in P_c$ i $q_0 \in Q$ rećićemo da je p-lavirinat **klopka** za $\mathfrak{A}$. Na analogan način se može definisati pojam klopke i slabe klopke za inicijalnog regularnog pešaka.

Neka je $\mathfrak{M}$ klasa inicijalnih regularnih pešaka. P-lavirint c se naziva **slabom univerzalnom klopkom za klasu** $\mathfrak{M}$, ako postoji p_0, $p_0 \in P_c$, takvo da svaki pešak $\mathfrak{A}$ iz $\mathfrak{M}$ ne obilazi p-lavirint (c,p). Ako poslednji uslov važi za svako p iz P_c, to se c naziva **univerzalnom klopkom za klasu** $\mathfrak{M}$. **Kraj** klase pešaka $\mathfrak{M}$ u p-lavirintu (c,p) je skup

$$\mathrm{Fr}(\mathfrak{M};c,p)=\bigcap_{\mathfrak{A}\in\mathfrak{M}}\mathrm{Fr}(\mathfrak{A};c,p).$$

Ako je $\mathrm{Fr}(\mathfrak{M};c,p)\neq\phi$, i ako postoji beskonačan linearan p-lavirint c' takav da je $P_c \cap P_{c'} (\neq\phi) \subseteq \mathrm{Fr}(\mathfrak{M};c,p)$, to se p-lavirint (c,p) naziva **pravilnom klopkom** za klasu $\mathfrak{M}$.

Može se dokazati sledeća teorema.

<u>Teorema 1.2.</u> Za svaku konačnu klasu $\mathfrak{M}$ regularnih pešaka postoji pravilna klopka.

Pošto je klasa svih p-lavirinata, u stvari, podklasa svih ravnih lavirinata, a automati-pešaci "imaju bolje vidno polje" nego odgovarajući "automati-miševi", to iz teoreme 1.2 direktno sledi tvrđenje sledeće teoreme.

<u>Teorema 1.2'.</u> Za proizvoljni konačan skup miševa postoji pravilan lavirint iz koga svaki ponaosob od njih ne izlazi.

Važi takođe sledeća:

<u>Teorema 1.3.</u> Za svaku konačnu klasu $\mathfrak{M}$ regularnih pešaka postoji univerzalna klopka.

<u>Posledica 1.1.</u> Za svaki neinicijalan pešak postoji klopka.

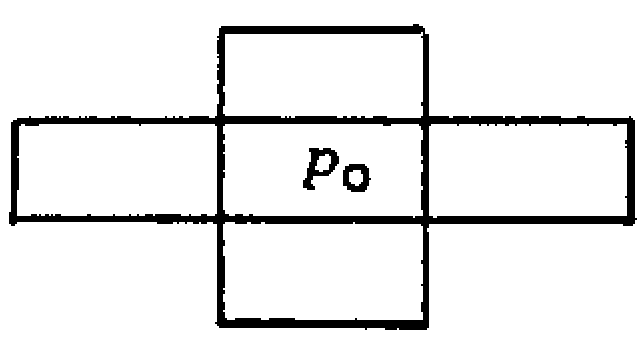
Za dati graf G **obrtanje čvora** a grafa G je orjentisani ciklički poredak (ili ciklička permutacija) svih grana koje su incidentne sa a ([12]). **Obrtanje** σ **grafa** G je obrtanje svih čvorova grafa G. Zapis (G,σ) će označavati graf G sa nekim obrtanjem σ. Neka je a_0 čvor incidentan grani v_0 u grafu G sa obrtanjem (G,σ). Napravimo u grafu G zatvorenu maršrutu $a_0,v_0,a_1,v_1,a_2,v_2,\ldots$, gde v_i, $i=1,2,\ldots$, sledi za granom v_{i-1} u obrtanju čvora a_i, koje je određeno obrtanjem σ. Maršruta se završava tačno u momentu kada se ponovo mora ponoviti par a_0,v_0. Ta se zatvorena maršruta naziva ciklom, generisanim čvorom a_0 i granom v_0, i inducirani obrtanjem σ. Obrtanje koje inducira tačno jedan cikl se naziva **kružnim obrtanjem**. Važi sledeće tvrđenje.

<u>Tvrđenje 1.1.</u> Ako je graf G drvo, to je proizvoljno obrtanje grafa G kružno.

2. Dokaz teoreme 6.1.1

Dogovorimo se da ako je jasno o kakvom p-lavirintu c se radi, to se polja iz P_c nazivaju označenima.

a) $\mathrm{Char}(C_4)=4$. Ako uzmemo p-lavirint (c_0,p_0) dat na sl.7 (u stvari na sl.7 je dat skup P_{c_0}), to je jasno da nijedan pešak koji ima više od tri stanja ne obilazi taj p-lavirint; odavde je $\mathrm{Char}(C_4)\geq 4$.



Sl.7.

Pokažimo sada da važi i relacija Char$(C_4)\leq 4$. Opisaćemo univerzalnog pešaka $\mathfrak{A}^+$ klase C_4, kod kojeg je $Q_{\mathfrak{A}^+}=Q_0$. Neka je c proizvoljni p-lavirint iz C_4. Pravci koje pešak $\mathfrak{A}^+$ može izabrati, u zavisnosti od tipa vidnog polja, su dati na sl.8. Ovde su označena polja označena sa 1, a polja, koja mogu biti označena ili ne sa 2; pri tome $\mathfrak{A}^+$ se može kretati samo u pravcima koji su dati strelicama na sl. 8.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & 2 & & 2 \\ & & & & \\ 1 & \leftarrow & 1 & \rightarrow & 2 \\ & & & & \\ 1 & & 2 & & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 2 & & 2 & & 2 \\ & & \uparrow & & \\ 0 & & 1 & \rightarrow & 2 \\ & & \downarrow & & \\ 2 & & 2 & & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 0 & & 2 & & 2 \\ & & \uparrow & & \\ 1 & \leftarrow & 1 & \rightarrow & 2 \\ & & & & \\ 1 & & 2 & & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 1 & & 2 & & 2 \\ & & & & \\ 1 & \leftarrow & 1 & \rightarrow & 2 \\ & & \downarrow & & \\ 0 & & 2 & & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 0 & & 2 & & 2 \\ & & \uparrow & & \\ 1 & \leftarrow & 1 & \rightarrow & 2 \\ & & \downarrow & & \\ 0 & & 2 & & 2 \end{array}$$

sl.8.

Konkretni pravac pešak $\mathfrak{A}^+$ bira u zavisnosti od stanja u kome se nalazi. Očevidno je, da je p-lavirint c' kojeg "vidi" pešak $\mathfrak{A}^+$ linearan. Naime, pošto $\mathfrak{A}^+$ može ići u pravcima n i s samo ako se levo (gore, naspram ili dole) od polja na kome on leži nalazi neoznačeno polje, to ako bi graf $G_{c'}$ bio drvo, c bi bio p-lavirint sa rupom. Odredimo pešaka $\mathfrak{A}^+$, $\mathfrak{A}^+=(A',Q',B',\varphi',\psi')$, $Q'=Q_0$, na sledeći način. Pretpostavimo da se $\mathfrak{A}^+$ nalazi u stanju q_ω, $\omega\in\theta$, i leži na polju p p-lavirinta c. Jasno je, da $a_{\mathfrak{A}^+}(p)$ odgovara jednom od tipova "$\vec{V}_0$-okolina" datih na sl. 8. Sa M' označimo skup svih pravaca datih strelicama na slici tog tipa; $M'\subset\theta$. Neka je $M=\theta_c(p)\cap M'$. Tada je $\psi'(q_\omega,a_{\mathfrak{A}^+}(p))=\omega'$ i $\varphi'(q_\omega,a_{\mathfrak{A}^+}(p))=q_{\omega'}$, $\omega'=\pi^+_M(\bar{\omega})$. Neka se posle nekog vremena $\mathfrak{A}^+$ ponovo našao na polju p. Pošto je $G_{c'}$ drvo, prvi put, kada se to desilo, pešak $\mathfrak{A}^+$ će biti u stanju $\bar{\omega}'$. Znači, $\psi'(q_\omega,a_{\mathfrak{A}^+}(p))=$ $=\pi^+_M(\bar{\omega}')=\pi^+_M(\pi^+_M(\bar{\omega}))$. Koristeći tvrđenje 1.1, dolazimo do zaključka da je $\mathfrak{A}^+$, zaista, univerzalan pešak za klasu C_4.

Počinjući od cikličke permutacije π^- možemo, kao i gore, pokazati da odgovarajući pešak $\mathfrak{A}^-$ je, takođe, univerzalan za klasu C_4. Takođe iz teoreme 1.2. je jasno da postoji p-lavirint, koji ne pripada klasi C_4, kojeg ne obilazi nijedan pešak sa manje od pet stanja.

b) Char(C_2)=2. Pošto je jasno da je Char$(C_2)\geq 2$, to pokažimo samo još nejednakost Char$(C_2)\leq 2$. Opišimo pešaka $\mathfrak{A}_2$, univerzalnog za datu klasu C_2, i takvog da je $Q_{\mathfrak{A}_2}=\{q_u,q_d\}$. Neka je c proizvoljni p-lavirint iz $C_2\backslash L$, gde je L skup svih p-lavirinata c' kod kojih $P_{c'}$ ima oblik domina forme 1×2. Pešak $\mathfrak{A}_2$ se ponaša na c saglasno sa sledećim pravilima:

1)$\bar{F}_0 \wedge q_{\mathfrak{A}_2}(t)=q_u \rightarrow q_{\mathfrak{A}_2}(t+1)=q_u \wedge z\rightarrow z_{0,1}$;

2)$q_{\mathfrak{A}_2}(t)=q_d \wedge \bar{F}_1 \rightarrow q_{\mathfrak{A}_2}(t+1)=q_d \wedge z\rightarrow z_{0,-1}$;

3)$q_{\mathfrak{A}_2}(t)=q_d \wedge F_1 \wedge c(z_{0,1})=1 \rightarrow q_{\mathfrak{A}_2}(t+1)=q_u \wedge z\rightarrow z_{0,1}$;

4)$q_{\mathfrak{A}_2}(t)=q_d \wedge F_1 \wedge c(z_{0,1})=0 \rightarrow q_{\mathfrak{A}_2}(t+1)=q_u \wedge z\rightarrow z_{0,-1}$;

5)$q_{\mathfrak{A}_2}(t)=q_u \wedge F_2 \rightarrow q_{\mathfrak{A}_2}(t+1)=q_d \wedge z\rightarrow z_{0,-1}$;

6)$q_{\mathfrak{A}_2}(t)=q_u \wedge F_3 \rightarrow q_{\mathfrak{A}_2}(t+1)=q_d \wedge z\rightarrow z_{1,0}$;

7)$q_{\mathfrak{A}_2}(t)=q_u \wedge \bar{F}_2 \wedge \bar{F}_3 \wedge F_0 \rightarrow q_{\mathfrak{A}_2}(t+1)=q_u \wedge$ KSNS.

Ovde je: $q_{\mathfrak{A}_2}(t)$ - stanje pešaka $\mathfrak{A}_2$ u momentu t diskretnog vremena; z - polje datog p-lavirinta c na kome leži $\mathfrak{A}_2$; F_0 - pešak $\mathfrak{A}_2$ leži na granici p-lavirinta c (leži na polju skupa P_c, koje je slabo susedno s nekim poljem iz skupa $Z^2\backslash P_c$); KSNS - pešak $\mathfrak{A}_2$ se kreće duž granice saglasno sa negativnim smerom rotacije (to je moguće zahvaljujući tome što c pripada klasi $C_2\backslash L$). Napokon, gore pretpostavljamo, da je

$$F_1 \equiv z_{-1,-1}=0 \vee z_{0,-1}=0 \vee z_{1,-1}=0,$$

$$F_2 \equiv z_{1,0}=0 \wedge z_{0,-1}=1 \wedge z_{1,-1}=1$$

i

$$F_3 \equiv (z_{1,1}=0 \vee z_{0,1}=0) \wedge z_{1,0}=1.$$

Ako je $C\in L$, to je $\varphi_{\mathfrak{A}_2}(q,a_{\mathfrak{A}_2}(z))=q$ i $\psi_{\mathfrak{A}_2}(q,a_{\mathfrak{A}_2}(z))=\omega(z)$ za svako $q\in Q_{\mathfrak{A}_2}$; $\theta(z)=\{\omega(z)\}$. Lako se uveriti da je $\mathfrak{A}_2$ univerzalan pešak za klasu C_2. Znači, zaista je Char$(C_2)=2$.

v) Char$(C_3)=3$. Opišimo pešaka $\mathfrak{A}_3$, univerzalnog za klasu C_3, kod kojeg je $Q_{\mathfrak{A}_3}=\{q_u,q_u',q_d\}$. Neka je c proizvoljni p-lavirint iz C_3. Pešak $\mathfrak{A}_3$ "se ponaša" na c saglasno sa sledećim pravilima:

1)$\bar{F}_0 \wedge q_{\mathfrak{A}_3}(t)=q_u,q_u' \rightarrow q_{\mathfrak{A}_3}(t+1)=q_u' \wedge z\rightarrow z_{0,1}$;

2)$[\bar{F}_1 \wedge q_{\mathfrak{A}_3}(t)=q_d] \vee [q_{\mathfrak{A}_3}(t)=q_u,q_u' \wedge F_2] \rightarrow q_{\mathfrak{A}_3}(t+1)=q_d \wedge z\rightarrow z_{0,-1}$;

3)$q_{\mathfrak{A}_3}(t)=q_d \wedge F_4(0) \rightarrow q_{\mathfrak{A}_3}(t+1)=q_u' \wedge z\rightarrow z_{1,0}$;

4)$q_{\mathfrak{A}_3}(t)=q_d \wedge [(F_1 \wedge \bar{F}_4(0) \wedge c(z_{0,1})=1) \vee (F_4(1) \wedge c(z_{1,0})=0)] \rightarrow q_{\mathfrak{A}_3}(t+1)=q_u' \wedge z\rightarrow z_{0,1}$;

5)$q_{\mathfrak{A}_3}(t)=q_d \wedge F_1 \wedge \bar{F}_4(0) \wedge c(z_{0,1})=0 \wedge c(z_{0,-1})=1 \rightarrow q_{\mathfrak{A}_3}(t+1)=q_u' \wedge z\rightarrow z_{0,-1}$;

6)$[q_{\mathfrak{A}_3}(t)=q_u \vee (q_{\mathfrak{A}_3}(t)=q_u' \wedge \bar{F}_4(1))] \wedge F_3 \wedge \bar{F}_4(0) \rightarrow q_{\mathfrak{A}_3}(t+1)=q_d \wedge z\rightarrow z_{1,0}$;

7)$q_{\mathfrak{A}_3}(t)=q_u' \wedge F_4(j) \rightarrow q_{\mathfrak{A}_3}(t+1)=q_u' \wedge z\rightarrow z_j, 0\leq j\leq 3$;

8)$F_5(j) \rightarrow q_{\mathfrak{A}_3}(t+1)=q_u \wedge z\rightarrow z_{j+_4 3}, 0\leq j\leq 3$;

9)$q_{\mathfrak{A}_3}(t)=q_u \wedge F_0 \wedge \bar{F}_2 \wedge \bar{F}_3 \wedge \neg(\bigvee_{j=0}^{3} F_5(j)) \rightarrow q_{\mathfrak{A}_3}(t+1)=q_u' \wedge z\rightarrow z+\tilde{\omega}$;

10)$q_{\mathfrak{A}_3}(t)=q_u' \wedge F_0 \wedge \bar{F}_2 \wedge \bar{F}_3 \wedge \neg(\bigvee_{j=0}^{3} F_4(j)) \vee \neg(\bigvee_{j=0}^{3} F_5(j)) \rightarrow q_{\mathfrak{A}_3}(t+1)=q_u' \wedge z\rightarrow z+\tilde{\omega}$.

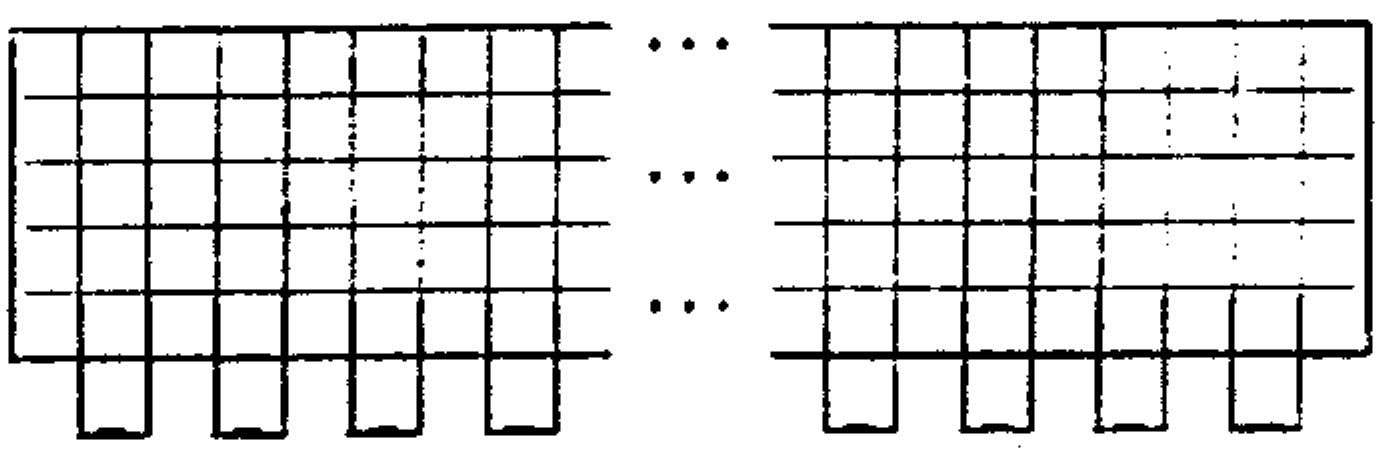
Ovde je,

$$F_4(j) \equiv z_j=1 \wedge z_j+i(z_j-z)=0 \wedge z_j-i(z_j-z)=0$$

i

$$F_5(j) \equiv z_j=0 \wedge z_{j+_4 1}=0 \wedge z_{j+_4 2}=0;\ 0\leq j\leq 3;$$

i - imaginarna jedinica (elementi skupa Z^2 se posmatraju kao odgovarajući kompleksni brojevi); $z_0=z_{1,0}$, $z_1=z_{0,1}$, $z_2=z_{-1,0}$, $z_3=z_{0,-1}$. Takođe, $\tilde{\omega}=\pi_{\theta_{c'}(z)}^{-}(\tilde{z})$, gde je c' p-lavirint takav da je $P_{c'}=P_c\setminus\{z\in P_c|(\exists j\in E^4)F_5(j)\}$, a $\tilde{z}$ - proizvoljni elemenat iz $\theta\setminus\theta_{c'}(z)$ (jasno je, da $\tilde{\omega}$ ne zavisi od izbora $\tilde{z}$). Ostale oznake u datim pravilima se poklapaju sa datim u b). Lako se uveriti, da je pešak $\mathfrak{A}_3$ zaista univerzalan za klasu C_3; znači, $\mathrm{Char}(C_3)\leq 3$. Ako uzmemo "dovoljno velike" p-lavirinte c, kod kojih skup P_c ima ili formu figure sa sl.9 ili figure koja se iz nje dobija rotacijom za ugao $\pi/2$, to je lako pokazati, da ne postoji nijedan pešak sa manje od tri stanja koji obilazi te



Sl.9.

lavirinte. Odavde je $\mathrm{Char}(C_3)\geq 3$, t.j. $\mathrm{Char}(C_3)=3$, što se i trebalo dokazati.□

3. Dokazi teorema 6.1.2 i 6.1.3

Dva proizvoljna p-lavirinta c_1 i c_2 se nazivaju ekvivalentnima, $c_1 \equiv c_2$, ako se translacijom skupa P_{c_2} u Z^2 može dobiti skup P_{c_1}; sa $T_{c_2}^{c_1}$ označimo tu translaciju. Ako je neko polje p p-lavirinta c označeno sa ω to smaatramo da je za svaki p-lavirint c', takav da je $c' \equiv c$, polje $T_c^{c'}(p)$, takođe, označeno sa ω. Nadalje će objekt našeg istraživanja biti niske oblika $(c; r_1, \dots, r_n)$, gde su c i r_i, $1 \leq i \leq n$, proizvoljni p-lavirinti, takvi da je $r_j \leq c$ za svako j, $1 \leq j \leq n$; $n=1,2,\dots$ Označimo skup svih takvih niski sa Σ. Neka su $\sigma_1 = (c; r_1, \dots, r_{n_1})$ i $\sigma_2 = (c'; r'_1, \dots, r'_{n_2})$ proizvoljna dva elementa iz Σ. Pišemo $\sigma_1 \equiv \sigma_2$, ako je: $n_1 = n_2$, $c \equiv c'$ i $r_j \equiv r'_j$, a $T_c^{c'} = T_{r'_j}^{r_j}$ za svako j, $1 \leq j \leq n_1$. Uvedimo na Σ binarne parcijalne operacije $\underset{i,j}{+}$, $i,j=1, 2, \dots$, na sledeći način:

$$\sigma_1 \underset{i,j}{+} \sigma_2 = (c''; r_1, \dots, r_{n_1}, r''_1, \dots, r''_{j-1}, r''_{j+1}, \dots, r''_{n_2}),$$

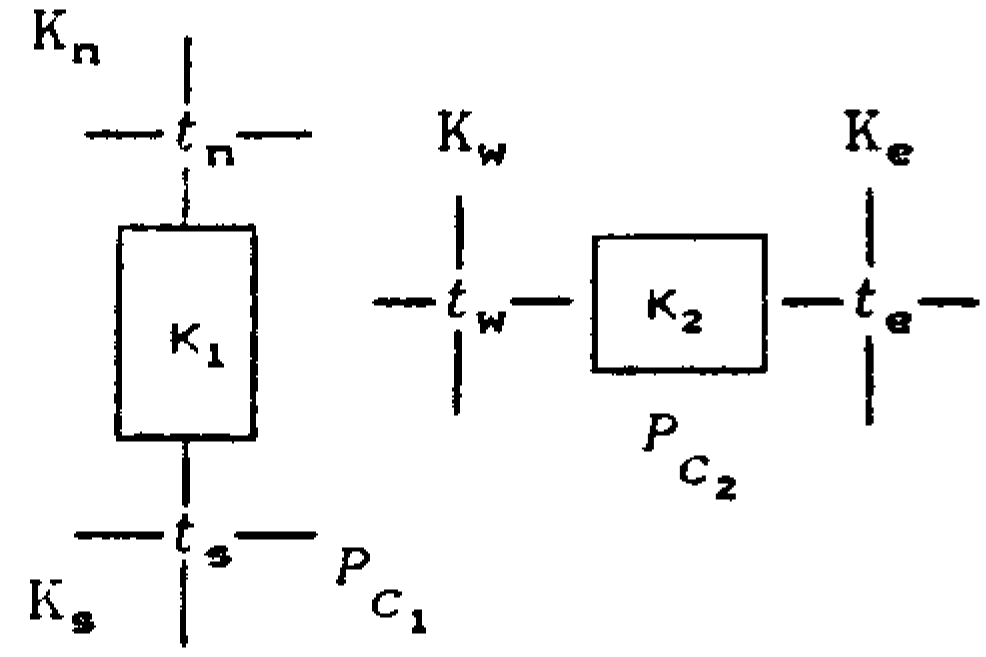
gde je $P_{c''} = P_c \cup T_{r'_j}^{r_i}(P_{c'})$ i $P_{r''_k} = T_{r'_j}^{r_i}(P_{r'_k})$, $1 \leq k \leq n_2$ $(k \neq j)$, ako je $1 \leq i \leq n_1$, $1 \leq j \leq n_2$ i $r_i \equiv r'_j$; $\sigma_1 \underset{i,j}{+} \sigma_2$ je neodređeno u protivnom. Par (σ_1, σ_2) se naziva (i,j)-normalnim ako je $r_i \equiv r'_j$ za neke i,j, $1 \leq i \leq n_1$, $1 \leq j \leq n_2$, i $T_{r'_j}^{r_i}(P_{c'}) \cap P_c = P_{r_i}$. Ako je za sve i i j, za koje je $r_i \equiv r'_j$, par σ_1, σ_2 (i,j)-normalan rećićemo da je par (σ_1, σ_2) normalan i pisaćemo $\sigma_1 \perp \sigma_2$. Neka je $\sigma_i = (c_i; r_1^i, \dots, r_{n_i}^i)$, $1 \leq i \leq l$, proizvoljna niska iz Σ, i pretpostavimo da je izraz

$$(\dots(\sigma_1 \underset{i_1,j_1}{+} \sigma_2) \underset{i_2,j_2}{+} \dots \underset{i_{l-1},j_{l-1}}{+} \sigma_l) = \sigma_1 \underset{i_1,j_1}{+} \sigma_2 \underset{i_2,j_2}{+} \dots \underset{i_{l-1},j_{l-1}}{+} \sigma_l$$

za neke i_s i j_s iz N, $1 \leq s \leq l-1$, određen i ekvivalentan niski $\sigma = (c; r_1, \dots, r_n)$. Tada kažemo da je p-lavirinat c oblika $\Sigma(c_1, \dots, c_l)$.

Posmatrajmo p-lavirinte c_1 i c_2, čiji su skupovi P_{c_1} i

P_{c_2} dati na sl.11, gde unutar pravougaonika κ_i skup P_{c_i} ima proizvoljan oblik; i=1,2. Neka su k_e, k_w, k_s, k_n p-lavirinti



Sl.11.

takvi da P_{k_e}, P_{k_w}, P_{k_s} i P_{k_n} imaju oblik "krstova" označenih na sl. 11 redom sa K_e,K_w, K_s i K_n, a t_e, t_w, t_s i t_n su redom oznake odgovarajućih centralnih polja tih "krstova". Neka su dati $\lambda_1=(c_1;k_n,k_s)$ i $\lambda_2=(c_2;k_w,k_e)$. Sa λ_i^r označimo izraz $\lambda_{i,1} \; {}^{+}_{2,1} \; \lambda_{i,2} \; {}^{+}_{3,1} \cdots {}^{+}_{r,1} \; \lambda_{i,r}$, gde je $\lambda_{i,j}=\lambda_i$ za svako j; $1\leq j\leq r$; i=1,2. Pretpostavimo da su p-lavirinti c_1 i c_2 takvi da je $\lambda_1^{l_1}\perp\lambda_2^{l_2}$ za svako $l_1,l_2\in N$. Neka je $\mathfrak{A}_{q_0}=(A, Q,B,\varphi,\psi,q_0)$ proizvoljni pešak. Konstruišimo automat $\mathfrak{A}_{q_0}(\lambda_1,\lambda_2)= =(A',Q',B',\varphi',\psi',q_0)$ dopustiv za ravne lavirinte na sledeći način; $Q'=Q$; $B'=\Theta$; A' - skup svih nepraznih podskupova od B'. Uzmimo proizvoljno $a=\{\omega_1,\dots,\omega_{s'}\}\in A'$, $1\leq s'\leq 4$ i $q\in Q'$, a takođe funkcije μ i ν, $\mu,\nu:\Theta\to\{1,2\}$, takve da je

$$\mu(\omega)=\begin{cases}1, & \text{ako je } \omega\in\{s,n\}\\ 2, & \text{ako je } \omega\in\{w,e\}\end{cases}, \text{ t.j. } \nu(\omega)=\begin{cases}1, & \text{ako je } \omega\in\{s,e\}\\ 2, & \text{ako je } \omega\in\{n,w\}\end{cases}.$$

Neka je

$(c;k_0,k_1,\dots,k_{s'})\equiv\lambda_{\mu(\omega_1)} \; {}^{+}_{\nu(\omega_1),\nu(\omega_2)} \cdots {}^{+}_{\nu(\omega_1),\nu(\omega_{s'})} \; \lambda_{\mu(\omega_{s'})}$,
gde je $k_i\equiv k_{\omega_i}$, $2\leq i\leq s'$, a $k_{\nu(\omega_1)-1}\equiv k_{\bar{\omega}_1}$ i $k_{l_0}=k_{\omega_1}$; $l_0=|\nu(\omega_1)-2|$. Postavimo sada pešaka $\mathfrak{A}_{q_0}$ na polje $t_{\bar{\omega}_1}$ p-lavirinta $k_{\nu(\omega_1)-1}$ i u stanje q. Krećući se kroz p-lavirint c, pešak $\mathfrak{A}_{q_0}$ se u jednom momentu, po prvi put, nađe na jednom od polja $t_{\omega_1},\dots,t_{\omega_{s'}}$ p--lavirinata $k_{l_0},k_2,\dots,k_{s'}$ (ako poslednji uslov ne važi, to uzmimo da je $\varphi'(q,a)=q_0$ i $\psi'(q,a)=x$ za neke $q_0\in Q'$ i $x\in a$). Pretpo-

stavimo da se pešak $\mathfrak{A}_{q_0}$ nalazi u tom momentu na polju $t_{\omega_{i_0}}$, $1 \leq i_0 \leq s'$, i u stanju q'; tada je $\varphi'(q,a)=q'$ i $\psi'(q,a)=\omega_{i_0}$.

Važi sledeće tvrđenje.

<u>Lema 3.1.</u> Za proizvoljnog pešaka $\mathfrak{A}_{q_0}=(A,Q,B,\varphi,\psi,q_0)$ postoji pravilna klopka oblika $\Sigma(\lambda_1,\lambda_2)$.

<u>Dokaz.</u> Posmatrajmo automat $\mathfrak{A}'=\mathfrak{A}_{q_0}(\lambda_1,\lambda_2)$. Iz teoreme 5.2.1 sledi da postoji pravilni lavirint L iz kojeg $\mathfrak{A}'$ ne izlazi. Iz tvrđenja 5.2.2 sledi da možemo predpostaviti da L leži na celobrojnoj rešetki sa korakom k*1, gde $k \in N$ možemo slobodno birati. Neka je $d(\lambda_1)=|v_{t_n}-v_{t_s}|$ i $d(\lambda_2)= =|v_{t_e}-v_{t_w}|$ (v_{t_u}, $u \in \Theta$, - celobrojni vektor koji odgovara polju p-lavirinta $\lambda_{\mu(t_u)}$ označenom sa t_u). Pretpostavimo da je $k=d(\lambda_1)*d(\lambda_2)*k_1$, gde je k_1, $k_1 \in N$, takvo da se λ_1 (λ_2) može smestiti u vertikalnu (horizontalnu) traku širine ne manje od k_1. Neka je dalje

$$(c_1';k_n',\ldots,k_s')=\lambda_1^1\ {}_{2,1}^{\ +}\ \lambda_2^1\ {}_{3,1}^{\ +}\ \cdots\ {}_{d_2,1}^{\ \ +}\ \lambda_{d_2}^1$$

i

$$(c_2';k_w',\ldots,k_e')=\lambda_1^2\ {}_{2,1}^{\ +}\ \lambda_2^2\ {}_{3,1}^{\ +}\ \cdots\ {}_{d_1,1}^{\ \ +}\ \lambda_{d_1}^2,$$

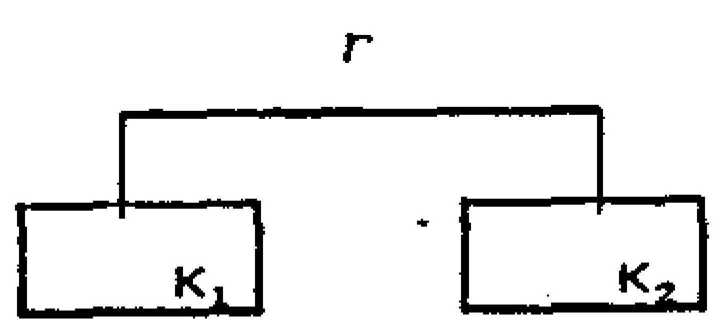
gde je $d_m=d(\lambda_m)*1*k_1$, $\lambda_i^1=\lambda_1$ i $\lambda_j^2=\lambda_2$; $m=1,2$; $1 \leq i \leq d_2$; $1 \leq j \leq d_1$. Stavljajući umesto horizontalnih (vertikalnih) odsečaka date rešetke, koja se nalazi u L, p-lavirint c_1' (c_2'), dobijamo p-lavirint $c(L;\lambda_1,\lambda_2)$, takav, da pešak $\mathfrak{A}_{q_0}$ ne obilazi $(c(L;\lambda_1,\lambda_2),p)$ za neko $p \in P_{c(L;\lambda_1,\lambda_2)}$. Odavde, i iz toga da je L pravilan lavirint sledi tvrđenje date leme.□

Neka je $\mathfrak{M}$ proizvoljna klasa pešaka. Za pešaka $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}$ sa $\bar{\mathfrak{A}}$ označimo odgovarajući neinicijalni pešak, a sa $\{\mathfrak{A}\}=[\bar{\mathfrak{A}}]$ - skup svih inicijalnih pešaka koji imaju isti dijagram prelaza kao $\bar{\mathfrak{A}}$. Inicijalnim zatvaranjem skupa $\mathfrak{M}$ se naziva skup $[\mathfrak{M}]=\bigcup_{\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}} \{\mathfrak{A}\}$.

Neka su dati proizvoljni pešak $\mathfrak{A}$ i proizvoljni p-lavirint (c,p). Za proizviljno $p_1, p_2 \in \mathrm{Int}(\mathfrak{A};c,p)$ pišemo $p_1 <_{(\mathfrak{A};c,p)} p_2$, ako se p_1 pojavljuje u $\pi(\mathfrak{A};c,p)$ ranije nego p_2.

Lema 3.2 Neka je $\mathfrak{M}$ proizvoljna klasa pešaka. Tada ako za $[\mathfrak{M}]$ postoji pravilna klopka, to za klasu $\mathfrak{M}$ postoji univerzalna klopka.

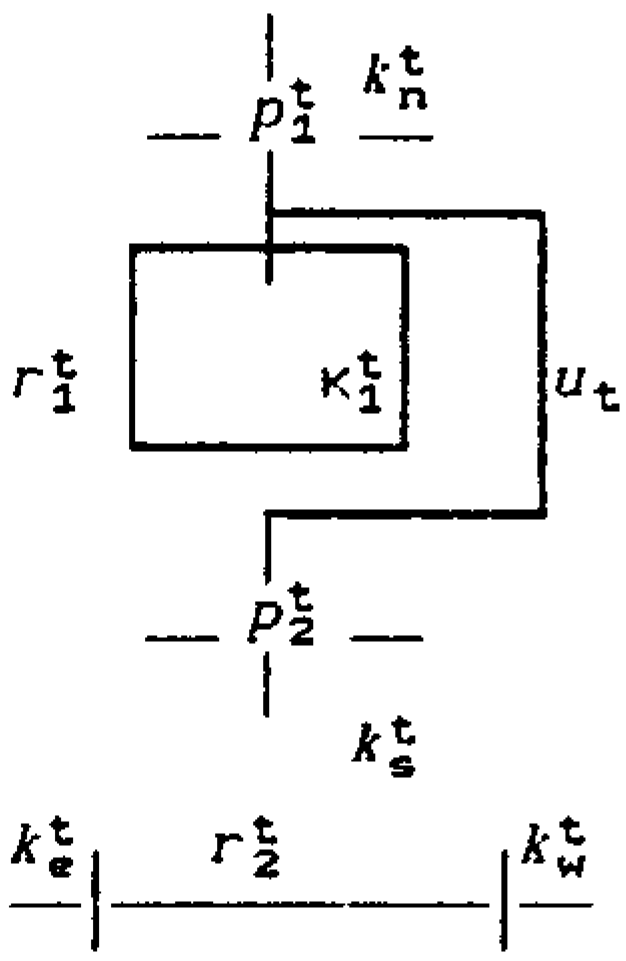
Dokaz. Sa (c,p) označimo jedan od p-lavirinata koji je pravilna klopka za klasu $[\mathfrak{M}]$. Posmatrajmo p-lavirint c' dat na



Hbc.12.

sl.12, gde unutar pravougaonika K_1 i K_2 se nalaze p-lavirinti (c_1,p_2) i (c_2,p_2) takvi da je $(c_1,p_2)\equiv(c_2,p_2)\equiv$ $\equiv(c,p)$, a r je linearan p-lavirinat koji sa c_1 i c_2 ima opšta samo polja iz $\mathrm{Fr}(\mathfrak{M};c_1,p_2)\cup\mathrm{Fr}(\mathfrak{M};c_1,p_2)$. Pokažimo da je c' univerzalna klopka za klasu $\mathfrak{M}$. Uzmimo proizvoljnog pešaka $\mathfrak{A}$ iz $\mathfrak{M}$ i stavimo ga na proizvoljno polje p p-lavirinta c. Dopustimo da pešak $\mathfrak{A}$ obilazi p-labirinat (c',p). Tada možemo pretpostaviti da je, na primer, $p_1 <_{(\mathfrak{A};c',p)} p_2$. Neka je q stanje pešaka $\mathfrak{A}$ u momentu kada se on po prvi put našao polju p_1. No iz toga što je $(\bar{\mathfrak{A}})_q\in[\mathfrak{M}]$ sledi da je $P_r \cap P_{c_1} \subset \mathrm{Fr}((\bar{\mathfrak{A}})_q;c_1,p_1)$, t.j. $p_2 \notin \mathrm{Int}(\mathfrak{A};c,p)$. Iz dobijene kontradikcije sledi da važi tvrdenje date leme.□

Dokaz teoreme 1.2. Uredimo skup pešaka iz $\mathfrak{M}$ u konačan niz $\alpha:\mathfrak{A}_1,\ldots\mathfrak{A}_m$. Konstruišimo po indukciji pravilnu klopku (c_m',p_m) za dati niz α. Iz teoreme 3.1 sledi da je za pešaka $\mathfrak{A}_1$ moguće napraviti pravilnu klopku (c_1',p_1). Pretpostavimo da za pešake $\mathfrak{A}_1,\ldots,\mathfrak{A}_t, 1\le t\le m$, postoji pravilna klopka (c_t',p_t) i napravi-



Sl.13.

mo p-lavirinat (c'_{t+1},p_{t+1}) koji je pravilna klopka za pešake $\mathfrak{A}_1,\ldots,\mathfrak{A}_t,\mathfrak{A}_{t+1}$. Uzmimo p-lavirinte r_1^t i r_2^t sa sl.13, gde se unutar pravougaonika κ_1^t nalazi p-lavirint $(w_t,p'_t),(w_t,p'_t)\equiv(c'_t,p_t)$; u_t - linearni p-lavirintg takav da je $P_{w_t}\cap P_{u_t}(\neq\phi)\subset Fr(\{\mathfrak{A}_1,\ldots,\mathfrak{A}_t\};w_t,p'_t)$ (pošto je p-lavirint (c'_t,p_t) pravilna klopka takav p-lavirint uvek postoji) i $k_w^t\equiv k_e^t\equiv k_n^t\equiv k_s^t\equiv k_e^t$. Jasno je da je $[(r_1^t;k_n^t,k_s^t)]^{l_1}\perp[(r_2^t;k_w^t,k_e^t)]^{l_2}$ za sve prirodne brojeve l_1 i l_2. Postavimo pešaka $\mathfrak{A}_{t+1}$ na polje p'_t p-lavirinta (w_t,p'_t). Ako krećući se po p-lavirintu (r_1^t,p'_t), pešak $\mathfrak{A}_{t+1}$ ne izlazi na polja p_1^t i p_2^t, to možemo uzeti da je $(c_{t+1},p_{t+1})\equiv(r_1^t,p'_t)$; u protivnom, označimo sa p''_t to polje od polja p_1^t i p_2^t na kojem će se $\mathfrak{A}_{t+1}$ ranije pojaviti. Neka je q_0 stanje pešaka $\mathfrak{A}_{t+1}$ u momentu kada se on po prvi put našao na p''_t. Iz teoreme 5.2.1 sledi da postoji pravilni lavirinat $(L_{t+1},\bar{p}_{t+1})$, iz kojeg automat $(\mathfrak{A}_{t+1}(\tilde{r}_1^t,\tilde{r}_2^t))_{q_0}$ ne izlazi; $\tilde{r}_1^t=(r_1^t;k_n^t,k_s^t)$; $\tilde{r}_2^t=(r_2^t;k_w^t,k_e^t)$. Možemo pretpostaviti da je stepen čvora $\bar{p}_{t+1}$ u grafu $t(L_{t+1})$ jednak 4 (paragraf 5.2). Dopustimo sada da je $c'_{t+1}=c(L_{t+1};\tilde{r}_1^t,\tilde{r}_2^t)$ (lema 3.1), a kao p_{t+1} uzmimo polje p'_t "kopije" p-lavirinta r_1^t, koja je posle "smeštanja" u L_{t+1} incidentna $\bar{p}_{t+1}$. Pri tome, ako je $p''_t=p_1^t$, to uzmimo tu "kopiju." koja se nalazi ispod polja $\bar{p}_{t+1}$, a ako je $p''_t=p_2^t$ to uzmimo "kopiju" koja se nalazi iznad tog polja. Lako se uveriti, da je (c'_{t+1},p_{t+1}), zaista pravilna klopka za pešake $\mathfrak{A}_1,\ldots$ $\ldots,\mathfrak{A}_t$, $\mathfrak{A}_{t+1}$. Odavde sledi da se može napraviti p-lavirint

(c'_m, p_m), i mi dobijamo tvrdenje date teoreme.□

Dokaz teoreme 1.3. Tvrdenje ove teoreme sledi neposredno iz teoreme 1.2 i leme 3.2.□

Glava 7.

O obilaženju konačnih lavirinata sistemami automata

U ovoj glavi ćemo pokazati da postoje dva sistema uzajamno dejstvujučih regularnih pešaka, jedan od kojih se sastoji od dva pešaka, a drugi od jednog pešaka i dva markera, koji obilaze klasu svih konačnih p-lavirinata [13]. Takođe ćemo videti da se ovaj rezultat može uopštiti na klasu svih ravnih lavirinata.

1. Osnovni pojmovi i rezultati

Neka je $\mathcal{A}=(\mathfrak{A}_1,\ldots,\mathfrak{A}_n)$, $\mathfrak{A}_i=(A_i,Q_i,B_i,\varphi_i,\psi_i,q_{i0})$ $(1\leq i\leq n)$, - sistem uzajamno dejstvujučih regularnih pešaka. Ako iz uslova da je $a_0=a_0'$ i $\bar{a}=\bar{a}'$, gde su $a=(a_0,\ldots,a_8)$ i $a'=(a_0',\ldots,a_8')$ proizvoljni elementi iz A_i, sledi, da je $\psi_i(q,a)=\psi_i(q,a')$ i $\varphi_i(q,a)=\varphi_i(q,a')$ za svako i, $1\leq i\leq n$, i $q\in Q_i$, to se takav sistem $\mathcal{A}$ zove sistemom slabo uzajamno dejstvujučih pešaka, ili prosto s-sistemom. Važi sledeće tvrđenje.

<u>Teorema 1.1.</u> Postoji s-sistem $\mathcal{A}_0=(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2)$, koji sadrži samo dva pešaka, koji obilazi svaki konačan p-lavirinat.

Neka su uočeni pešaci $\mathfrak{A}_{i_1},\mathfrak{A}_{i_2},\ldots,\mathfrak{A}_{i_m}$, $1\leq i_1<\ldots<i_m\leq n$, u $\mathcal{A}$, koji zadovoljavaju sledeći uslov. Pretpostavimo da je $|Q_{i_j}|=1$ i da za svako $a=(a_0,\ldots,a_8)\in A_{i_j}$, ili je $\psi_{i_j}(q_{i_j},a)=0$,

ili ako je $\psi_{i_j}(q_{i_j},a)=b\neq 0$, to postoji s, $s\neq r_k$, $1\leq k\leq m$, i q, $q\in Q_s$, takvo da je $(s,q)\in a_0$ i $\psi_s(q,a')=b$; ovde je

$$a'=([a_0\setminus\{(s,q)\}]\cup\{(i_j,q_{i_j})\},a_1,\ldots,a_s);$$

$|Q_{i_j}|=\{q_{i_j}\}$; $1\leq j\leq m$. Tada pešake $\mathfrak{A}_{i_1},\mathfrak{A}_{i_2},\ldots,\mathfrak{A}_{i_m}$ nazivamo markerima u sistemu A.

Teorema 1.2. Postoji s-sistem $A_0'=(\mathfrak{A}_1',\mathfrak{K}_1',\mathfrak{K}_2')$, gde su $\mathfrak{K}_1'$ i $\mathfrak{K}_2'$ markeri u A_0', koji jako obilazi svaki konačan p-lavirinat.

Očevidno da po analogiji sa s-sistemom pešaka možemo uvesti pojam uzajamno dejstvujućeg sistema miševa i govoriti o njihovoj univerzalnosti u odnosu na klasu svih ravnih lavirinata. Važi sledeće tvrđenje.

Teorema 1.3. Postoje dva sistema uzajamno dejstvujućih miševa, jedan od kojih se sastoji od dva miša, a drugi od jednog miša i jednog markera, koji obilaze svaki ravni lavirinat.

U daljem, pri konstrukciji pešaka često će biti opisan samo deo njihovog dijagrama prelaza, koji na suštinski način utiče na njihovo ponašanje u proizvoljnom p-lavirintu; nebitni deo možemo dodefinisati proizvoljno, vodeći pri tome računa da ti pešaci pripadaju s-sistemima.

2. Dokaz teoreme 7.1.1

Neka je V proizvoljni slabo povezani podskup skupa Z^2. Sa $Nb_1(V)$ označimo skup svih polja iz $Z^2\setminus V$, koji su slabo susedna sa barem jednim poljem iz V. Neka je λ proizvoljni pozitivan broj. Za svako $p\in V$ sa $Kv_\lambda(p)$ označimo kvadrat stranice λ sa centrom u tački p (ovde se pretpostavlja da je Z^2 potopljeno u R^2; R^2 - realna euklidska ravan). Tada je $\mathrm{Cl}_\lambda(V)=\bigcup_{p\in V}\mathrm{Kv}_\lambda(p)$. Pošto je V slabo povezan skup, očito je $\mathrm{Cl}_\lambda(V)$, pri $1<\lambda$, poligon. Neka je L - skup svih povezanih delova na koje kvadrati $\mathrm{Kv}_1(p)$, $p\in\mathrm{Nb}_1(V)$, razbijaju granicu od $\mathrm{Cl}_{5/4}(V)$. Krećući se duž granice od $\mathrm{Cl}_{5/4}(V)$ saglasno sa pozitivnom orjentacijom počinjući od jedinice i proizvoljno izabranog l, $l\in L$, numerišimo sve elemente skupa L. Takođe, svakom p, $p\in\mathrm{Nb}_1(V)$, dodelimo skup $N(p)$ svih brojeva dodeljenih svim delovima iz L koji leže u $\mathrm{Kv}_1(p)$. Jasno je, da je $1\leq|N(p)|\leq4$ za svako $p\in\mathrm{Nb}_1(V)$. Neka je $\mathfrak{A}$ - regularni pešak, c - neki p-lavirint, a V - jedna od njegovih rupa. Pretpostavimo da je $\mathrm{Int}(\mathfrak{A};c,p_0)=\mathrm{Nb}_1(V)$ za neko polje p_0 iz $\mathrm{Nb}_1(V)$. Kažemo, da se $\mathfrak{A}$ pravilno okreće oko V u pozitivnom (negativnom) smeru počev od polja p_0, ako postoji broj m, $m\in N$, i nizovi $\{n_i\}_{i=0}^{\infty}$, $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$ takvi da je $n_i\in N(p_i)$, $n_{i+1}=n_i+_m\alpha_i$ ($n_{i+1}=n_i-_m\alpha_i$) i $\alpha_i\in\{0,1\}$ za svako i, $i=0,1,2,\dots$. Kada takav pešak $\mathfrak{A}$ leži na polju p_i rečićemo da je $\mathfrak{A}$ u poziciji n_i rotacije.

<u>Lema 2.1.</u> Neka je c proizvoljni p-lavirint i V jedna od njegovih rupa. Za svako p, $p\in\mathrm{Nb}_1(V)$, postoji pešak ${}^{+}\mathfrak{A}_1(p)$ (${}^{-}\mathfrak{A}_1(p)$), koji se počev od polja p, pravilno okreće oko V u pozitivnom (negativnom) smeru, ako je V konačna rupa, ili u negativnom (pozitivnom) smeru, ako je V beskonačna, i takav da iz $n_{k_1}=n_{k_2}$ (n_{k_1},n_{k_2} - pozicije rotacije) sledi da je $q_{k_1}=q_{k_2}$, i iz $n_{k_1}\neq n_{k_2}$ i $n_{k_1},n_{k_2}\in N(p')$ za neko $p'\in\mathrm{Nb}_1(V)$ da je $q_{k_1}\neq q_{k_2}$ ($\{(p_i,q_i,a_i,b_i)\}_{i=0}^{\infty}$ - ponašanje pešaka ${}^{+}\mathfrak{A}_1(p)$ (${}^{-}\mathfrak{A}_1(p)$) u (c,p).

<u>Dokaz.</u> Konstruišimo pešaka ${}^{+}\mathfrak{A}_1$ (${}^{-}\mathfrak{A}_1$), kod kojeg je

$Q_{+\mathfrak{A}_1}=Q_0$ $(Q_{-\mathfrak{A}_1}=Q_0)$ na sledeći način. Neka $^{+}\mathfrak{A}_1$ $(^{-}\mathfrak{A}_1)$ leži na z, $z\in P_c$, i neka je u stanju q_ω, $\omega\in\theta$; c je proizvoljni p-lavirint. Uzmimo tada da je

$$\varphi_{+\mathfrak{A}_1}(q_\omega,a_{+\mathfrak{A}_1}(z))=q_{\pi^-_{\theta(z)}(\bar{\omega})}\quad(\varphi_{-\mathfrak{A}_1}(q_\omega,a_{-\mathfrak{A}_1}(z))=q_{\pi^+_{\theta(z)}(\bar{\omega})})$$

i

$$\psi_{+\mathfrak{A}_1}(q_\omega,a_{+\mathfrak{A}_1}(z))=\pi^-_{\theta(z)}(\bar{\omega})\quad(\psi_{-\mathfrak{A}_1}(q_\omega,a_{-\mathfrak{A}_1}(z))=\pi^+_{\theta(z)}(\bar{\omega})).$$

Neka je prvi, u odnosu na pozitivan (negativan) smer rotacije, odsečak jednog od povezanih delova granice od $\mathrm{Cl}_{5/4}(V)$, koji leži u $\mathrm{Kv}_1(p)$, usmeren u pravcu ω_0 (ω_0'); $\omega_0,\omega_0'\in\theta$. Lako se uveriti da pešak

$$^{+}\mathfrak{A}_1(p)=(^{+}\mathfrak{A}_1)_{q_{\omega_0}}\quad(^{-}\mathfrak{A}_1(p)=(^{-}\mathfrak{A}_1)_{q_{\omega_0'}})$$

zadovoljava uslov date leme.

Primedba. U stvari, iz konstrukcije $^{+}\mathfrak{A}_1(p)$ $(^{-}\mathfrak{A}_1(p))$ je jasno, da on u opštem slučaju nije jedinstven. No, neobazirući se na to, mi pod oznakom $^{+}\mathfrak{A}_1(p)$ $(^{-}\mathfrak{A}_1(p))$ smatramo jednog određenog od njih. Kao $^{+}\mathfrak{A}_1(p)$ $(^{-}\mathfrak{A}_1(p))$ uzmimo, na primer, toga, kod kojeg je početno stanje prvo u poretku (q_e,q_n,q_w,q_s).

Neka je $A=(\mathfrak{A}_1,\ldots,\mathfrak{A}_n)$ - proizvoljan sistem regularnih pešaka, $\{(\vec{z}_t,\vec{a}_t,\vec{b}_t,\vec{q}_t)\}_{t=0}^{\infty}$ - ponašanje tog sistema u datom p-lavirintu (c,z_0), i $\mathfrak{A}_{r_1},\ldots,\mathfrak{A}_{r_k}$, $1\leq r_1<\ldots<r_k\leq n$, - neki pešaci iz A. Kažemo da pešaci $\mathfrak{A}_{r_1},\ldots,\mathfrak{A}_{r_k}$ markiraju neko polje $p\in P_c$ skupom $\Lambda=\Lambda_{r_1}\times\ldots\times\Lambda_{r_k}$, $\Lambda_{r_j}\subset Q_{\mathfrak{A}_{r_j}}$, $1\leq j\leq k$, ako je $p=z_t^{r_1}=\ldots\ldots=z_t^{r_k}$ i $(q_t^{r_1},\ldots,q_t^{r_k})\in\Lambda$ za neko $t\in N$, t.j. ako postoji momenat diskretnog vremena t, u kome ti pešaci imaju na polju p susret oblika $(q_t^{r_1},\ldots,q_t^{r_k})$, koji pripada skupu Λ. Skup svih polja, koje pešaci $\mathfrak{A}_{r_1},\ldots,\mathfrak{A}_{r_k}$ markiraju skupom Λ se označava sa $\mathrm{Mark}(\mathfrak{A}_{r_1},\ldots$

$\ldots,\mathfrak{A}_{r_k};\Lambda)$.

Neka je c neki p-lavirint i V jedna od njegovih rupa. Polja $p_1,p_2\in\mathrm{Nb}_1(V)$ se nazivaju poljima jednog te istog nivoa, $p_1\sim p_2$, ako je $p_1-p_2=(s,0)$ za neko $s\in Z$. Za proizvoljno p iz skupa $\mathrm{Nb}_1(V)$ neka je $\mathrm{L}_V(p)=\{p'\in\mathrm{Nb}_1(V)\,|\,p'\sim p\}$.

Neka su $\mathfrak{A}=(A,Q,B,\varphi,\psi,q_0)$ i $\mathfrak{A}'=(A,Q',B',\varphi',\psi',q_0')$ dva proizvoljna automata. Za proizvoljno $b\in B$ i $(q_1',q_2')\in Q'\times Q'$, $q_1'\neq q_2'$, sa $\mathfrak{A}\underset{q_1',q_2'}{\overset{b}{+}}\mathfrak{A}'$ označimo automat kod kojeg je A - ulazna azbuka, $B\cup B'$ - izlazna azbuka, $Q''=Q\cup Q_1(b,q_2')$ - skup njegovih stanja, gde je

$$Q_1(b,q_2')=\{(q,q')\in Q\times(Q'\setminus\{q_2'\})\,|\,(\exists a\in A)(\exists q_1\in Q)(q=\varphi(q_1,a)\ \wedge\ b=\psi(q_1,a))\};$$

φ'' i ψ'' su redom njegove funkcije prelaza i izlaza takve da je

$$\varphi''(q,a)=\begin{cases}\varphi(q,a), & \text{ako je } q\in Q \text{ i } \psi(q,a)\neq b;\\ (\varphi(q,a),q_1'), & \text{ako je } q\in Q \text{ i } \psi(q,a)=b;\\ (q_2,q''), & \text{ako je } q=(q_2,q'),\ \text{a } q''=\varphi'(q',a)\neq q_2';\\ q_2, & \text{ako je } q=(q_2,q') \text{ i } \varphi'(q',a)=q_2';\end{cases}$$

$$\psi''(q,a)=\begin{cases}\psi(q,a), & \text{ako je } q\in Q;\\ \psi'(q',a), & \text{ako je } q=(q_2,q');\end{cases}$$

za svako $q\in Q''$ i $a\in A$; q_0 - početno stanje tog automata.

$$\mathfrak{B}_1:\ q_1\xrightarrow{*,\mathrm{s}}q_2\xrightarrow{*,\mathrm{n}}q_3$$

$$\mathfrak{B}_2:\ q_1'\xrightarrow{*,\mathrm{n}}q_2'\xrightarrow{*,\mathrm{s}}q_3'$$

$$\mathfrak{B}_3:\ q_1''\xrightarrow{*,\mho}q_2''\xrightarrow{*,\mho}q_3''$$

Sl.14.

Neka je c - proizvoljni p-lavirint, V - jedna od njegovih rupa, i p - proizvoljno polje iz $\mathrm{Nb}_1(V)$. Uzmimo pešake $\mathfrak{B}_1$ i $\mathfrak{B}_2$, čiji su dijagrami dati na sl.14 (sa $*$ je označeno proizvoljno vidno polje tih pešaka). Neka je

$$^{+}\mathfrak{A}_1^1(p)={}^{+}\mathfrak{A}_1(p)\underset{q_1,q_3}{\overset{\mathrm{n}}{+}}\mathfrak{B}_1,\quad {}^{+}\mathfrak{A}_1^2(p)={}^{+}\mathfrak{A}_1(p)\underset{q_1,q_3}{\overset{\mathrm{s}}{+}}\mathfrak{B}_2$$

i $\Lambda=\{(q_\omega,q_\omega)\,|\,\omega\in\Theta\}$. Tada u (c,p)važi tvrđenje sledeće leme.

<u>Lema 2.2.</u> Mark$({}^+\mathfrak{A}_1^1(p), {}^+\mathfrak{A}_1^2(p);\Lambda)=L_V(p)$.

<u>Dokaz.</u> Označimo sa $\pi_i=\{(p_t^i,q_t^i,a_t^i,b_t^i)\}_{t=0}^{\infty}$, $i=1,2$, ponašanje pešaka ${}^+\mathfrak{A}_1^i(p)$; $p_0^1=p_0^2=p$. Jasno je da π_i, $i=1,2$, kao podniz sadrži ponašanje pešaka ${}^+\mathfrak{A}_1(p)$. Pošto se ${}^+\mathfrak{A}_1(p)$ pravilno okreće oko V, to sledi da je $\bigcup\limits_{t=0}^{\infty} p_t^i=\mathrm{Nb}_1(V)$, $i=1,2$. Korakom pešaka ${}^+\mathfrak{A}_1^i(p)$, $i=1,2$, se naziva svaki prelaz tog pešaka u jedno od stanja iz skupa stanja Q_0. U zavisnosti od toga u kom pravcu se pri tome kreće pešak ${}^+\mathfrak{A}_1^i(p)$, $i=1,2$, ti koraci mogu biti četiri različita tipa. Neka je p' - proizvoljno polje skupa $L_V(p)$. Jasno je, da se ${}^+\mathfrak{A}_1^i(p)$, $i=1,2$, pre nego što se vrati u početno stanje i na početno polje p, mora pojaviti barem jedanput na p' i, pri tome, biti u jednom od stanja iz Q_0; sa T_i označimo momenat, kada se to prvi put desilo. Broj koraka raznih tipova urađenih pešakom ${}^+\mathfrak{A}_1^i(p)$, $i=1,2$, do momenta T_i označimo redom sa l_e, l_s, l_n i l_w. Tada je jasno, da je $T_1=l_w+l_e+3l_n+l_s$ i $T_2=l_w+l_e+$ $+l_n+3l_s$. No, iz $p\sim p'$ sledi da je $l_n=l_s$, t.j. $T_1=T_2=T$. Jasno je, da je taj susret iz Λ. Znači, $p'\in$Mark$({}^+\mathfrak{A}_1^1(p), {}^+\mathfrak{A}_1^2(p);\Lambda)$, t.j. $L_V(p)\subseteq$Mark$({}^+\mathfrak{A}_1^1(p), {}^+\mathfrak{A}_1^2(p);\Lambda)$.

Uzmimo sada proizvoljno p' iz Mark$({}^+\mathfrak{A}_1^1(p), {}^+\mathfrak{A}_1^2(p);\Lambda)$. Lako se vidi da se može pretpostaviti, da će dati pešaci markirati polje p' skupom Λ pre nego što se oni opet nađu u početnim stanjima na polju p. Neka su takav susret desio u momentu T. Posmatrajmo pešake

$$ {}^+\mathfrak{A}_1^{1'}(p)={}^+\mathfrak{A}_1(p) \underset{q_1,q_3}{\overset{n}{{}_{''}+_{''}}} \mathfrak{B}_3 $$

i

$$ {}^+\mathfrak{A}_1^{2'}(p)={}^+\mathfrak{A}_1(p) \underset{q_1,q_3}{\overset{s}{{}_{''}+_{''}}} \mathfrak{B}_3 $$

(sl.14), i njihovo ponašanje u (c,p). Jasno je, da je

$$\mathrm{Mark}({}^{+}\mathfrak{A}_1^1(p), {}^{+}\mathfrak{A}_1^2(p); \Lambda) = \mathrm{Mark}({}^{+}\mathfrak{A}_1^{1'}(p), {}^{+}\mathfrak{A}_1^{2'}(p); \Lambda)$$

i da će pešaci ${}^{+}\mathfrak{A}_1^{1'}(p)$ i ${}^{+}\mathfrak{A}_1^{2'}(p)$ imati susret iz Λ u istom momentu kada će pešaci ${}^{+}\mathfrak{A}_1^1(p)$ i ${}^{+}\mathfrak{A}_1^2(p)$ imati isti takav susret. Odavde sledi da će pešaci ${}^{+}\mathfrak{A}_1^{1'}(p)$ i ${}^{+}\mathfrak{A}_1^{2'}(p)$ u momentu T na polju p' imati susret iz Λ. No, pošto se ${}^{+}\mathfrak{A}_1^{1'}(p)$ i ${}^{+}\mathfrak{A}_1^{2'}(p)$ pravilno okreću oko V, to možemo pretpostaviti da su neki brojevi n_{k_1} i n_{k_2} redom njihove pozicije rotiranja u momentu T. Iz leme 2.1 i iz toga kako je izabran skup Λ, sledi da je $n_{k_1}=n_{k_2}=n$. Primećujući da je n u stvari broj urađenih koraka pešaka ${}^{+}\mathfrak{A}_1^1(p)$ i ${}^{+}\mathfrak{A}_1^2(p)$ do momenta T, dobijamo da je $l_w+l_e+3l_n+l_s=l_w+l_e+l_n+$ $+3l_s$, t.j. $l_n=l_s$ i sledstveno $p\sim p'$. Poslednje zajedno sa više dokazanim daje $\mathrm{Mark}({}^{+}\mathfrak{A}_1^1(p), {}^{+}\mathfrak{A}_1^2(p); \Lambda) = L_V(p)$, što je i trebalo dokazati.□

Umesto pešaka ${}^{+}\mathfrak{A}_1^1(p)$ i ${}^{+}\mathfrak{A}_1^2(p)$ mogu se posmatrati pešaci ${}^{-}\mathfrak{A}_1^1(p)$ i ${}^{-}\mathfrak{A}_1^2(p)$, gde je

$${}^{-}\mathfrak{A}_1^1(p) = {}^{-}\mathfrak{A}_1(p) \overset{n}{\underset{q_1,q_3}{+}} \mathfrak{B}_1$$

i

$${}^{-}\mathfrak{A}_1^2(p) = {}^{-}\mathfrak{A}_1(p) \overset{s}{\underset{q_1',q_3'}{+}} \mathfrak{B}_2 .$$

Tada u (c,p) važi sledeće tvrđenje.

<u>Lema 2.2.</u> $\mathrm{Mark}({}^{-}\mathfrak{A}_1^1(p), {}^{-}\mathfrak{A}_1^2(p); \Lambda) = L_V(p)$.

Neka je c proizvoljni p-lavirint i V jedna od njegovih rupa. Posmatrajmo poligon $\mathrm{Cl}_{5/4}(V)$, koji može biti ili ograničen ili neograničen. Dodelimo svakom temenu tog poligona broj 1 ili -1 u zavisnosti od toga da li je odgovarajući ugao u tom temenu jednak $\pi/2$ ili $3\pi/2$. Sa $\mathrm{Varg}(V)$ označimo sumu svih tih brojeva. Važi sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 2.1. Ako je V konačna rupa p-lavirinta c, to je $\mathrm{Varg}(V)=4$; u protivnom je $\mathrm{Varg}(V)=-4$.

Neka je V proizvoljna rupa datog p-lavirinta (c,p), $\mathcal{A}=(\mathfrak{A}_1,\dots,\mathfrak{A}_n)$ - neki sistem pešaka, i p' - proizvoljno polje iz P_c. Kažemo da sistem $\mathcal{A}$ u p-lavirintu (c,p) $(\Lambda,\Lambda';i_1,\dots,i_l)$ -potpuno otkriva neko svojstvo α rupe V ili polja p', ako: (1) pešaci $\mathfrak{A}_{i_1},\dots,\mathfrak{A}_{i_l}$, $1\le l\le n$, imaju susret iz $\Lambda\cup\Lambda'$ na polju p; (2) prvi takav susret je iz Λ, kada važi α, a u protivnom je iz Λ'; $\Lambda,\Lambda'\subset Q_{\mathfrak{A}_{i_1}}\times\dots\times Q_{\mathfrak{A}_{i_l}}$ i $\Lambda\cap\Lambda'=\phi$.

Uzmimo pešaka ${}^{+}\mathfrak{A}_1(p)=(A,Q,B,\varphi,\psi,q_0(p))$ i konstruišimo pešaka ${}^{+}\mathfrak{A}_2^1(p)=(A,Q',B,\varphi',\psi',q_0'(p))$, $Q'=Q\times\{0,1,2\}$, na sledeći način. Za proizvoljne $\omega,\omega'\in\Theta$ sa $d(\omega,\omega')$ označimo njihovo rastojanje u odnosu na ciklički poredak π^- (na primer, $d(n,e)=1$, $d(e,n)=3$, ...). Neka je

$$r(\omega,\omega')=\begin{cases}1, & \text{ako je } d(\bar\omega,\omega')\in\{0,1\};\\ 0, & \text{ako je } d(\bar\omega,\omega')=2;\\ 2, & \text{ako je } d(\bar\omega,\omega')=3.\end{cases}$$

Tada za proizvoljne $q=(q_\omega,x)\in Q'$, $x\in\{0,1,2\}$, $\omega\in\Theta$, i $a\in A$, $\varphi'(q,a)=(q_{\omega'},x+_3 r(\omega,\omega'))$, gde je $q_{\omega'}=\varphi(q_\omega,a)$, a $\psi'(q,a)=\psi(q_\omega,a)$; $q_0'(p)=(q_0(p),0)$. Sa $\mathfrak{K}_2^2$ označimo marker koji uopšte ne deluje na pešaka ${}^{+}\mathfrak{A}_2^1(p)$; $Q_{\mathfrak{K}_2^2}=\{q_0\}$.

Tvrđenje 2.2. Neka je c - proizvoljni p-lavirint, V - jedna od njegovih rupa i p - proizvoljno polje iz $\mathrm{Nb}_1(V)$. Tada, sistem $\mathcal{A}_2^+(p)=({}^{+}\mathfrak{A}_2^1(p),\mathfrak{K}_2^2)$ u (c,p) otkriva potpuno svojstvo konačnosti rupe V; pri čemu se ${}^{+}\mathfrak{A}_2^1(p)$ okreće oko V u pozitivnom smeru, ako je V konačna, a u negativnom, ako je V beskonačna.

Dokaz. Iz konstrukcije pešaka ${}^{+}\mathfrak{A}_2^1(p)$ i tvrđenja 2.1 sledi, da sistem $\mathcal{A}_2^+(p)$ u (c,p) $(\Lambda,\Lambda',1,2)$-potpuno otkriva traženo svojstvo V, gde je $\Lambda=\{(q_\omega,1)\,|\,\omega\in\theta\}\times\{q_0\}$ i $\Lambda'=\{(q_\omega,2)\,|\,\omega\in\theta\}\times\{q_0\}$.□

Ako umesto pešaka ${}^+\mathfrak{A}_1(p)$ posmatramo pešaka ${}^-\mathfrak{A}_1(p)$, to, kao i više možemo konstruisati pešaka ${}^-\mathfrak{A}_2^1(p)$ i pokazati da važi sledeće tvrđenje.

<u>Tvrđenje 2.2'</u>. Neka je c - proizvoljni p-lavirint, V - jedna od njegovih rupa i p - proizvoljno polje iz $\mathrm{Nb}_1(V)$. Tada sistem $\mathcal{A}_2^-(p)=({}^-\mathfrak{A}_2^1(p),\mathfrak{K}_2^2)$ u (c,p) otkriva potpuno svojstvo konačnosti rupe V; pri čemu se ${}^-\mathfrak{A}_2^1(p)$ okreće oko V u negativnom smeru ako je V konačna.

Označimo sa $\leq_\ell$ leksikografsko uređenje u Z^2. Neka je V - proizvoljna rupa datog p-lavirinta c. Maksimalno polje skupa $\mathrm{Nb}_1(V)$ u odnosu na uređenje $\leq_\ell$ se naziva V-osobenim. Očito, da ako je polje p, $p\in\mathrm{Nb}_1(V)$, V-osobeno, to je $(c(p_{-1,0}),c(p_{-1,-1}),c(p_{0,-1}))=(1,0,1)$. Polje $p\in P_c$ se naziva **osobenim**, ako je za neku rupu V p-lavirinta c, p V-osobeno.

<u>Lema 2.3.</u> Neka je c proizvoljni p-lavirint. Tada postoji sistem $\mathcal{A}_3=(\mathfrak{A}_3^1,\mathfrak{A}_3^2)$, koji za svako $p\in P_c$ potpuno otkriva u (c,p) da li je polje p osobeno ili ne.

<u>Dokaz.</u> Konstruišimo pešake $\mathfrak{A}_3^1$ i $\mathfrak{A}_3^2$ za koje su skupovi

$$Q_1=Q_{-\mathfrak{A}_1^2}\times\{1,2\}\cup Q_{+\mathfrak{A}_1^2}\times\{3,4,5\}\cup\{q_{\omega,1}\,|\,\omega\in\theta\}\cup\{q_{0,1}\}$$

i

$$Q_2=Q_{-\mathfrak{A}_2^1\,\overset{n}{\underset{q_1,q_3}{+}}\,\mathfrak{B}_1}\times\{1,2\}\cup Q_{+\mathfrak{A}_2^1\,\overset{n}{\underset{q_1,q_3}{+}}\,\mathfrak{B}_1}\times\{3,4,5\}\cup$$
$$\cup\{q_{\omega,2}\,|\,\omega\in\theta\}\cup\{q_{0,2}\}$$

redom skupovi njihovih stanja. Opišimo dijagram prelaza tih pešaka. Ako u dijagramu za $\mathfrak{A}_3^1(\mathfrak{A}_3^2)$ posmatramo samo stanja vida (q,k) za proizvoljno fiksirano k, $1\leq \mathrm{k}\leq 5$, to pretpostavimo da poddijagram koji ta stanja zajedno sa ulazima iz E^9 određuju je izomorfan dijagramu prelaza za ${}^{-}\mathfrak{A}_1^2({}^{-}\mathfrak{A}_2^1 \overset{n}{\underset{q_1,q_3}{+}} \mathfrak{B}_1)$, ako je $\mathrm{k}\in\{1,2\}$, ili dijagramu za ${}^{+}\mathfrak{A}_1^2({}^{+}\mathfrak{A}_2^1 \overset{n}{\underset{q_1,q_3}{+}} \mathfrak{B}_1)$, ako je $\mathrm{k}\in\{3,4,5\}$; pri čemu u tom izomorfizmu stanjima (q,k) odgovaraju stanja q, a rebru $((q_1,\mathrm{k}),(q_2,\mathrm{k}))$, koje je označeno sa (a,b), odgovara rebro (q_1,q_2), označeno na isti način.

Ostali prelazi u diagramima prelaza za pešake $\mathfrak{A}_3^1$ i $\mathfrak{A}_3^2$ su određeni njihovom interakcijom. Ovi pešaci interaguju tada i samo tada, ako na nekom polju $p',p'\in P_c$, imaju susret tipa $(q^1,q^2)=((q_\omega,\mathrm{k}),((q_\omega,x),\mathrm{k}))$, $\omega\in\theta$, pri čemu:

1) ako je k=1 i $x=2$, to je $\varphi_{\mathfrak{A}_3^1}(q^1,a^1)=((q_s,q_1'),3)$, $\varphi_{\mathfrak{A}_3^2}(q^2,a^2)=((q_s,x),3)$ i $\psi_{\mathfrak{A}_3^i}(q^i,a^i)=\mathrm{s}$, $i=1,2$;

2) ako je k=1 i $x=0$, to je $\varphi_{\mathfrak{A}_3^1}(q^1,a^1)=((q_s,q_1'),4)$, $\varphi_{\mathfrak{A}_3^2}(q^2,a^2)=((q_s,x),4)$ i $\psi_{\mathfrak{A}_3^i}(q^i,a^i)=\mathrm{s}$, $i=1,2$;

3) ako je k=4, to je $\varphi_{\mathfrak{A}_3^1}(q^1,a^1)=(\varphi_{+\mathfrak{A}_1^2}(q_\omega,a^*),5)$, $\varphi_{\mathfrak{A}_3^2}(q^2,a^2)=((\varphi_{+\mathfrak{A}_2^1 \overset{n}{\underset{q_1,q_3}{+}} \mathfrak{B}_1}(q_\omega,a^*),0),5)$, $\psi_{\mathfrak{A}_3^1}(q^1,a^1)=\psi_{+\mathfrak{A}_1^2}(q_\omega,a^*)$ i $\psi_{\mathfrak{A}_3^2}(q^2,a^2)=\psi_{+\mathfrak{A}_2^1 \overset{n}{\underset{q_1,q_3}{+}} \mathfrak{B}_1}(q_\omega,a^*)$;

4) ako je k=5 i $c(p'_{-1,0})=0$, to je $\varphi_{\mathfrak{A}_3^1}(q^1,a^1)=(q_{\bar{\omega}},2)$, $\varphi_{\mathfrak{A}_3^2}(q^2,a^2)=((q_{\bar{\omega}},r(\omega)),2)$ i $\psi_{\mathfrak{A}_3^i}(q^i,a^i)=\bar{\omega}$, $i=1,2$, gde je

$$r(\omega)=\begin{cases}0, & \text{ako je } \omega=\mathrm{w};\\ 1 & \text{u protivnom;}\end{cases}$$

i

$$q(\omega)=\begin{cases}(q_s,q_1'), & \text{ako je } \omega=\mathrm{n};\\ q_e, & \text{ako je } \omega=\mathrm{w};\end{cases}$$

5) ako je k=2, ω=n i x=0, to je $\varphi_{\mathfrak{A}_3^1}(q^1,a^1)=((q_s,q_1'),3)$, $\varphi_{\mathfrak{A}_3^2}(q^2,a^2)=((q_s,x),3)$ i $\psi_{\mathfrak{A}_3^i}(q^i,a^i)=s$, i=1,2;

$a^*=\overline{a^1}=\overline{a^2}$; $a^i=a_{\mathfrak{A}_3^i}(p')$, i=1,2. Dalje pretpostavimo da je za svako $p', p'\in P_C$,

$$\varphi_{\mathfrak{A}_3^i}(q_{0,i},a_{\mathfrak{A}_3^i}(p'))=\begin{cases}((q_s,q_1'),1), & \text{ako je i=1 i } (d_1,d_2,d_3)=(1,0,1);\\ ((q_s,1),1), & \text{ako je i=2 i } (d_1,d_2,d_3)=(1,0,1);\\ q_{\pi^+_{\theta(p')}(e),i} & \text{u ostalim slučajevima;}\end{cases}$$

i

$$\psi_{\mathfrak{A}_3^i}(q_{0,i},a_{\mathfrak{A}_3^i}(p'))=\begin{cases}s, & \text{ako je } (d_1,d_2,d_3)=(1,0,1);\\ \pi^+_{\theta(p')}(e) & \text{u protivnom;}\end{cases}$$

$(d_1,d_2,d_3)=((c(p_{-1,0}),c(p_{-1,-1}),c(p_{0,-1}))$; i=1,2. Takođe je $\varphi_{\mathfrak{A}_3^1}(q_{\omega,1},a^1)=(q_n,3)$, $\varphi_{\mathfrak{A}_3^2}(q_{\omega,2},a^2)=((q_n,0),3)$ i $\psi_{\mathfrak{A}_3^i}(q_{\omega,i},a^i)=\bar{\omega}$ za svako $a^i\in A_{\mathfrak{A}_3^i}$ i $\omega\in\theta$; i=1,2. Kao inicijalno stanje pešaka $\mathfrak{A}_3^i$, i=1,2, uzmimo stanje $q_{0,i}$.

Neka je $\Lambda=\{((q_n,5),((q_n,0),5))\}$ i $\Lambda'=\{((q_n,3),((q_n,x),3))|1\leq x\leq 3\}$. Lako je videti da sistem $A_3=(\mathfrak{A}_3^1,\mathfrak{A}_3^2)$ $(\Lambda,\Lambda';1,2)$ -potpuno otkriva da li je polje p osobeno ili ne, što je i trebalo pokazati.□

<u>Dokaz teoreme 7.1.1.</u> Iz dijagrama prelaza za pešake $\mathfrak{A}_3^1$ i $\mathfrak{A}^+$ ($\mathfrak{A}_3^2$ i $\mathfrak{A}^+$) pravimo dijagram prelaza za $\mathfrak{A}_1$ ($\mathfrak{A}_2$) na sledeći način. Označimo sa $\tilde{Q}_i$, i=1,2, skup $Q_{\mathfrak{A}_3^i}\setminus(\{q_{\omega,i}|\omega\in\theta\}\cup\{q_{0,i}\})$. Neka je $Q_{\mathfrak{A}_i}=\tilde{Q}_i\times\{s,n\}\cup Q_{\mathfrak{A}^+}$, i=1,2. Pretpostavimo da za proizvoljne $q\in Q_{\mathfrak{A}^+}$ i $a\in A_{\mathfrak{A}_1}$ ($a'\in A_{\mathfrak{A}_2}$), ako je $(\bar{a}_{-1,0},\bar{a}_{-1,-1},\bar{a}_{0,-1})=$ $=(1,0,1)$ $((\bar{a}'_{-1,0},\bar{a}'_{-1,-1},\bar{a}'_{0,-1})=(1,0,1))$ i ili $q=q_n$, ili

$\psi_{\mathfrak{A}^+}(q,\bar{a})=s$ $(\psi_{\mathfrak{A}^+}(q,\bar{a}')=s)$, to

$$\varphi_{\mathfrak{A}_1}(q,a)=(((q_s,q_1'),1),\omega)\quad(\varphi_{\mathfrak{A}_2}(q,a')=(((q_s,1),1),\omega))$$

i $\psi_{\mathfrak{A}_1}(q,a)=s$ $(\psi_{\mathfrak{A}_2}(q,a')=s)$, gde je

$$\omega=\begin{cases} s, & \text{ako je } q=q_n;\\ n & \text{u protivnom;}\end{cases}$$

u suprotnom slučaju

$$\varphi_{\mathfrak{A}_1}(q,a)=\varphi_{\mathfrak{A}^+}(q,\bar{a})\quad(\varphi_{\mathfrak{A}_2}(q,a')=\varphi_{\mathfrak{A}^+}(q,\bar{a}'))$$

i

$$\psi_{\mathfrak{A}_1}(q,a)=\psi_{\mathfrak{A}^+}(q,\bar{a})\quad(\psi_{\mathfrak{A}_2}(q,a')=\psi_{\mathfrak{A}^+}(q,\bar{a}')).$$

Neka je c proizvoljni p-lavirint. Pretpostavimo da je pešak $\mathfrak{A}_i$, $i=1,2$, u stanju $q^i\in\tilde{Q}_i\times\{\omega\}$ i leži na nekom polju $p_i\in P_c$; $\omega\in\{s,n\}$. Tada, ako je $p_1\neq p_2$ ili $(q^1,q^2)\notin\bar{Q}$, gde je

$$\bar{Q}=\{(((q_n,3),\omega),(((q_n,x),3),\omega))\,|\,\omega\in\{s,n\},x\in\{0,1,2\}\}\cup$$
$$\cup\{(((q_n,5),\omega),(((q_n,0),5),\omega))\,|\,\omega\in\{s,n\}\},$$

to

$$\varphi_{\mathfrak{A}_i}(q^i,\alpha_{\mathfrak{A}_i}(p_i))=\varphi_{\mathfrak{A}_3^i}(q^{i'},\alpha_{\mathfrak{A}_3^i}(p_i))$$

i

$$\psi_{\mathfrak{A}_i}(q^i,\alpha_{\mathfrak{A}_i}(p_i))=\psi_{\mathfrak{A}_3^i}(q^{i'},\alpha_{\mathfrak{A}_3^i}(p_i));$$

$\alpha_{\mathfrak{A}_3^i}(p_i)$ se izračunava u odnosu na sistem $(\mathfrak{A}_3^1,\mathfrak{A}_3^2)$; ako je $q^i=(q,\omega)$ za neko $q\in\tilde{Q}_i$ i $\omega\in\{s,n\}$, to je $q^{i'}=q$; $i=1,2$.

Takođe pretpostavimo da pešaci $\mathfrak{A}_1$ i $\mathfrak{A}_2$ slabo interaguju na taj način, da ako su oni u stanjima:

1) $q=((q_n,3),s)$ i $q'=(((q_n,x),3),s)$, to $\varphi_{\mathfrak{A}_1}(q,a)=\varphi_{\mathfrak{A}_2}(q',a')=$ $=\varphi_{\mathfrak{A}^+}(q_n,a'')$ i $\psi_{\mathfrak{A}_1}(q,a)=\psi_{\mathfrak{A}_2}(q',a')=\psi_{\mathfrak{A}^+}(q_n,a'')$;
2) $q=((q_n,3),n)$ i $q'=(((q_n,x),3),n)$, to $\varphi_{\mathfrak{A}_1}(q,a)=\varphi_{\mathfrak{A}_2}(q',a')=q_s$ i $\psi_{\mathfrak{A}_1}(q,a)=\psi_{\mathfrak{A}_2}(q',a')=s$;
3) $q=((q_n,5),s)$ i $q'=(((q_n,0),5),s)$, to $\varphi_{\mathfrak{A}_1}(q,a)=\varphi_{\mathfrak{A}_2}(q',a')=q_s$ i $\psi_{\mathfrak{A}_1}(q,a)=\psi_{\mathfrak{A}_2}(q',a')=s$;

4) $q=((q_n,5),n)$ i $q'=(((q_n,0),5),n)$, to $\varphi_{\mathfrak{A}_1}(q,a)=\varphi_{\mathfrak{A}_2}(q',a')=$ $=\varphi_{\mathfrak{A}^+}(q_n,a'')$ i $\psi_{\mathfrak{A}_1}(q,a)=\psi_{\mathfrak{A}_2}(q',a')=\psi_{\mathfrak{A}^+}(q_n,a'')$

gde je $\bar{a}=\bar{a}'=a''$, a a i a' odgovarajući ulazi pešaka $\mathfrak{A}_1$ i $\mathfrak{A}_2$; $x\in\{0,1,2\}$. Kao inicijalna stanja pešaka $\mathfrak{A}_1$ i $\mathfrak{A}_2$ izaberimo jedno od stanja skupa $Q_{\mathfrak{A}^+}$, na primer, stanje q_e.

Neka je c proizvoljni p-lavirint. Pokažimo da za proizvoljno $p\in P_c$ sistem $A_0=(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2)$ obilazi p-lavirint (c,p). Za svaku rupu V p-lavirinta c uradimo sledeću operaciju. Označimo sa $p(V)$ V-osobeno polje rupe V. Sa $l(V)$ označimo horizontalni odsečak u E^2 od tačke $[p(V)_{-1,-1}+p(V)]/2$ do prve tačke iz $\mathrm{Cl}_1(Z^2\backslash P_c)$, koja se nalazi na desno od nje. Ako za svaku rupu V p-lavirinta c iz ponašanja pešaka $\mathfrak{A}_1$ i $\mathfrak{A}_2$ izbacimo četvorke, koje odgovaraju prelazu tih pešaka sa polja $p(V)_{0,-1}$ na polje $p(V)$, i obratno, i odsečke ponašanja na kojima oni određuju da li je neko polje osobeno ili ne, to mi dobijamo ponašanje pešaka $\mathfrak{A}_1'$ i $\mathfrak{A}_2'$ izomorfnih $\mathfrak{A}^+$, koji ne interaguju između sebe. Lako je uočiti, da pešaci $\mathfrak{A}_1'$ i $\mathfrak{A}_2'$ ne prelaze odsečak $l(V)$ za svaku konačnu rupu V p-lavirinta c. Ako rasečemo oblast $\mathrm{Cl}_1(P_c)$ duž odsečaka $l(V)$, ona će postati jednopovezana. Znači p-lavirint, koji pešaci $\mathfrak{A}_1'$ i $\mathfrak{A}_2'$ "vide", je za njih p-lavirint bez konačnih rupa. Koristeći tvrđenje f) teoreme 6.1.1, mi dobijamo da sistem A_0 zaista obilazi p-lavirint (c,p). Iz proizvoljnosti izbora p-lavirinta c sledi da A_0 zadovoljava uslov date teoreme.□

3. Dokazi teorema 7.1.2 i 7.1.3

<u>Dokaz teoreme 7.1.2.</u> Neka je $Q_{\mathfrak{K}_1'}=\{q_0^1\}$, $Q_{\mathfrak{K}_2'}=\{q_0^2\}$ i

$$Q_{\mathfrak{A}_1'}=\{((q_1,k),(q_2,k),i,\alpha,q_\omega,\omega')\,|\,\alpha\in\{-1,1\},\ \omega\in\{e,w,n,s\},\ \omega'\in\{s,n\},$$
$$1\le k\le 5,\ i\in\{1,2\},\ i\ (q_j,k)\in\tilde{Q}_j(j=1,2)\}\cup Q_{\mathfrak{A}^+}.$$

Pretpostavimo prvo da za proizvoljne $q=((q_1,k),(q_2,k),i,\alpha,q_\omega,\omega')\in Q_{\mathfrak{A}_1'}$ i $a\in A_{\mathfrak{A}_1'}$ $(a_{0,0}\neq\{(i,q_0^i)\})$:

a) $\varphi_{\mathfrak{A}_1'}(q,a)=((q_1,k),(q_2,k),i,\alpha,\varphi_{\mathfrak{A}^-}(q_\omega,\bar{a}),\omega')$ i $\psi_{\mathfrak{A}_1'}(q,a)=\psi_{\mathfrak{A}^-}(q_\omega,\bar{a})$, ako je $\alpha=-1$;

b) $\varphi_{\mathfrak{A}_1'}(q,a)=((q_1,k),(q_2,k),i,\alpha,\varphi_{\mathfrak{A}^+}(q_\omega,\bar{a}),\omega')$ i $\psi_{\mathfrak{A}_1'}(q,a)=\psi_{\mathfrak{A}^+}(q_\omega,\bar{a})$, ako je $\alpha=1$.

Neka je c proizvoljni p-lavirint, i neka jedan iz datih markera, na primer, $\mathfrak{K}_{i'}'$, $i'\in\{1,2\}$, i pešak $\mathfrak{A}_1'$ imaju susret na polju p, $p\in P_c$. Ako je pešak $\mathfrak{A}_1'$ u stanju oblika

$$q=((q_1,k),(q_2,k),i'',\alpha,q_\omega,\omega')$$

i, ili se sva tri pešaka ne nalaze na polju p, ili $(q_1,q_2)\neq\neq(q_{\omega''},(q_{\omega''},x))$ za svako $\omega''\in\theta$, to ti pešaci interaguju tada i samo tada, kada je $i'=i''=i$, i pri tome na taj način da je

$$\varphi_{\mathfrak{A}_1'}(q,\gamma_{\mathfrak{A}_1'}(p))=\begin{cases}(\varphi_{\mathfrak{A}_3^1}((q_1,k),a_1),(q_2,k),2,-\alpha,q_{\sigma_1(q)},\omega'), & \text{ako je } i=1;\\ ((q_1,k),\varphi_{\mathfrak{A}_3^2}((q_2,k),a_2),1,-\alpha,q_{\sigma_1(q)},\omega'), & \text{ako je } i=2;\end{cases}$$

i

$$\psi_{\mathfrak{A}_1'}(q,a_{\mathfrak{A}_1'}(p))=\psi_{\mathfrak{K}_{i'}'}(q_0^{i'},a_{\mathfrak{K}_{i'}'}(p))=\psi_{\mathfrak{A}_3^i}((q_i,k),a_i)$$

gde je

$$\sigma_i(q)=\begin{cases}b_j, & \text{ako je } \omega=\bar{b}_j;\\ \pi^-(b_j), & \text{ako je } \omega\neq\bar{b}_j \text{ i } \alpha=-1;\\ \pi^+(b_j), & \text{ako je } \omega\neq\bar{b}_j \text{ i } \alpha=1;\end{cases}$$

$a_j=\overline{a_{\mathfrak{A}_3^j}(p)}$, $j=1,2$. U slučaju, da su sva tri pešaka na polju p i da je $(q_1,q_2)=(q_{\omega''},(q_{\omega''},x))$ za neko $\omega''\in\theta$, pretpostavimo da je

$$\varphi_{\mathfrak{A}_1'}(q,a_{\mathfrak{A}_1'}(p))=\begin{cases}((\tilde{q}_1,\tilde{k}),(\tilde{q}_2,\tilde{k}),1,\alpha',q_{\tilde{\omega}},\tilde{\omega}'), & \text{ako je } k=1,2,4;\\ q_s, & \text{ako je } (k,\omega')\in\{(3,n),(5,s)\};\\ \varphi_{\mathfrak{A}^+}(q_n,\overline{a_{\mathfrak{A}_1'}(p)}) & \text{u ostalim slučajevima;}\end{cases}$$

i

$$\psi_{\mathfrak{A}_1'}(q,a_{\mathfrak{A}_1'}(p))=\psi_{\mathfrak{K}_j'}(q,a_{\mathfrak{K}_j'}(p))=\psi_{\mathfrak{A}_1}(((q_1,k),\omega'),\tilde{a}_1);$$

$((\tilde{q}_j,\tilde{k}),\tilde{\omega}')=\varphi_{\mathfrak{A}_j}(((q_j,k),\omega'),\tilde{a}_j)$; $\tilde{a}_j=(\{(j',((q_{j'},k),\omega'))\},w_1,\ldots$ $\ldots,w_8)$, gde je $\overline{a_{\mathfrak{A}_1'}(p)}=(w_0,\ldots\ \ldots,w_8)$ i $j'=[3-(-1)^j]/2$; $j=1,2$; $\alpha'=-1$, ako je $k\in\{1,2\}$, a ako je $k=4$, to je $\alpha=1$; $q=((q_1,k),$ $(q_2,k),i,\alpha,q_{\omega},\omega')$ – stanje pešaka $\mathfrak{A}_1'$.

Pretpostavimo sada da pešaci $\mathfrak{A}_1'$, $\mathfrak{K}_1'$ i $\mathfrak{K}_2'$ imaju susret na nekom polju $p\in P_C$, i $\mathfrak{A}_1'$ je u stanju $q\in Q_{\mathfrak{A}^+}$. Ako je

$$(a^*_{-1,0},a^*_{-1,-1},a^*_{0,-1})=(1,0,1)\quad (a^*=\overline{a_{\mathfrak{A}_1'}(p)}),$$

i, ili je $q=q_n$, ili $\psi_{\mathfrak{A}^+}(q,a^*)=s$, to uzmimo da je

$$\psi_{\mathfrak{A}_1'}(q,a_{\mathfrak{A}_1'}(p))=\psi_{\mathfrak{K}_i'}(q_0^i,a_{\mathfrak{K}_i'}(p))=s,\ i=1,2,$$

i

$$\varphi_{\mathfrak{A}_1'}(q,a_{\mathfrak{A}_1'}(p))=(((q_s,q_1'),1),((q_s,1),1),1,-1,q_s,\omega'),$$

gde je

$$\omega'=\begin{cases}s, & \text{ako je } q=q_n;\\ n, & \text{ako je } \psi_{\mathfrak{A}^+}(q,a^*)=s;\end{cases}$$

u protivnom je

$$\varphi_{\mathfrak{A}_1'}(q,a_{\mathfrak{A}_1'}(p))=\varphi_{\mathfrak{A}^+}(q,a^*)$$

i

$$\psi_{\mathfrak{A}_1'}(q,a_{\mathfrak{A}_1'}(p))=\psi_{\mathfrak{K}_i'}(q_0^i,a_{\mathfrak{K}_i'}(p))=\psi_{\mathfrak{A}^+}(q,a^*),\ i=1,2.$$

Kao i teoremi 7.1.1, lako je proveriti, da sistem $\mathcal{A}_0'=(\mathfrak{A}_1',\mathfrak{K}_1',\mathfrak{K}_2')$ obilazi svaki konačan p-lavirinat.□

Dokaz teoreme 7.1.3. Napravimo sistem $(\tilde{\mathfrak{A}}_1,\tilde{\mathfrak{A}}_2)$ automata -miševa za koje je $Q_{\tilde{\mathfrak{A}}_i}=Q_{\mathfrak{A}_i}$, $i=1,2$; $(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2)$ – sistem pešaka iz teoreme 1.1. Neka je L - proizvoljni ravni lavirinat i neka $\tilde{\mathfrak{A}}_i$, $i=1,2$, leži na polju p_i lavirinta L i nalazi se u stanju q_i, $q_i \in Q_{\tilde{\mathfrak{A}}_i}$. Odredimo ulaz $a_i=\Delta_i(p_1,p_2)$ pešaka $\mathfrak{A}_i$ $(a_i \in A_{\mathfrak{A}_i})$, $i=1,2$, na sledeći način. Neka je

$$[\Delta_i(p_1,p_2)]_{j_1,j_2}=\begin{cases}\{(i',q_{i'})\}, & \text{ako je } p_1=p_2 \text{ i } (j_1,j_2)=0;\\ 1, & \text{ako je } p_1\neq p_2 \text{ i } (j_1,j_2)=0 \text{ ili} \\ & \text{ako je } (j_1,j_2)\neq 0 \text{ i } (j_1,j_2)\in\theta(p_i);\\ 0 & \text{u ostalim slučajevima;}\end{cases}$$

$i'=[3-(-1)^i]/2$; $i=1,2$. Tada pretpostavimo, da je

$$\varphi_{\tilde{\mathfrak{A}}_i}(q_i,a_{\tilde{\mathfrak{A}}_i}(p_i))=\varphi_{\mathfrak{A}_i}(q_i,a_i)$$

i

$$\psi_{\tilde{\mathfrak{A}}_i}(q_i,a_{\tilde{\mathfrak{A}}_i}(p_i))=\psi_{\mathfrak{A}_i}(q_i,a_i);$$

$i=1,2$. Lako je pokazati da sistem $(\tilde{\mathfrak{A}}_1,\tilde{\mathfrak{A}}_2)$ obilazi svaki ravan lavirint.

Na analogan način, polazeći od sistema $\mathcal{A}_0'=(\mathfrak{A}_1',\mathfrak{K}_1',\mathfrak{K}_2')$, možemo konstruisati sistem koji sadrži jednog miša i dva markera, koji obilazi svaki ravan lavirint.

Glava 8.

Automati-pešaci u beskonačnim p-lavirintima

U ovoj glavi se posmatraju automati u beskonačnim p-lavirintima. U [14] je pokazano da postoji sistem od 8 automata, pri čemu su 7 od njih markeri, koji obilazi svaki beskonačan p-lavirint. Dati dokaz u [14] se poziva na činjenicu, dokazanu u [15], da konačni automat zajedno sa dva beskonačna celobrojna brojača predstavlja univerzalnu mašinu Tjuringa. Konstrukcija samog sistema se ne daje, već se samo napominje da bi očigledniје rešenje zahtevalo dovoljno veliki broj markera. Naš je cilj da konstruišemo sistem od jednog automata i sedam markera koji bi na dovoljno očigledan način obilazio svaki beskonačan p-lavirint. Ponašanje ovog sistema opisaćemo programom koji će biti dat uz pomoć konstrukcija koje su slične sa konstrukcijama jezika programiranja Pascal-a.

1. Sistem od jednog automata i sedam markera koji obilazi sve konačne i beskonačne p-lavirinte

Neka je $((c,p_0))$ - proizvoljni beskonačni p-lavirint. Kao i u slučaju konačnih p-lavirinta, kaže se da sistem $A=(\mathfrak{A}_1,\ldots,\mathfrak{A}_n)$ obilazi taj p-lavirint, ako je $P_c=\mathrm{Int}(A;c,p_0)$.

Važi sledeće tvrđenje [14].

Teorema 1.1. Postoji sistem od osam pešaka sedam od kojih su markeri, koji obilazi svaki p-lavirint.

Dokaz. Neka je c proizvoljni p-lavirint i V jedna od njegovih rupa. Za proizvoljnog pešaka $\mathfrak{A}$ sa $z_{\mathfrak{A}}$ označimo polje p-lavirinta c, na kojem on leži. Pretpostavimo dalje, da su neki pešaci $\mathfrak{A}_1$ i $\mathfrak{A}_2$ na granici rupe V. Rastojanjem između $\mathfrak{A}_1$ i $\mathfrak{A}_2$ duž granice rupe V u odnosu na pravce P_1 i P_2, $P_1,P_2 \in \{e,n,w,s\}$, nazivamo broj $l(V;\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2,P_1,P_2)$, definisan na sledeći način. Postavimo pešaka $\mathfrak{A}^+$ u momentu t_0 na polje $z_{\mathfrak{A}_1}$ i u stanje q_{P_1}. Ako se u tom slučaju $\mathfrak{A}^+$ okreće pravilno oko rupe V u pozitivnom smeru i postoji momenat t_1, takav da je: (1) $q_{t_1}=q_{P_2}$ i $z_{t_1}=z_{\mathfrak{A}_2}$, a (2) za sve $t<t_1$, $q_t \neq q_{P_2}$ ili $z_t \neq z_{\mathfrak{A}_2}$, to je $l(V;\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2,q_1,q_2)=$ $=t_1-t_0$; u protivnom je $l(V;\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2,q_1,q_2)=\infty$; $\{(z_t,a_t,b_t,q_t)\}_{t=1}^{\infty}$ je ponašanje pešaka $\mathfrak{A}^+$ u p-lavirintu $(c,z_{\mathfrak{A}_1})$.

Dajmo prvo definiciju čuna. Čun se sastoji od četiri markera K_x, K_y, K_w i K_z, i pešaka $\mathfrak{A}$. Ako se ti pešaci nalaze na granici neke rupe V, to oni zajedno sa promenljivima FX i FY određuju brojače C_x, C_y i C_z na sledeći način:

$$C_x=\mathrm{sgn}(1/2-FX)*l(V;K_w,K_x,P_4,P_1),$$

$$C_y=\mathrm{sgn}(1/2-FY)*l(V;K_w,K_y,P_4,P_2)$$

i

$$C_z=l(V;K_w,K_z,P_4,P_3);$$

FX,FY:=0,1. Promenljive FX i FY čuvaju, u stvari, redom znakove veličina C_x i C_y. Promenljive P_1, P_2, P_3 i P_4 čuvaju redom vrednosti koje su bile na izlazu pešaka $\mathfrak{A}$, kad je on posljednji put premeštao, okrećući se oko rupe, markere K_x, K_y, K_z i K_w, a vrednost promenljive P_0 "obezbeđuje" kretanje pešaka $\mathfrak{A}$ oko rupe

V; $P_i \in \{e,s,w,n\}$, $1 \le i \le 4$; $P_0 \in \{e,s,n,w,*\}$. Svaki od brojača C_x, C_y i C_z možemo umanjiti ili uvećati za jedinicu. Pokažimo kako se to može uraditi na primeru brojača C_x. Stanje pešaka $\mathfrak{A}$ je niska vrednosti nekih promenljivih među kojima se nalaze i P_i, $1 \le i \le 5$. Ta stanja ćemo ponekad označavati sa $q(x_1,\dots,x_n)$, gde su x_i, $1 \le i \le n$, sve promenljive, čije vrednosti određuju stanje pešaka $\mathfrak{A}$. Među tim promenljivima nalaze se, na primer, i takve, koje mogu "naterati" pešaka $\mathfrak{A}$ da se okreće u pozitivnom smeru, počinjući od polja z_{K_w}, oko rupe V do susreta sa K_x, t.j. u takvom slučaju

$$P_0=\psi_{\mathfrak{A}}((x_1,\dots,P_0,\dots,x_n),a_{\mathfrak{A}}(z))=\psi_{\mathfrak{A}^+}(q_{P_0},\overline{a_{\mathfrak{A}}(z)})$$

i

$$q(x_1,\dots,\varphi_{\mathfrak{A}^+}(q_{P_0},\overline{a_{\mathfrak{A}}(z)}),\dots,x_n)=\varphi_{\mathfrak{A}}[(x_1,\dots,P_0,\dots,x_n),\overline{a_{\mathfrak{A}}(z)}].$$

Tada program R1 za uvećanje brojača C_x za jedan i program R2 za umanjenje istog za jedan imaju sledeći oblik:

```
procedure R1
   begin
      if FX=0
         then
            procedure R1'
         else
            procedure R2'
      if z_Kw=z_Kx
         then FX:=0
   end


procedure R2
   begin
      if FX=1 or z_Kw=z_Kx
         then
            begin
               FX:=1;
               procedure R1'
            end
         else
```

```
            procedure R2'
   end
```

```
procedure R1'
   begin
      P_0:=P_4;
      procedure R3';
      P_0,P_1:=ψ_𝔄+(q_P_0, ā_𝔄(z));
      z_𝔄:=z_𝔄+P_0;
      z_K_x:=z_K_x+P_1;
      P_0:=P̄_0;
      z_𝔄:=z_𝔄+P_0;
      procedure R4'
   end
```

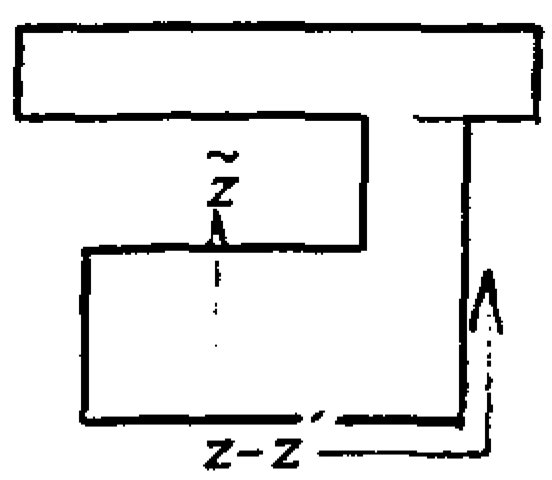
```
procedure R2'
   begin
      P_0:=P_4;
      procedure R3';
      P_0:=P̄_0;
      z_𝔄:=z_𝔄+P_0;
      z_K_x:=z_K_x+P_0;
      P_0:=ψ_𝔄-(q_P_0, ā_𝔄(z));
      z_𝔄:=z_𝔄+P_0;
      P_1:=P̄_0;
      procedure R4'
   end
```

```
procedure R4'
   begin
      while (P_4≠P̄_0 or z_𝔄+P_4≠z_K_w) do
         begin
            P_0:=ψ_𝔄-(q_P_0, ā_𝔄(z));
            z_𝔄:=z_𝔄+P_0
         end
      P_0:=*;
      z_𝔄:=z_𝔄+P_4
```

end

procedure R3'
  begin
    while $(z_{\mathfrak{A}} \neq z_{K_x}$ or $P_0 \neq P_1)$ do
      begin
        $P_0 := \psi_{\mathfrak{A}^+}(q_{P_0}, \overline{a_{\mathfrak{A}}(z)})$;
        $z_{\mathfrak{A}} := z_{\mathfrak{A}} + P_0$
      end
  end

Pešaci K_0 i K_1 određuju brojač C. Sistem-čun se mora kretati od pešaka K_0 do pešaka K_1, t.j. do polja $z_1 = z_{K_1}$, menjati, premeštajući K_1 na odgovarajući način, brojač C i vraćati se natrag u početnu tačku $z_0 = z_{K_0}$. Da bi to uradio čun se kreće po vertikali na sledeći način (sl.15). Pretpostavimo da se on kreće na gore (FD=1) od K_0 do K_1; na analogan način će se kretati i na dole (FD=0) od K_1 do K_0. U režimu rada FL=3 pešak $\mathfrak{A}$ "pokušava "da pođe na gore. Ako je to moće, to on prelazi na polje $z_{0,1}$ i ne menja režim rada FL=3; u protivnom, ako sa V označimo rupu, kojoj pripada polje $z_{0,1}$, to pešak $\mathfrak{A}$ prelazi na polje z', krećući se u pozitivnom smeru oko rupe V i prelazi u režim rada FL=1. U režimu rada FL=1 pešak $\mathfrak{A}$ se okreće oko V u pozitivnom smeru i "traži" polje $\tilde{z}$ skupa $Nb_1(V)$, koje se po vertikalnom pravcu na gore nalazi najbliže od svih ostalih polja skupa $Nb_1(V)$ (sl.15) čineći pri tome ceo obrtaj oko rupe V (ako je rupa V konačna), i dolazeći na polje z prelazi u režim rada FL=2. U režimu rada FL=2 pešak $\mathfrak{A}$ prelazi sa polja z na po-



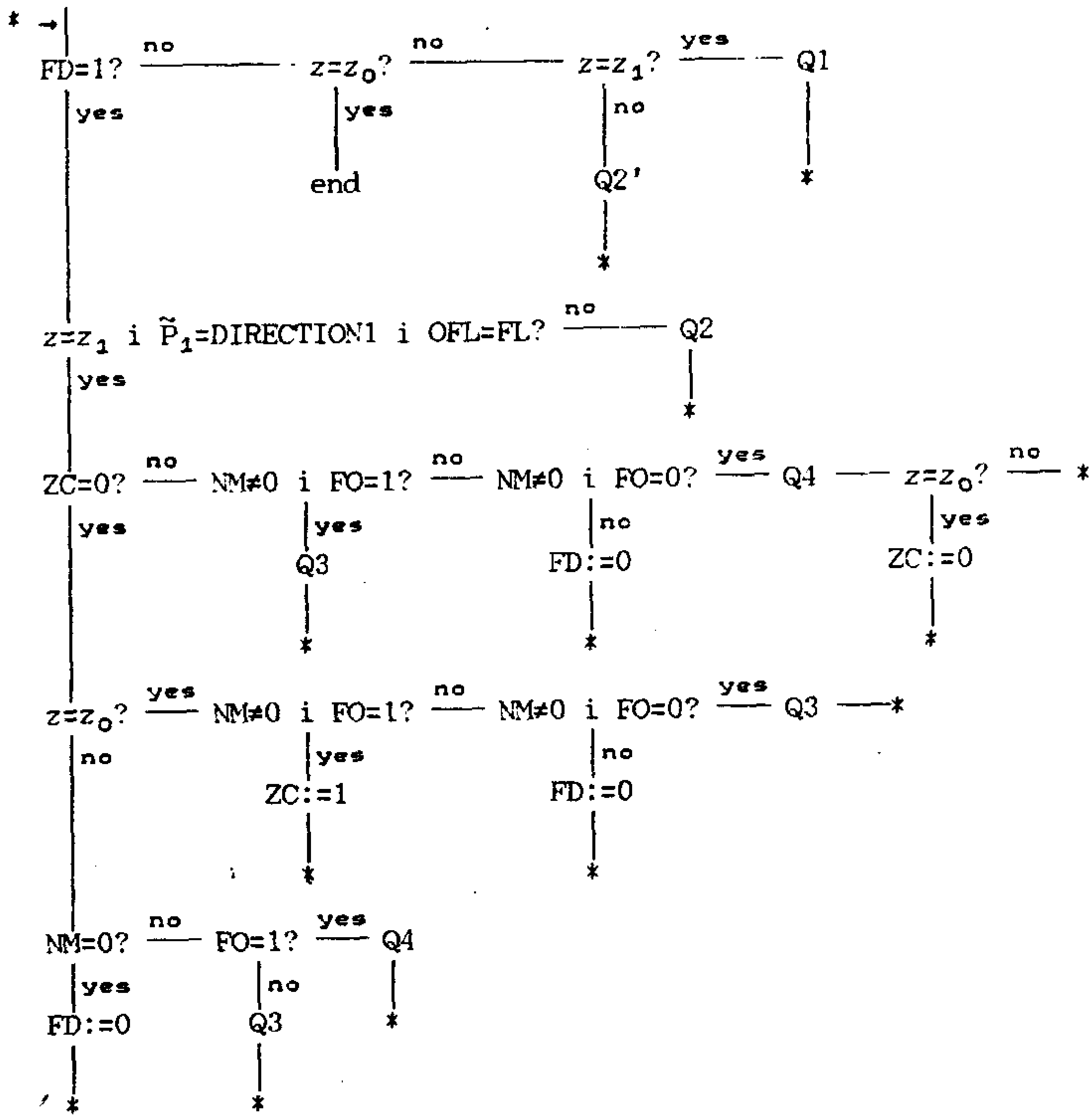
Sl.15.

lje $\tilde{z}$ i prelazi opet u režim rada FL=3. Više se pretpostavlja da pešak $\mathfrak{A}$ premešta i pešake čuna na odgovarajući način.

Brojač C se menja na sledeći način. Ako je FO=1, to se C smanjuje, a ako je FO=0, to se brojač C uvećava za vrednost NM; pretpostavlja se da promenljiva NM sadrži pozitivan ceo broj. U stvari, C sadrži samo apsolutnu vrednost veličine sa kojom ćemo mi operisati, a promenljiva ZC čuva njen znak. Tako da mi više ne menjamo vrednost od C, već vrednost izraza sgn(1/2-ZC)*C; ZC=0,1. Pošto se C menja premeštanjem K_1, to mi moramo sačuvati i informaciju o tome kakav je pravac poslednji put pri premeštanju markera K_1 imao pešak $\mathfrak{A}$, a takođe kakvu je vrednost u tom mementu imaala promenljiva FL. Označimo redom te promenljive sa $\tilde{P}_1$ i OFL, a sa DIRECTION1 - promenljivu koja čuva pravac posljednjeg premeštanja pešaka $\mathfrak{A}$. Da bi sve navedeno pešak $\mathfrak{A}$ mogao uraditi, čun se mora kretati saglasno sa algoritmom datim na sl.16, gde podprogrami Q1, Q2, Q3 i Q4 imaju sledeći oblik:

```
procedure Q1
   case FL of
      1:
       begin
          while not (Cx=0 and Cy=0) do
             procedure P1'
          FL:=3
       end
      2:
       FL:=3
      3:

       procedure Q2'
   end {case}


procedure Q2'
   begin
      if c(z0,-1)=1
         then
            pešak 𝔄 premešta markere Kw, Kx, Ky i
            Kz na polje z0,-1;
```

```
        else
           begin
              FL:=1
              while FL≠2 do
                 procedure P1
              procedure P2
           end
    end


procedure Q2
    begin
       case FL of
          1:
           procedure P1
          2:
           procedure P2
          3:
           procedure P3
       end {case}
    end


procedure Q3
    begin
       NM:=NM-1
       case FL of
          1:
           procedure P1
           procedure P4
          2:
           procedure P2
           procedure P4
          3:
           procedure P3
           if FL=3
              then
                 pešak 𝔄 premešta markere K_1, K_w, K_x, K_y
                 i K_z na polje z_{0,+1}
              else
                 procedure P4
       end {case}
    end
```



Sl.16.

```
procedure Q4
   begin
      NM:=NM-1;
      case FL of
         1:
          begin
             procedure P1'';
             procedure P4';
             if Cx=0 and Cy=0
                then FL=3
          end
         2:
          begin
             procedure P1'';
             FL:=1;
             procedure P4'
```

```
          end
         3:
          begin
             if c(z_{0,-1})=1
                then
                   begin
                      pešak 𝔄 premešta markere K_1, K_w, K_x, K_y
                      i K_z na polje z_{0,-1}
                   end
                else
                   begin
                      P_0:=w;
                      op_1(+,K_w,K_x,K_y,K_z);
                      op_2(C_x,C_y);
                      while FL≠2 do
                         procedure P1'
                      procedure P2;
                      procedure P4'
                   end
          end
      end {case}
   end
```

Program P4'(P4) radi tako da se pešak $\mathfrak{A}$ kreće oko rupe od polja z_{K_w} u pozitivnom (negativnom) smeru do markera K_1, "uzima" ga i "nosi" ga, okrećući u pozitivnom (negativnom) smeru natrag na polje z_{K_w}. Podprogrami P1, P2, P3, P' i P1'' imaju sledeću formu:

```
procedure P1
   begin
      if C_x≠0
         then
            begin
               op_1(+,K_w,K_x,K_y,K_z);
               op_2(C_x,C_y)
            end
      else if C_y=0
         then FL:=2
      else if C_z=0 and C_y>0
         then C_z:=C_y
      else if C_z>C_y and C_y>0
         then C_z:=C_y
   end
```

```
procedure P1''
   begin
```

```
      if Cx≠0
         then
            begin
               op1(+,Kw,Kx,Ky,Kz);
               op2(Cx,Cy)
            end
      else if Cy=0
         then FL:=2
      else if Cz=0 and Cy<0
         then Cz:=Cy
      else if Cz<Cy and Cy<0
         then Cz:=Cy
   end


procedure P2
   begin
      while not (Cx=0 and Cy=Cz)
         begin
            op1(+,Kw,Kx,Ky,Kz);
            op2(Cx,Cy)
         end
      FL:=3
   end


procedure P3
   begin
      if c(z0,1)=1
         then
            pešak 𝔄 premešta markere Kw, Kx, Ky i
            Kz na polje z0,1
         else
            P0:=e;
            op1(+,Kw,Kx,Ky,Kz)
            op2(Cx,Cy)
            FL:=1
   end


procedure P1'
   begin
      if z_{Kz}≠z_{Kw}
         then
            pešak 𝔄 premešta markere Kz do polja z_{Kw}
      op1(-,Kw,Kx,Ky,Kz);
      op2(Cx,Cy)
   end
```

Ovde $op_1(+,K_w,K_x,K_y,K_z)$ ($op_1(-,K_w,K_x,K_y,K_z)$) označava to da pešak $\mathfrak{A}$ premešta svaki od markera K_w, K_x, K_y, K_z za jedno polje oko date rupe u pozitivnom (negativnom) smeru i pravac koji je pri tome imao premeštajući marker K_w se čuva u promenljivoj DIR; $op_2(C_x, C_y)$ - saglasno sa vrednošću promenljive DIR $\mathfrak{A}$ menja bro- jače C_x i C_y.

U stvari, jasno je da broj koji se nalazi u brojaču C govori koliko ukupno puta čun radi po podprogramima P1, P2 i P3, da bi od polja z_0 došao do polja z_1.

Neka je dat još jedan pomoćni marker K_h, koji zajedno sa K_0 određuje brojač C'. Čun može upravljati tim brojačem na isti način kao i brojačem C. Pretpostavimo da su u početnom momentu svi pešaci bili na nekom polju p_0. Brojač C sadrži broj oblika

$$2^{|x|}\ 3^{|y|}\ 5^{k+1-|x|}\ 7^{k+1-|y|}\ 11^{(2k+1)^2-z}\ 13^{z},$$

gde su x i y koordinate tačke z_{K_0} u pravouglom kordinatnom sistemu, koji za kordinatni početak ima tačku p_0. Promenljive SX i SY će čuvati redom znake vrednosti koordinata x i y. Znači, u brojaču C će biti zakodirano mesto u ravni markera K_0 u odnosu na polje p_0. Premeštajući K_0 mi moramo ili da uvećavamo ili da smanjujemo x i y, tako da se mi moramo naučiti kako da delimo i množimo vrednost brojača C na neki proizvoljan prirodan broj.

Algoritam množenja sa brojem k, $k \in N$, vrednosti brojača C ima sledeći oblik:

```
C':=C; {čun premešta marker Kh od K0 do K1}
while C'≠0 do
   begin
      C:=C+k-1;
      C':=C'-1
   end
```

Recimo ovde samo da umesto operatora C:=C+k-1 (C':=C'-1), u stvari, treba pisati program, čiji je diagram dat na sl.16., kod kojeg promenljive NM i FO imaju redom vrednosti k-1 i 0 (1 i 1). Algoritam deljenja sa brojem k, k∈N, vrednosti brojača C ima sledeći oblik:

```
procedure test;
if RESULT=0
   then
      while C'≠0 do
         begin
            C':=C'-1;
            C:=C+k-1
         end
C':=0;
ZC:=HELP
```

Ovde podprogram test ima sledeću formu:

```
procedure test
   begin
      C':=0;
      EXIT:=true;
      RESULT:=0;
      HELP:=ZC;
      ZC:=0;
      while EXIT do
         begin
         C':=C'+1;
         C:=C-k+1;
         if ZC=1
            then EXIT:=false
         else if C:=C'
            then
               begin
                  RESULT:=1;
                  EXIT:=false
               end
      end {while}
   end
```

Promenljiva RESULT pokazuje da li je C deljivo sa k ili ne. Ako C nije deljivo sa k, to se C ne menja, a C':=0.

Ako želimo samo da saznamo da li je C deljivo sa k ili ne, to je tada dovoljno koristiti sledeći program:

```
procedure test
```

```
while C'≠0 do
   begin
      C':=C'-1;
      C:=C+k-1
   end
ZC:=HELP
```

Premeštajući kroz lavirint c marker K_o pešak 𝔄 mora "prebrojati" i brojač C. To je moguće uraditi zahvaljujući pomoćnom markeru K_h i brojaču C' na sledeći način:

```
procedure W
   begin
      case DIRECTION of
         n:
          begin
             𝔄 premešta Ko, Kh i markere čuna na z1,o
             C:=C+1;
             if SX=1
                then
                   begin
                      C:=C/2;
                      if not 2|C
                         then SX:=0
                      C:=5*C
                   end
                else
                   begin
                      C:=2*C;
                      C:=C/5
                   end
          end
         s:
          begin
             𝔄 premešta Ko, Kh i markere čuna na z-1,o
             C:=C-1;
             if not 2|C
                then
                   begin
                      SX:=1;
                      C:=2*C;
                      C:=C/5
                end
             else if SX=1
                then
                   begin
                      C:=2*C;
                      C:=C/5
                   end
             else
                begin
                   C:=C/2;
```

```
            C:=5*C
         end
 end
w:
 begin
    if not 3|C
       then
          begin
             SY:=1;
             C:=3*C;
             C:=C/7
          end
    else if SY=1
       then
          begin
             C:=3*C;
             C:=C/7
          end
    else
       begin
          C:=C/3;
          C:=7*C
       end
    𝔄 premešta K_h na z_{-1,o};
    HELP:=ZC;
    ZC:=0;
    while C≠0 do
       begin
          C:=C-1;
          𝔄 premešta K_o i markere čuna na z_{-1,o};
          C':=C'+1;
          𝔄 premešta K_o i markere čuna na z_{1,o}
       end
    𝔄 premešta K_1 i markere čuna na z_{-1,o};
    C:=C';
    C'=0;
    ZC:=HELP
 end
e:
 begin
    if SY=1
       then
          begin
             C:=C/3;
             if not 3|C
                then SY:=0
             C:=7*C
       end
    else
       begin
          C:=3*C;
          C:=C/7
       end
    𝔄 premešta K_h na z_{1,o};
    HELP:=ZC;
```

```
            ZC:=0;
            while C≠0 do
               begin
                  C:=C-1;
                  𝔄 premešta K₀ i markere čuna na z₁,₀;
                  C':=C'+1;
                  𝔄 premešta K₀ i markere čuna na z₋₁,₀
               end
            𝔄 premešta K₁ i markere čuna na z₁,₀;
            C:=C';
            C'=0
            ZC:=HELP
         end
   end
```

Ako skup $Nb_1(V)$ neke rupe V leži u kvadratu θ_k: $|x|\leq k$, $|y|\leq k$, to je jasno da je $Nb_1(V)\leq(2k+1)^2$. Znači, ako hoćemo da proverimo da li leži neka rupa zajedno sa svojom granicom, na kojoj se nalazi naš sistem pešaka, t.j. pešak K_0, unutar kvadrata θ_k, to je dovoljno okrečući se oko te rupe u pozitivnom smeru napraviti $(2k+1)^2$ koraka svaki put proveravajući uslov $|x|\leq k \vee |y|\leq k$. Poslednji uslov možemo lako proveriti proveravajući deljivost C sa 5^2 i 7^2. Tada će se sistem iz jednog pešaka i sedam markera, koji obilazi svaki lavirint kretati po sledećem programu:

```
REPEAT:=1;
RESTART:=0;
while REPEAT=1 do
   begin
      H1:=0
      H2:=0
      if RESTART=4
         then
            begin
               for I:=1 to 8 do
                  begin
                     C:=11*C
                     while not 5²|C do
                        begin
                           C:=11*C;
                           C:=C/5;
                           C:=13*C {čuva broj p₅(C)}
                        end
```

```
              while not 13|C do
                 begin
                    C:=5*C;
                    C:=C/13
                 end
          end
       C:=5*C;
       C:=7*C;
       RESTART:=0;
    end
else
    begin
       if not 5²|C
          then H1:=1
       if not 7²|C
          then H2:=1

       DIRECTION1:=op₃(‾a_𝔄(z)‾,SX,SY,H1,H2,DIRECTION);
       DIRECTION2:=DIRECTION;
       if (c(z_{-1,0}),c(z_{-1,-1}),c(z_{0,-1}))≠(1,0,1)
       or (DIRECTION1≠s and DIRECTION2≠n)
          then
             begin
                DIRECTION:=DIRECTION1;
                procedure W
             end
          else
             begin
                H3:=1;
                DIRECTION:=w;
                repeat
                   C:=13*C;
                   C:=C|11;
                   procedure W;

                   DIRECTION:=ψ_𝔄+(q_DIRECTION,‾a_𝔄(z)‾);
                   if not 5|C or not 7|C then H3:=0
                until 11|C and H3=1

                DIRECTION:=‾DIRECTION‾;
                while 13|C do
                   begin
                      C:=C|13;
                      C:=C*11;
                      procedure W;

                      DIRECTION:=ψ_𝔄-(q_DIRECTION,‾a_𝔄(z)‾);
                   end
                if H3=0
                   then
                      begin
                         DIRECTION:=DIRECTION1;
```

```
                procedure W;
            end
         else
            begin
                pešak 𝔄 zajedno sa markerima K0 i Kw
                proverava da li je polje zK0 osobeno
                ili ne; ako je osobeno, to je H4:=1,
                a u protivnom slučaju je H4:=0;
                if H4:=1
                   then
                      begin
                         if DIRECTION1=s
                            then DIRECTION:=n
                         if DIRECTION2=n
                            then
                               begin
                                  DIRECTION:=s;
                                  procedure W
                               end
                      end
               else
                      begin
                         DIRECTION:=DIRECTION1;
                         procedure W
                      end
            end
      end
   end
 if not (2|C or 3|C)
   then RESTART:=RESTART+1;
end
```

Operator $op_3(\overline{a_{\mathfrak{A}}(z)}$,SX,SY,H1,H2,DIRECTION) daje pravac, koji bi kao izlaz imao pešak $\mathfrak{A}^{*}$ iz teoreme 6.1.1, ako bi njegovo stanje bilo $q_{\mathrm{DIRECTION}}$, i ako bi njegovo vidno polje uzeli u odnosu na skup $\theta_k \cap P_c$, gde je c dati beskonačni p-lavirint. Jasno je, da iz vrednosti promenljivih SX,SY,H1 i H2 možemo odrediti to vidno polje.

Pošto se vrednost promenljive REPEAT ne menja u programu to se sistem $A_0=(\mathfrak{A},K_0,K_1,K_h,K_w,K_x,K_y,K_z)$ nikada "ne zaustavlja". Promenljiva RESTART govori koliko puta se sistem A_0, t.j. marker K_0, našao na početnom polju p_0 ne izlazeći iz kvadrata θ_k. Iz paragrafa 6.2, je jasno, da ako je RESTART:=1, to je skup $\theta_k \cap P_C$ obiđen, i sistem A_0 može već u sledećem prolazu, više datog, programa da obilazi skup $\theta_{k+1} \cap P_C$. Pošto se sistem A_0 ne zaustavlja, to on obilazi skup $P_C = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\theta_k \cap P_C)$, što je i trebalo dokazati.

SPISAK LITERATURE

1. Кудрявцев В.Б. Функциональные системы. – М.: Изд-во МГУ, 1982.
2. Кон П. Универсальная алгебра: Пер. с англ. – М.: Мир, 1968.
3. Яблонский С.В. О функциональной полноте в трехзначном исчислении. – ДАН СССР, т.95, № 6, 1954, с 1153-1156.
4. Гаврилов Г.П. О функциональной полноте в счетнозначной логике. Сб. "Проблемы кибернетики", вып. 15. – М.: Наука, 1965, с. 5-64.
5. Мальцев А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции. – М.: Физматгиз, 1965.
6. Берж К. Теория графов и ее применения: Пер. с англ. – М.: ИЛ, 1962.
7. Катленд Н. Вычислимость. Введение в теорию рекурсивных функций: Пер. с англ. – М.: Мир, 1983.
8. Кудрявцев В.Б., Подколзин А.С., Ушчумлич Ш. Введение в теорию абстрактных автоматов. – М.: Изд-во МГУ, 1985.
9. Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. – М.: Наука, 1985.
10. Budach L. Automata and Labyrinths. Math. Nachrichten 86, 1978, 195-282.

11. Antelmann H., Budach L., Rollik H.-A. On universal traps. EIK 15/3, 1979, 123-131.

12. Рингель Г. Теорема о раскраске карт: Пер. с англ. - М.: Мир, 1977.

13. Blum M., Kozen D. On the Power of the Compass. 19th IEEE FOCS Conf. 1978, pp.132-142.

14. Blum M., Sakoda W. On the capability of finite automata in 2 and 3-dimensional space. 18th IEEE FOCS Conf. 1977, pp. 147-161.

15. Minsky M.L. Computation: Finite and Infinite Machines, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1967.