Dragomir I. Lopandić,
asistent na Katedri matematike
Prir.-mat. fakulteta u Beogradu

GENERALIZACIJA IZVESNIH TEOREMA METRIČKE I PROJEKTIVNE GEOMETRIJE U PROSTORU R^n

U V O D

Geometrija n-dimenzionog euklidskog prostora R^n, podstaknuta primenama koje poslednjih decenija nalazi u drugim oblastima, izrasta u disciplinu koja ima svoj ne samo teorijski, već i prakričan značaj. Metode N. S. Kurnakova, koje se svakog dana sve više koriste u fizičko-hemijskoj analizi zasnovane su na rezultatima geometrije navedenog prostora. Topološka i druga svojstva politopa iz tog prostora, koja su od osobitog interesa u primenjenim oblastima, predmet su proučavanja sintetičke geometrije višedimenzionih prostora. Sttim u vezi, napominjemo da su u geometriji prostora R^n do danas proučavani pored opštih i izvesni specijalni politopi koji najčešće imaju svoje analogone u opažajnim prostorima R^2 i R^3. Medju najviše proučavanim specijalnim politopima nalaze se pravilni i polupravilni politopi, topološki pravilni i topološki polupravilni politopi, politopi k-tog /k = 0, 1, 2, ... / roda, zatim konveksni, prosti i drugi politopi. Posebno su u prostoru R^n proučavani n-dimenzioni simpleksi, tj. politopi definisani sa n+1 linearno nezavisnih tačaka. Kao i drugi specijalni politopi, simpleksi se prema svojim osobinama ponovo klasifikuju, te na taj način dolazimo do takozvanih izodinamičkih, izogonalnih, ortogonalnih i drugih simpleksa.

Problemi koji se tretiraju u geometrijama navedenih politopa odnose se najčešće na generalizacije pojmova i svojstava poznatih u geometriji trougla i geometriji tetrajedra. Takve generalizacije imaju svoja dva smera; jedan smer ima za cilj da poznate pojmove i svojstva iz geometrije trougla i geometrije tetraedra prošire na n-dimenzione simplekse, a drugi smer da tako izvedene pojmove i svojstva u geometriji n-dimenzionih simpleksa prošire na ostale n-dimenzione politope. Pri tome, pojmovi i svojstva ravnih poligona, polijedara, polijedroida i drugih, postaju specijalni slučajevi mnogo opštijih pojmova i teorema izvedenih u geometriji n-dimenzionih politopa. Ovakve generalizacije ne idu u prilog opštem uverenju da svojstva n-dimenzionih simpleksa predstavljaju osnovu neophodnu za izvodjenje bilo kakvih svojstava u sintetičkoj geometriji n-dimenzionih politopa i u opšte, sintetičkoj geometriji n-dimenzionih prostora. Naprotiv, takve generalizacije sve jasnije ukazuju da su u n-dimenzionim prostorima svojstva n-dimenzionih simpleksa samo specijalni slučajevi mnogo opštijih svojstava koja postoje u geometriji n-dimenzionih politopa.

Kao u diferencijalnoj geometriji n-dimenzionih metričkih prostora, gde generalisani izvesni pojmovi imaju mnogo šire značenje no u geometriji opažajnog prostora, kakav je naprimer prošireni pojam paralelizma krivih, kojeg je 1925 godine definisao Levi Čivita, tako se najčešće postupa i pri generalizaciji pojmova u sintetičkoj geometriji. Prirodno je očekivati da tako generalisani pojmovi uslovljavaju uopštavanje svih teorema koje su neposredno vezane za njih. Tako su u geometriji n-dimenzionih politopa definisanjem pojma roda i pojma k-dimenzione pljosni, izvedene teoreme Poenkarea koje proširuju Ojlerovu i niz drugih teorema topološkog karaktera, poznatih u geometriji prostih poligona i polijedara. Sličnim postupkom, godine 1953.N. A. Kolmogorov generalizacijom pojma anharmonijskog i harmonijskog odnosa omogućuje proširenje niza teorema na simplekse sa bilo kojim brojem dimenzija. Iduće, 1954.godine čehoslovački geometar Zbinek Nadenik izvodi generalizacije teorema Menelaja i Čevija kojima nešto opštiju formulaciju daje Beskin godine 1956. Iste, 1956. godine T. G. Ivnickij daje jedan analogon Paskalove teoreme u četvoro-dimenzionom euklidskom prostoru, a 1957. japanski geometar Ivata proširuje pojam Monžove tačke i pojam ortopola na n-dimenzione simplekse prostora R^n. Tim generalizacijama obavezno se ispostavlja da geometrijska svojstva likova, prema tome i politopa u opažajnom prostoru predstavljaju samo specijalne slučajeve mnogo opštijih svojstava koja važe u geometriji prostora R^n.

Problemi koji se proučavaju u ovom radu imaju analogan zadatak. Njima se sintetičkom metodom generališe u oba navedena smera niz pojmova i teorema metričke i projektivne geometrije. Proučavana svojstva se odnose na geometriju n-dimenzionih politopa prostora R^n.

Pri proučavanju mnogih svojstava nije potrebno da kod n-dimenzionih politopa razlikujemo ivice od dijagonala, k-dimenzione pljosni od k-dimenzionih dijagonalnih preseka, itd. Ta osobina omogućuje da pri ispitivanju istih ne uzimamo u obzir ceo n-dimenzioni politop sa svim njegovim ivicama i pljosnima, već samo uzajamni položaj njegovih temena. Na taj način izlaganje postaje znatno uprošćeno. Zbog toga se, u ovom radu, proučavanje k-dimenzionih politopa sa temenima $A_1, \ldots, A_m$ svodi na proučavanje k-dimenzionih skupova od m tačaka $A_1, \ldots, A_m$ koje, kratkoće radi, nazovimo k-dimezionim m-totemenicima ili k-dimenzionim simpleksoidima, a simbolički obeležavajmo sa $\Pi_m^k(A) \equiv (A_1 \ldots A_m)$. Tačke $A_1, \ldots, A_m$ nazovimo temenima, a prave odredjene parovima tih tačaka nazovimo ivicama simpleksoida $\Pi_m^k(A)$. Pored toga, podskupöve od p bilo kojih tačaka $/0 < p < m/$ navedenog skupa nazovimo p-pljosnima simpleksoida $\Pi_m^k(A)$, koje ćemo u daljim izlaganjima obeležavati sa $\Pi_{\mu_1 \ldots \mu_p | m-p}(A) \equiv (A_{\mu_{p+1}} \ldots A_{\mu_m})$. Pri tome, indeksi $\mu_1, \ldots, \mu_m$ uzimaju medjusobom različite vrednosti od 1 do m. Jasno je da se iz ove definicije ne može utvrditi koliko dimenzija ima p-pljosan simpleksoida $\Pi_m^k(A)$, sem u slučaju kada je $k = m-1$. Pljosni $\Pi_{\mu_1 \ldots \mu_p | m-p}(A)$ i $\Pi_{\mu_{p+1} \ldots \mu_m | p}(A)$ nazovimo naspramnim pljosnima simpleksoida $\Pi_m^k(A)$. Iz definicije neposredno sleduje da simpleksoid $\Pi_m^k(A)$ ima $\binom{m}{p}$ p-pljosni; temena simpleksoida $\Pi_m^k(A)$ takodje su pljosni tog simpleksoida.

Na taj način, pojam simpleksoida uopštava pojam k-dimenzionog simpleksa koji je odredjen isključivo sa k 1 linearno nezavisnih tačaka. Štaviše, pojam simpleksoida obuhvata i degenerisane k-dimenzione simplekse koje je u svojoj knjizi "Kombinatornaja topologija" definisao P. S. Aleksandrov.

Prema svojstvima simpleksoida koje ćemo proučavati, ovaj rad podeljen je u četiri dela koji su izloženi sledećim redom:

I. Generalizacija pojma ortocentra i Monžove tačke na k-dimenzione simpleksoide;

II. Generalizacija izvesnih Ojlerovih teorema na n-dimenzione simpleksoide;

III. Generalizacija pojma ortopola na n-dimenzione simplekse i neka njegova svojstva;

IV. Generalizacija Dezargovih teorema na k-dimenzione simpleksoide.

Pored generalizacije navedenih pojmova, u prvom delu izveden je niz osobina koje imaju tako generalisani ortocentri i generalisane Monžove tačke pomenutih simpleksoida.

U drugom delu ovog rada izvedena su u metričkoj geometriji dva različita vida generalizacije izvesnih Ojlerovih teorema i tom prilikom definisane Ojlerove centroidne i Ojlerove karakteristične hipersfere jedne veoma široke klase simpleksoida.

U trećem delu izveden je pojam ortopola n-dimenzionog simpleksa u odnosu na proizvoljnu hiperravan, zatim su u vezi s tim pojmom izvedena izvesna svojstva n-dimenzionih simpleksoida.

Dok prva tri dela tretiraju probleme generalizacije pojmova i teorema metričke geometrije, četvrti deo ovog rada odnosi se na generalizaciju Dezargovih teorema projektivne geometrije.

Uporedo s izlaganjima dati su kratki osvrti na istorijski razvoj pojedinih uopštenja, a na kraju navedena literatura koja je korišćena pri proučavanju odgovarajućih problema.

I. GENERALIZACIJA POJMA ORTOCENTRA I MONŽOVE TAČKE NA k-DIMENZIONE SIMPLEKSOIDE

U uvodnom delu pomenuli smo da su u geometriji n-dimenzionih politopa, pored opštih proučavani i specijalni simpleksi kao što su izogonalni, izodinamički, ortogonalni i drugi simpleksi. Svojstva tih simpleksa bila su poslednjih decenija predmet proučavanja mnogih geometara, kojima je bio cilj da na njih prošire svojstva poznata u geometriji trougla i tetraedra. U tom smeru naročito su ispitivani ortogonalni simpleksi, tj. simpleksi kod kojih su dve bilo koje naspramne pljosni upravne medju sobom. Pored niza osobina kojima se karakterišu ortogonalni simpleksi, dokazano je da se prave, od kojih svaka sadrži jedno teme a upravna je na hiperravni naspramne pljosni, seku u jednoj tački, ortocentru tog simpleksa. Zbog toga se veoma često u literaturi ortogonalni simpleksi nazivaju još i ortocentarskim simpleksima. Na takve simplekse generalisane su na različite načine Ojlerove i još neke teoreme iz geometrije trougla i geometrije ortogonalnih tetraedara, koje imaju strogo metrički karakter. Tako je dokazano da se središte O hipersfere opisane oko ortogonalnog simpleksa, težište T tog simpleksa i njegov ortocentar F nalaze na jednoj, takozvanoj Ojlerovoj pravoj tog simpleksa. Štaviše, dokazano je da je tačka T izmedju tačaka O i F takva da je FT : TO = 2 : /n-1/. Navedena svojstva n-dimenzionih ortogonalnih simpleksa rezultati su skorijeg datuma, proučavali su ih E. Egervary, G. Hajos, J. C. H. Gerretsen, Z. Nadenik, G. P. Krejcer, G. I. Tjurin i drugi.

Uporedo s problemom generalizacije pojma ortocentra na n-dimenzione simplekse postavljeno je i pitanje generalizacije tog pojma na n-dimenzione politope. Prvi rad u tom smislu, premda se odnosi isključivo na ravne petouglove, dao je godine 1904. Juraj Majcen u svojem radu "Sur les pentagones orthocentriques". Tom prilikom definisan je ortocentar petougla kao tačka u kojoj se seku prave koje sadrže njegova temena, a upravne su na naspramnim stranicama. Takav ortocentar nemaju svi petougli, jer se pomenute prave ne seku uvek u jednoj tački. Jasno je da se analognim postupkom pojam ortocentra može proširiti i na izvesne mnogouglove s neparnim brojem temena. Medjutim, on se ne može proširiti na mnogouglove s parnim brojem temena, jer kod istih ne možemo razlikovati stranice naspram temena, i obrnuto. Sličnim postupkom mogli bismo u prostoru R^3 definisati ortocentre nekih složenijih polijedara, u prostoru R^4 ortocentre nekih složenijih polijedroida, a u n-dimenzionom prostoru R^n ortocentre nekih složenijih politopa. Klasa politopa koja ima tako definisane ortocentre veoma je ograničena. U daljim izlaganjima politope sa tako definisanim ortocentrima zvaćemo ortocentarskim politopima. Nećemo navoditi primere niti ispitivati osobine istih, samo ćemo pomenuti da se u opštem slučaju oko jednog takvog n-dimenzionog politopa ne može opisati hipersfera, prema tome, ne mogu se Ojlerove i mnoge druge teoreme poznate u geometriji ortocentarskih simpleksa proširiti na ortocentarske politope.

Dugo vremena posle Majcena ovaj problem nije uopšte proučavan. Tek se godine 1943. Augustine O. Konnully svojim radom "Orthocentre of a ciclic polygon" ponovo vraća tom problemu, izvodeći definiciju ortocentra tetivnog mnogougla na jedan potpuno drugi način, nezavisno od pojma visine tog mnogougla. Pošto je prethodno pokazao da se prave koje spajaju temena tetivnog četvorougla sa ortocentrima trouglova koji su odredjeni ostalim temenima seku u jednoj tački, ortocentru tog četvorougla, analognim postupkom, Konnuly definiše ortocentar tetivnog petougla kao tačku u kojoj se seku prave koje spajaju njegova temena sa ortocentrima četvorouglova koji su definisani ostalim temenima, itd.

Krajem iduće, 1944. godine Narasinga Rao u svojem radu "On the metric geometry of a ciclic n-point" induktivnim postupkom prilazi generalizaciji pojma ortocentra nezavisno od svojih prethodnika. Koristeći Silvesterovu teoremu poznatu u geometriji trougla Narasinga Rao definiše ortocentar bilo kojeg mnogougla $A_1 \ldots A_n$ upisanog u nekom krugu Γ sa središtem O kao tačku H takvu da je vektor OH jednak zbiru vektora OA_1, ..., OA_n.

Najnovijim radovima Robert Gurmataj /R. Goormaghtigh/ usvaja generalizaciju pojma ortocentra koju je dao Narasinga Rao. U svojem radu "Théorèmes recurrents relatifs aux polygones inscriptibles" Gurmataj proučava izvesna svojstva tako definisanih ortocentara pokazujući pri tome da krugovi kojima su središta ortocentri /n-1/-touglova $A_1 \ldots A_{\nu-1} A_{\nu+1} \ldots A_n$, $\nu=1, \ldots, n$; a poluprečnici jednaki poluprečniku kruga Γ, prolaze kroz ortocentar H tog n-tougla. Ostala svojstva tetivnih n-touglova dokazana u tom radu nisu u vezi s pojmom ortocentra, pa ih zbog toga nećemo ovde navoditi. Primetićemo samo da je postupak pri dokazivanju pomenutih teorema uvek induktivan.

Ovim radom ponovo se postavlja pitanje generalizacije pojma ortocentra i istovremeno kod n-dimenzionih simpleksoida $\Pi_m^k(A)$ upisanih u bilo kojoj hipersferi Γ^{n-1} prostora R^n definiše taj pojam na jedan potpuno drugi način. Tako definisane ortocentre za razliku od ranije pomenutih nazivaćemo linearnim ortocentrima, a simpleksoide koji imaju linearni ortocentar linearno ortocentarskim. Proučavanje svojstava takvih simpleksoida zahteva uopštenje niza drugih pojmova, poznatih u geometriji ortogonalnih i drugih simpleksa. Za izvodjenje istih neophodno je proširiti pojam Monžove tačke koja je radovima japanskog geometra Ivate, godine 1957. generalisana na bilo kakve n-dimenzione simplekse. Da bismo definisali pojam linearnog ortocentra n-dimenzionog simpleksoida $\Pi_m^k(A)$ upisanog u hipersferi Γ^{n-1} definišimo najpre pojam linearnog ortocentra jedne tačke, zatim skupa od dve tačke koje pripadaju toj hipersferi.

Definicija 1.1. Linearnim ortocentrom jedne tačke neke hipersfere Γ^{n-1} prostora R^n nazovimo samu tu tačku.

Definicija 1.2. Linearnim ortocentrom skupa od dve tačke neke hipersfere Γ^{n-1} prostora R^n nazovimo tačku koja je simetrična središtu O te hipersfere u odnosu na pravu odredjenu tim dvema tačkama.

Da ne bismo pojedinačno izvodili definicije i svojstva linearnih ortocentara postupno kod simpleksoida $\Pi_3(A)$, ..., $\Pi_m(A)$, mi ćemo induktivnim postupkom, pretpostavljajući da je definisan linearni ortocentar simpleksoida $\Pi_{m-1}(A)$ definisati linearni ortocentar H simpleksoida $\Pi_m^k(A)$. Za primenu navedenog postupka neophodno je još pretpostaviti da su kod simpleksoida $\Pi_{m-1}(A)$ izvedena izvesna njegova svojstva, tako bismo pretpostavili da je njegovo težište T tačka koja se nalazi izmedju linearnog ortocentra H i središta O hipersfere Γ^{m-1} takva da je HT : TO = /m-2/ : 1. Primenjujući uvedene pretpostavke, dokazaćemo prethodno sledeće dve teoreme.

Teorema 1.1. Ako je $\Pi_m^k(A)$ bilo koji simpleksoid upisan u nekoj hipersferi Γ^{m-1} prostora R^n, tada su linearni ortocentri H_μ /μ=1, ..., m/ pljosni $\Pi_{\mu|m-1}(A)$ definisani u odnosu na hipersferu Γ^{m-1} temena simpleksoida $\Pi_m^k(H)$ koji je simetričan simpleksoidu $\Pi_m^k(A)$ u odnosu na izvesnu tačku S.

Dokaz. Neka je O središte hipersfere Γ^{m-1} , T težište simpleksoida $\Pi_m^k(A)$, T_μ težišta njegovih pljosni $\Pi_{\mu|m-1}(A)$, a μ_1 i μ_2 dve fiksirane ma koje vrednosti indeksa μ . Prema Ojlerovoj teoremi, tačke T_{μ_1} i T_{μ_2} su na dužima OH_{μ_1} i OH_{μ_2} takve da je $H_{\mu_1}T_{\mu_1} : T_{\mu_1}O$ = /m-2/ : 1 i $H_{\mu_2}T_{\mu_2} : T_{\mu_2}O$ = /m-2/ : 1, pa je duž $T_{\mu_1}T_{\mu_2}$ jednako usmerena duži $H_{\mu_1}H_{\mu_2}$ i $H_{\mu_1}H_{\mu_2} : T_{\mu_1}T_{\mu_2}$=/m-1/ : 1. Pored toga, tačka T_{μ_1} je iza T u odnosu na A_{μ_1} takva da je $A_{\mu_1}T : TT_{\mu_1}$ = /m-1/ : 1 i tačka T_{μ_2} iza T u odnosu na A_{μ_2} takva da je $A_{\mu_2}T : TT_{\mu_2}$ = /m-1/ : 1, pa je duž $T_{\mu_1}T_{\mu_2}$ suprotno usmerena duži $A_{\mu_1}A_{\mu_2}$ i $A_{\mu_1}A_{\mu_2} : T_{\mu_1}T_{\mu_2}$=/m-1/:1. Otuda sleduje da su duži $A_{\mu_1}A_{\mu_2}$ i $H_{\mu_1}H_{\mu_2}$ jednake i suprotno usmerene, pa je središte S duži $A_{\mu_1}H_{\mu_1}$ istovetno središtu duži $A_{\mu_2}H_{\mu_2}$. Obzirom da su μ_1 i μ_2 bilo koje vrednosti indeksa μ , tačka S je zajedničko središte svih duži $A_\mu H_\mu$, pa su ortocentri H_μ pljosni $\Pi_{\mu|m-1}(A)$ definisani u odnosu na hipersferu Γ^{m-1} temena simpleksoida $\Pi_m^k(H)$ koji je simetričan simpleksoidu $\Pi_m^k(A)$ u odnosu na tačku S.

Definicija 1.3. Ako je $\Pi_m^k(H)$ simpleksoid kome su temena linearni ortocentri svih pljosni $\Pi_{\mu|m-1}(A)$ simpleksoida $\Pi_m^k(A)$ upisanog u hipersferi Γ^{n-1} prostora R^n, kazaćemo da je simpleksoid $\Pi_m^k(H)$ ortocentričan simpleksoidu $\Pi_m^k(A)$. Središte S simetrije tih simpleksoida nazovimo antisredište simpleksoida $\Pi_m^k(A)$.

Napominjemo da treba razlikovati ortocentarske simpleksoide od ortocentričnih, jer, prema definiciji, prvi imaju ortocentar a drugima su temena ortocentri pljosni nekog drugog simpleksoida.

Definicija 1.4. Hiperravan kroz ortocentar $H_{\mu\nu}(\mu,\nu=1,..,m;\mu\neq$ bilo koje pljosni $\Pi_{\mu\nu|m-2}(A)$ simpleksoida $\Pi_m^k(A)$ upisanog u nekoj hipersferi Γ^{n-1} prostora R^n, a koja je upravna na ivici $A_\mu A_\nu$ nazovimo ortocentarna hiperravan tog simpleksoida koja odgovara ivici na kojoj je upravna.

Iz definicije 1.4 neposredno sleduje da simpleksoid $\Pi_m^k(A)$ upisan u hipersferi Γ^{n-1} prostora R^n ima $\binom{m}{2}$ ortocentarnih hiperravni.

Teorema 1.2. Svih $\binom{m}{2}$ ortocentarnih hiperravni simpleksoida $\Pi_m^k(A)$ upisanog u hipersferi Γ^{n-1} prostora R^n seku se

/a/ po jednoj n-k dimenzionoj ravni ako je $k<n-1$;

/b/ po jednoj pravoj ako je $k=n-1$;

/c/ u jednoj tački ako je $k=n$.

Dokaz. Neka su H_μ linearni ortocentri pljosni $\Pi_{\mu|m-1}(A)$, $H_{\mu\nu}$ linearni ortocentri pljosni $\Pi_{\mu\nu|m-2}(A)$, a $P_{\mu\nu}$ ortocentarne hiperravni simpleksoida $\Pi_m^k(A)$ koje odgovaraju ivicama $A_\mu A_\nu$ $(\mu,\nu=1,\dots,m;\mu\neq\nu)$. Prema teoremi 1.1, tačke H_μ i H_ν su simetrične tačkama A_μ i A_ν u odnosu na antisredište S simpleksoida $\Pi_m^k(A)$, pa je prava $H_\mu H_\nu$ uporedna pravoj $A_\mu A_\nu$. Ortocentarna hiperravan $P_{\mu\nu}$ upravna je na pravoj $A_\mu A_\nu$, pa je zbog uporednosti pravih $A_\mu A_\nu$ i $H_\mu H_\nu$, hiperravan $P_{\mu\nu}$ upravna na pravoj $H_\mu H_\nu$. Kako je linearni ortocentar $H_{\mu\nu}$ pljosni

$\Pi_{\mu\nu|m-2}(A)$ zajedničko teme simpleksoida $\Pi_{\mu|m-1}(A)$ i $\Pi_{\nu|m-1}(A)$ koji su ortocentrični pljosnima $\Pi_{\mu|m-1}(A)$ i $\Pi_{\nu|m-1}(A)$, hipersfere opisane oko tih simpleksoida prolaze kroz tačku $H_{\mu\nu}$, imaju poluprečnike jednake poluprečniku hipersfere Γ^{n-1}, a središta su im tačke H_μ i H_ν /v.t. 1.1/, prema tome, duži $H_\mu H_{\mu\nu}$ i $H_\nu H_{\mu\nu}$ medjusobom su jednake. Otuda sleduje da je hiperravan $P_{\mu\nu}$ simetrala ivice $H_\mu H_\nu$ simpleksoida $\Pi^k_m(H)$. Na isti način dokazuje se da su i ostale ortocentarne hiperravni simpleksoida $\Pi^k_m(A)$ simetrale odgovarajućih ivica simpleksoida $\Pi^k_m(H)$. Dokaz teoreme nastavljamo pojedinačno.

/a/ Kako je simpleksoid $\Pi^k_m(A)$ upisan u nekoj hipersferi Γ^{n-1}, njemu simetričan simpleksoid $\Pi^k_m(H)$ u odnosu na tačku S upisan je u nekoj hipersferi $\Gamma^{n-1}_{(H)}$, pa se simetrale $P_{\mu\nu}$ ivica $H_\mu H_\nu$ za $k<n-1$ seku po jednoj /n-k/-dimenzionoj ravni P^{n-k} koja je apsolutno upravna na k-dimenzionoj ravni P^k kojoj pripada simpleksoid $\Pi^k_m(H)$. Otuda sleduje da ravan P^{n-k} prodire ravan P^k u nekoj tački H'. Hipersfera $\Gamma^{n-1}_{(H)}$ simetrična je hipersferi Γ^{n-1} u odnosu na antisredište S simpleksoida $\Pi^k_m(A)$, a njeno središte H pripada ravni P^{n-k}.

/b/ Na isti način dokazuje se da je simpleksoid $\Pi^{n-1}_m(H)$ upisan u hipersferi koja je simetrična hipersferi Γ^{n-1} u odnosu na tačku S, pa se simetrale $P_{\mu\nu}$ njegovih ivica seku po jednoj pravoj P^1 upravnoj na hiperravni P^{n-1} kojoj pripada simpleksoid $\Pi^{n-1}_m(H)$. Središte H hipersfere $\Gamma^{n-1}_{(H)}$ je na pravoj P^1.

/c/ Kada je $k=n$, simetrale $P_{\mu\nu}$ ivica $H_\mu H_\nu$ simpleksoida $\Pi^n_m(A)$ upisanog u hipersferi $\Gamma^{n-1}_{(H)}$ seku se u jednoj tački, središtu H hipersfere $\Gamma^{n-1}_{(H)}$.

Definicija 1.5. Tačku H u kojoj se seku ortocentarne hiperravni simpleksoida $\Pi^n_m(A)$ upisanog u nekoj hipersferi Γ^{n-1} prostora R^n nazovimo linearni ortocentar tog simpleksoida definisan u odnosu na hipersferu Γ^{n-1}. Linearnim ortocentrom simpleksoida $\Pi^k_m(A)$ za $k<n$, koji je definisan u odnosu na hipersferu nazovimo središte H hipersfere $\Gamma^{n-1}_{(H)}$.

Iz ove definicije i teoreme 1.2. neposredno sleduje da je linearni ortocentar H simpleksoida $\Pi_m^k(A)$ upisanog u hipersferi Γ^{n-1} tačka simetrična središtu O hipersfere Γ^{n-1} u odnosu na antisredište S tog simpleksoida. Pored toga, iz teoreme 1.2 sleduje da svaki simpleksoid $\Pi_m^k(A)$ upisan u hipersferi Γ^{n-1} prostora R^n ima linearni ortocentar definisan u odnosu na tu hipersferu. Ako su kod simpleksoida $\Pi_m^k(A)$ dva temena A_μ, A_ν dijametralno suprotna, biće linearni ortocentar $H_{\mu\nu}$ pljosni $\Pi_{\mu\nu|m-2}(A)$ istovetan sa linearnim ortocentrom H simpleksoida $\Pi_m^k(A)$, i obrnuto, ako se linearni ortocentri H i $H_{\mu\nu}$ poklapaju, biće temena A_μ, A_ν simpleksoida $\Pi_m^k(A)$ dijametralno suprotne tačke hipersfere Γ^{n-1}.

Specijalno, kada je $n=2$, hipersfera Γ^1 je krug koji se nalazi u ravni R^2. Ortocentarne hiperravni $P_{\mu\nu}$ bilo kojeg simpleksoida $\Pi_m^2(A)$ upisanog u tom krugu, prema tome i svakog tetivnog m-tougla su prave koje prolaze kroz istu tačku, linearni ortocentar H tog simpleksoida, odnosno m-tougla. Na taj način mi nalazimo da u euklidskoj ravni R^2 ne samo trougao već i svaki mnogougao upisan u nekom krugu ima linearni ortocentar. Tako je u prilogu na sl. 1 konstruisan linearni ortocentar tetivnog četvorougla $A_1A_2A_3A_4$ a na sl. 2 linearni ortocentar tetivnog petougla $A_1A_2A_3A_4A_5$. Izloženim postupkom može se konstruisati linearni ortocentar bilo kojeg tetivnog mnogougla.

Hipersfera euklidskog prostora R^3 je opažajna dvodimenziona sfera Γ^2. Ortocentarske hiperravni bilo kojeg simpleksoida $\Pi_m^3(A)$, prema tome i polijedra upisanog u toj sferi su dvodimenzione ravni koje prolaze kroz istu tačku, linearni ortocentar H tog simpleksoida, odnosno polijedra. Otuda sleduje da linearni ortocentar imaju ne samo ortogonalni tetraedri, već svi polijedri upisani u nekoj sferi Γ^2 prostora R^3.

U četvorodimenzionom euklidskom prostoru R^4 linearni ortocentar imaju ne samo ortogonalni pentatopi već bilo kakvi polijedroidi upisani u hipersferi Γ^3 tog prostora. U opštem slučaju, linearne ortocentre imaju ne samo n-dimenzioni ortogonalni simpleksi, već bilo kakvi n-dimenzioni politopi upisani u hipersferama prostora R^n.

Nije teško primetiti da se ortocentar, tj. tačka u kojoj se seku visine nekog trougla poklapa sa linearnim ortocentrom tog trougla, dok se ortocentar ortogonalnog tetraedra poklapa sa antisredištem tog tetraedra. Isto tako, ortocentri višedimenzionih ortogonalnih simpleksa ne poklapaju se sa linearnim ortocentrima tih simpleksa. Stoga se navedena generalizacija pojma ortocentra razlikuje od ranije izvedene generalizacije tog pojma u geometriji ortogonalnih simpleksa.

Narednim teoremama proučićemo izvesna svojstva linearnih ortocentara simpleksoida, uvodeći prethodno pojam Ojlerove prave i centralne hiperravni linearno ortocentarnog simpleksoida.

Definicija 1.6. Pravu koja prolazi kroz središte O hipersfere Γ^{n-1} i linearni ortocentar H simpleksoida $\Pi^{k}_{m}(A)$ upisanog u hipersferi Γ^{n-1} nazovimo Ojlerova prava tog simpleksoida.

Iz ove definicije neposredno sleduje da antisredište linearno ortocentarnog simpleksoida $\Pi^{k}_{m}(A)$ pripada Ojlerovoj pravoj tog simpleksoida. Kasnije ćemo pokazati da ova prava predstavlja generalizaciju Ojlerove prave poznate u geometriji ortogonalnih simpleksa.

Definicija 1.7. Hiperravan kroz antisredište upravnu na Ojlerovoj pravoj linearno ortocentarnog simpleksoida nazovimo centralna hiperravan tog simpleksoida.

Teorema 1.3. Prave kroz temena simpleksoida $\Pi^{k}_{m}(A)$ upisanog u hipersferi Γ^{n-1} koje su upravne na centralnim hiperravnima naspramnih pljosni prolaze kroz linearni ortocentar H tog simpleksoida.

Dokaz. Upravne N^{1}_{μ} kroz temena A_{μ} na centralnim hiperravnima C^{n-1}_{μ} naspramnih pljosni $\Pi_{\mu|m-1}(A)$ simetrične su Ojlerovim pravama tih pljosni u odnosu na antisredište S simpleksoida $\Pi^{k}_{m}(A)$, prema tome, sve te upravne prolaze kroz tačku koja je simetrična središtu O hipersfere Γ^{n-1} u odnosu na antisredište S, tj. kroz linearni ortocentar H pomenutog simpleksoida.

Štaviše, izvedenu teoremu 1.3. možemo proširiti, a da bismo to učinili omogućuje nam sledeća pomoćna teorema.

Teorema 1.4. Linearni ortocentri bilo kojih dveju naspramnih pljosni simpleksoida $\Pi^k_m(A)$ upisanog u nekoj hipersferi Γ^{n-1} prostora R^n simetrični su medju sobom u odnosu na antisredište S tog simpleksoida.

Dokaz. Neka je O središte hipersfere Γ^{n-1}, H linearni ortocentar simpleksoida $\Pi^k_m(A)$, a $H_{\mu_1\cdots\mu_p}$ i $H_{\mu_{p+1}\cdots\mu_m}$ linearni ortocentri njegovih naspramnih pljosni $\Pi_{\mu_1\cdots\mu_p|m-p}(A)$ i $\Pi_{\mu_{p+1}\cdots\mu_m|p}(A)$.

Dokažimo da su tačke $H_{\mu_1\cdots\mu_p}$ i $H_{\mu_{p+1}\cdots\mu_m}$ simetrične medjusobom u odnosu na tačku S.

Prema teoremi 1.1, ortocentri H_{μ_1} simetrični su temenima A_{μ_1} u odnosu na tačku S, a po definiciji tačke A_{μ_1} istovetne ortocentrima $H_{\mu_2\cdots\mu_m}$, pa su ortocentri H_{μ_1} i $H_{\mu_2\cdots\mu_m}$ simetrični medjusobom u odnosu na tačku S.

Prema istoj teoremi, tačke H_{μ_1} i $H_{\mu_1\mu_2}$ simetrične su tačkama O i A_{μ_2} u odnosu na antisredište pljosni $\Pi_{\mu_1|m-1}(A)$, a tačke O i A_{μ_2} simetrične tačkama $H_{\mu_3\cdots\mu_m}$ i $H_{\mu_2\cdots\mu_m}$ u odnosu na antisredište pljosni $\Pi_{\mu_3\cdots\mu_m|2}(A)$, pa su duži $H_{\mu_1}H_{\mu_1\mu_2}$ i $H_{\mu_2\cdots\mu_m}H_{\mu_3\cdots\mu_m}$ jednake i suprotno usmerene. Otuda je središte duži $H_{\mu_1\mu_2}H_{\mu_3\cdots\mu_m}$ istovetno središtu S duži $H_{\mu_1}H_{\mu_2\cdots\mu_m}$, pa su ortocentri $H_{\mu_1\mu_2}$ i $H_{\mu_3\cdots\mu_m}$ naspramnih pljosni $\Pi_{\mu_1\mu_2|m-2}(A)$ i $\Pi_{\mu_3\cdots\mu_m|2}(A)$ simetrični medjusobom u odnosu na tačku S.

Isto tako, tačke $H_{\mu_1\mu_2}$ i $H_{\mu_1\mu_2\mu_3}$ simetrične su tačkama O i A_{μ_3} u odnosu na antisredište pljosni $\Pi_{\mu_1\mu_2|m-2}(A)$, a tačke O i A_{μ_3} simetrične tačkama $H_{\mu_4\cdots\mu_m}$ i $H_{\mu_3\cdots\mu_m}$ u odnosu na antisredište pljosni $\Pi_{\mu_4\cdots\mu_m|3}(A)$, pa su duži $H_{\mu_1\mu_2}H_{\mu_1\mu_2\mu_3}$ i $H_{\mu_3\cdots\mu_m}H_{\mu_4\cdots\mu_m}$ jednake i suprotno usmerene. Otuda je središte duži $H_{\mu_1\mu_2\mu_3}H_{\mu_4\cdots\mu_m}$ istovetno središtu S duži $H_{\mu_1\mu_2}H_{\mu_3\cdots\mu_m}$, pa su ortocentri $H_{\mu_1\mu_2\mu_3}$ i $H_{\mu_4\cdots\mu_m}$ naspramnih pljosni $\Pi_{\mu_1\mu_2\mu_3|m-3}(A)$ i $\Pi_{\mu_4\cdots\mu_m|3}(A)$ simetrični medjusobom, takodje u odnosu na tačku S.

Nastavljajući induktivan postupak dokazuje se da su ortocentri $H_{\mu_1\cdots\mu_p}$ i $H_{\mu_{p+1}\cdots\mu_m}$ bilo kojih dveju naspramnih pljosni simpleksoida $\Pi^k_m(A)$ simetrični medju sobom u odnosu na tačku S.

Teorema 1.5. Prave kroz linearne ortocentre bilo kojih pljosni simpleksoida $\Pi_m^k(A)$ upisanog u hipersferi Γ^{n-1}, koje su upravne na centralnim hiperravnima naspramnih pljosni, prolaze kroz linearni ortocentar H tog simpleksoida.

Dokaz. Primenjujući prethodnu teoremu nalazimo da su navedene prave simetrične Ojlerovim pravama naspramnih pljosni u odnosu na antisredište S simpleksoida $\Pi_m^k(A)$, odakle sleduje da sve te upravne prolaze kroz tačku koja je simetrična središtu O hipersfere Γ^{n-1} u odnosu na antisredište S, tj. kroz linearni ortocentar H pomenutog simpleksoida.

Teorema 1.6. Ako je $\Pi_m^k(A)$ simpleksoid upisan u nekoj hipersferi Γ^{n-1} prostora R^n, hipersfere Γ_μ^{n-1} /$\mu = 1, \ldots, m$/ opisane oko simpleksoida koji su ortocentrični pljosnima $\Pi_{\mu|m-1}(A)$ prolaze kroz linearni ortocentar H simpleksoida $\Pi_m^k(A)$.

Dokaz. Prema teoremi 1.1, središta hipersfera Γ_μ^{n-1} su linearni ortocentri H_μ pljosni $\Pi_{\mu|m-1}(A)$, a poluprečnici jednaki poluprečniku hipersfere Γ^{n-1}. Isto tako, tačke H_μ pripadaju jednoj hipersferi kojoj je središte H, a poluprečnik jednak poluprečniku hipersfere Γ^{n-1}, odakle sleduje da su duži $H_\mu H$ poluprečnici hipersfera Γ_μ^{n-1} i da, prema tome, hipersfere Γ_μ^{n-1} prolaze kroz tačku H.

Nije teško primetiti da se za $n=2$ ova teorema svodi na ranije poznatu Gurmatajevu /R. Goormaghtigh/ teoremu pa se zbog toga teorema 1.3 može smatrati njenom generalizacijom.

Napominjemo da se primenom izvedenih teorema lako dokazuje da je vektor OH jednak zbiru vektora $OA_1, \ldots, OA_m$; tj. da je $\overrightarrow{OH} = \sum_{i=1}^{m} \overrightarrow{OA_i}$. Ovom osobinom iskazana je u geometriji trougla poznata Sylvesterova teorema, pa se zbog toga navedena osobina može smatrati njenom generalizacijom. Stoga je specijalno za n 2 linearni ortocentar H simpleksoida $\Pi_m^2(A)$ Gurmatajev ortocentar tog simpleksoida.

Proučavanje daljih svojstava linearnih ortocentara zahteva uopštenje pojma Monžove tačke na k-dimenzione simpleksoide. U tom cilju definišimo najpre ortotežište hiperravni simpleksoida i izvedimo njihova osnovna svojstva.

Definicija 1.8. Hiperravan kroz težište $T_{\mu_1\mu_2}$ $/\mu_1,\mu_2=1,\dots,m/$ bilo koje pljosni $\Pi_{\mu_1\mu_2|m-2}(A)$ simpleksoida $\Pi^k_m(A)$ upisanog u nekoj hipersferi Γ^{n-1} prostora R^n, a koja je upravna na ivici $A_{\mu_1}A_{\mu_2}$ nazovimo ortotežišna hiperravan tog simpleksoida koja odgovara ivici na kojoj je upravna.

Iz definicije neposredno sleduje da simpleksoid $\Pi^k_m(A)$ upisan u hipersferi Γ^{n-1} prostora R^n ima $\binom{m}{2}$ ortotežišnih hiperravni.

Teorema 1.7. Svih $\binom{m}{2}$ ortotežišnih hiperravni simpleksoida $\Pi^k_m(A)$ upisanog u hipersferi Γ^{n-1} prostora R^n seku se

/a/ po jednoj n-k dimenzionoj ravni ako je $k<n-1$;

/b/ po jednoj pravoj ako je $k=n-1$;

/c/ u jednoj tački ako je $k=n$.

Dokaz. Neka su $H_{\mu_1\mu_2}$ linearni ortocentri i $T_{\mu_1\mu_2}$ težišta pljosni $\Pi_{\mu_1\mu_2|m-2}(A)$, a $P_{\mu_1\mu_2}$ ortocentarne i $Q_{\mu_1\mu_2}$ ortotežišne hiperravni koje odgovaraju ivicama $A_{\mu_1}A_{\mu_2}$ simpleksoida $\Pi^k_m(A)$. Na dužima koje spajaju središte O hipersfere Γ^{n-1} sa ortocentrima H_{μ_1} pljosni $\Pi_{\mu_1|m-1}(A)$ odredimo tačke K_{μ_1} takve da je $H_{\mu_1}K_{\mu_1} : K_{\mu_1}O :: H_{\mu_1\mu_2}T_{\mu_1\mu_2} : T_{\mu_1\mu_2}O$. Prema teoremi 1.1 tačke H_{μ_1} i H_{μ_2} $/\mu_1\neq\mu_2/$ simetrične su temenima A_{μ_1} i A_{μ_2} u odnosu na antisredište S simpleksoida $\Pi^k_m(A)$, pa su prave $H_{\mu_1}H_{\mu_2}$ uporedne pravama $A_{\mu_1}A_{\mu_2}$. Iz proporcija $H_{\mu_1}K_{\mu_1} : K_{\mu_1}O :: H_{\mu_2}K_{\mu_2} : K_{\mu_2}O$ sleduje da su prave $H_{\mu_1}H_{\mu_2}$ uporedne pravama $K_{\mu_1}K_{\mu_2}$, pa su prave $A_{\mu_1}A_{\mu_2}$ i $K_{\mu_1}K_{\mu_2}$ uporedne medju sobom. Ortotežišne hiperravni $Q_{\mu_1\mu_2}$ upravne su na pravama $A_{\mu_1}A_{\mu_2}$, pa su zbog uporednosti pravih $A_{\mu_1}A_{\mu_2}$ i $K_{\mu_1}K_{\mu_2}$, hiperravni $Q_{\mu_1\mu_2}$ upravne na pravama $K_{\mu_1}K_{\mu_2}$.

Iz sličnih trouglova $OH_{\mu_1}H_{\mu_1\mu_2}$ i $OK_{\mu_1}T_{\mu_1\mu_2}$ imamo da je $H_{\mu_1}H_{\mu_1\mu_2} : K_{\mu_1}T_{\mu_1\mu_2} :: OH_{\mu_1\mu_2} : OT_{\mu_1\mu_2}$, a iz sličnih trouglova $OH_{\mu_2}H_{\mu_1\mu_2}$ i $OK_{\mu_2}T_{\mu_1\mu_2}$ da je $H_{\mu_2}H_{\mu_1\mu_2} : K_{\mu_2}T_{\mu_1\mu_2} :: OH_{\mu_1\mu_2} : OT_{\mu_1\mu_2}$, prema tome je $H_{\mu_1}H_{\mu_1\mu_2} : K_{\mu_1}T_{\mu_1\mu_2} :: H_{\mu_2}H_{\mu_1\mu_2} : K_{\mu_2}T_{\mu_1\mu_2}$. Na osnovi teoreme 1.2, tačka $H_{\mu_1\mu_2}$ je na simetrali $P_{\mu_1\mu_2}$ duži $H_{\mu_1}H_{\mu_2}$, pa su duži $H_{\mu_1}H_{\mu_1\mu_2}$ i $H_{\mu_2}H_{\mu_1\mu_2}$ medjusobom jednake, odakle sleduje da su i duži $K_{\mu_1}T_{\mu_1\mu_2}$ i $K_{\mu_2}T_{\mu_1\mu_2}$ medjusobom jednake.

Hiperravni $Q_{\mu_1\mu_2}$ prolaze kroz tačke $T_{\mu_1\mu_2}$ koje su podjednako udaljene od tačaka K_{μ_1}, K_{μ_2} i upravne su na pravama $K_{\mu_1}K_{\mu_2}$, pa su hiperravni $Q_{\mu_1\mu_2}$, simetrale ivica $K_{\mu_1}K_{\mu_2}$ simpleksoida $\Pi^k_m(K)$. Prema konstrukciji, simpleksoid $\Pi^k_m(K)$ sličan je i u sličnom položaju sa simpleksoidom $\Pi^k_m(H)$ u odnosu na tačku O, stoga postoji hipersfera $\Gamma^{n-1}_{(K)}$ opisana oko simpleksoida koja je perspektivno slična hipersferi $\Gamma^{n-1}_{(H)}$ u odnosu na tačku O.

Dokaz teoreme nastavljamo pojedinačno.

/a/ Kada je $k < n-1$, simetrale $P_{\mu_1\mu_2}$ ivica $H_{\mu_1}H_{\mu_2}$ simpleksoida $\Pi^k_m(H)$ seku se po jednoj /n-k/-dimenzionoj ravni P^{n-k} apsolutno upravnoj na k-dimenzionoj ravni P^k simpleksoida $\Pi^k_m(H)$/v.t.1.2/ pa se i simetrale $Q_{\mu_1\mu_2}$ ivica $K_{\mu_1}K_{\mu_2}$ simpleksoida $\Pi^k_m(K)$ seku po jednoj /n-k/-dimenzionoj ravni Q^{n-k} apsolutno upravnoj na k-dimenzionoj ravni Q^k simpleksoida $\Pi^k_m(K)$. Središte V hipersfere $\Gamma^{n-1}_{(K)}$ pripada ravni Q^{n-k}.

/b/ Kada je $k=n-1$, hiperravni $P_{\mu_1\mu_2}$ seku se po jednoj pravoj P^1 koja je upravna na hiperravni simpleksoida $\Pi^k_m(H)$, pa se i hiperravni $Q_{\mu_1\mu_2}$ ivica $K_{\mu_1}K_{\mu_2}$ simpleksoida $\Pi^k_m(K)$ seku po jednoj pravoj koja prolazi kroz središte V hipersfere $\Gamma^{n-1}_{(K)}$, a upravna je na hiperravni tog simpleksoida.

/c/ Kada je $k=n$, simetrale $P_{\mu_1\mu_2}$ ivica $H_{\mu_1}H_{\mu_2}$, prema tome i simetrale $Q_{\mu_1\mu_2}$ ivica $K_{\mu_1}K_{\mu_2}$ seku se u jednoj tački, središtu V hipersfere $\Gamma^{n-1}_{(K)}$.

Definicija 1.9. Tačku V u kojoj se seku ortotežišne hiperravni simpleksoida $\Pi^n_m(A)$ upisanog u hipersferi Γ^{n-1} prostora R^n nazovimo ortotežište tog simpleksoida. Kada je $k < n$, ortotežištem simpleksoida $\Pi^k_m(A)$ definisanim u odnosu na hipersferu Γ^{n-1} nazovimo središte V hipersfere $\Gamma^{n-1}_{(K)}$.

Napominjemo da se kod simpleksa ortotežište V poklapa sa Monžovom tačkom tog simpleksa, koju je analognom konstrukcijom god. 1957. izložio u prvom delu svojeg rada "O ortopolu u prostoru R^n" japanski geometar Ivata.

Mnogo ranije, god. 1906. M. S. Kantor je dokazao da svojstva iskazana teoremom 1.7 imaju u euklidovskoj ravni bilo kakvi tetivni mnogougli, zbog čega se opravdano u literaturi presečna tačka i naziva često Kantorova tačka.

Stoga se ortotežište V simpleksoida $\Pi_m^k(A)$ može smatrati s jedne strane generalizacijom Monžove tačke poznate u geometriji simpleksa, a s druge strane generalizacijom navedene Kantorove tačke iz geometrije tetivnih mnogouglova.

2. GENERALIZACIJA IZVESNIH OJLEROVIH TEOREMA NA k-DIMENZIONE SIMPLEKSOIDE

U prethodnom delu definisani su linearni ortocentri i ortotežišta simpleksoida upisanih u hipersferama prostora R^n i izvedena neka njihova svojstva. Ovim delom nastavljamo proučavanje istih, uopštavajući pri tome izvesne Ojlerove teoreme poznate u geometriji trougla i geometriji ortogonalnih simpleksa. S tim u vezi dokažimo najpre sledeću teoremu.

Teorema 2.1. Ortotežište V i težište T simpleksoida $\Pi_m^k(A)$ upisanog u hipersferi Γ^{m-1} prostora R^n su tačke Ojlerove prave OH tog simpleksoida /v. d. 1.6/, takve da je $HV : VO = /m-3/ : 1$ i $HT : TO = /m-1/ : 1$.

Dokaz. Iz teoreme 1.7 neposredno sleduje da je kod simpleksoida $\Pi_3^2(A)$ ortotežište V istovetno sa linearnim ortocentrom H tog simpleksoida a kod simpleksoida $\Pi_4^3(A)$ upisanog u sferi Γ^2 ortotežište V istovetno sa antisredištem S tog simpleksoida. Mi ćemo sada, induktivnim postupkom, pretpostavljajući da je teorema 2.1 izvedena za simpleksoide $\Pi_{m-2}(A)$, dokazati istu i za simpleksoide $\Pi_m^k(A)$.

Neka su $H_{\mu_1\mu_2}$ linearni ortocentri i $T_{\mu_1\mu_2}$ težišta pljosni $\Pi_{(\mu_1\mu_2)m-2}(A)$, a $P_{\mu_1\mu_2}$ i $Q_{\mu_1\mu_2}$ ortocentarne i ortotežišne hiperravni koje odgovaraju ivicama $A_{\mu_1}A_{\mu_2}$ simpleksoida $\Pi_m^k(A)$. Hiperravni $P_{\mu_1\mu_2}$ i $Q_{\mu_1\mu_2}$ upravne su na istoj ivici $A_{\mu_1}A_{\mu_2}$, pa su iste uporedne medju sobom ili su istovetne. Analizirajmo slučaj kada su one uporedne medjusobom, premda je dokaz i za drugi slučaj potpuno analogan. Ravan odredjena pravama OH i $OH_{\mu_1\mu_2}$ ima s pomenutim hiperravnima $P_{\mu_1\mu_2}$ i $Q_{\mu_1\mu_2}$ zajedničke tačke H, $H_{\mu_1\mu_2}$ i V, $T_{\mu_1\mu_2}$, prema tome, ona ih seče po uporednim pravama $HH_{\mu_1\mu_2}$ i $VT_{\mu_1\mu_2}$. Hipersfere $\Gamma_{(H)}^{m-1}$ i $\Gamma_{(K)}^{m-1}$ definisane u prethodnoj teoremi su perspektivno slične u odnosu na tačku O, odakle sleduje da središta H i V tih hipersfera i tačka O pripadaju jednoj pravoj. Po pretpostavci, i tačke $H_{\mu_1\mu_2}$, $T_{\mu_1\mu_2}$, O pripadaju jednoj pravoj, pa je $HV : VO :: H_{\mu_1\mu_2}T_{\mu_1\mu_2} : T_{\mu_1\mu_2}O$. Kako je, pored toga, tačka $T_{\mu_1\mu_2}$ izmedju tačaka O i $H_{\mu_1\mu_2}$ takva da je $H_{\mu_1\mu_2}T_{\mu_1\mu_2} : T_{\mu_1\mu_2}O = /m-3/ : 1$, biće i tačka V izmedju tačaka O i H takva da je $HV : VO = /m-3/ : 1$.

Da bismo dokazali drugi deo teoreme, obeležimo sa $H_{\mu_3 \cdots \mu_m}$ linearne ortocentre, a sa $T_{\mu_3 \cdots \mu_m}$ težišta ivica $A_{\mu_1}A_{\mu_2}$. Iz ranije navedenih osobina, imamo da je $HH_{\mu_1\mu_2} : VT_{\mu_1\mu_2} = /m-2/ : 1$. Tačka $T_{\mu_3 \cdots \mu_m}$ je središte duži $OH_{\mu_3 \cdots \mu_m}$, a prema teoremi 1.4, duž $OH_{\mu_3 \cdots \mu_m}$ jednaka duži $HH_{\mu_1\mu_2}$, pa je $OT_{\mu_3 \cdots \mu_m} : VT_{\mu_1\mu_2} = /m-2/ : 2$. Medjutim, tačka T je izmedju tačaka $T_{\mu_1\mu_2}$ i $T_{\mu_3 \cdots \mu_m}$ takva da je $TT_{\mu_3 \cdots \mu_m} : TT_{\mu_1\mu_2} = /m-2/ : 2$. Pored toga, duži $VT_{\mu_1\mu_2}$ i $TT_{\mu_1\mu_2}$ suprotno su usmerene dužima $OT_{\mu_3 \cdots \mu_m}$ i $TT_{\mu_3 \cdots \mu_m}$, pa je $OT : TV = /m-2/ : 2$, a tačka T izmedju tačaka O i V. Medjutim, kako je tačka V izmedju tačaka O i H takva da je $HV:VO = /m-3/:1$, biće i tačka T izmedju tačaka O i H takva da je $HT:TO = /m-1/:1$.

Napomena. Očigledno, drugi deo teoreme 2.1 predstavlja generalizaciju poznate Ojlerove teoreme iz geometrije trougla, kojoj se pokazuje da je težište T izmedju ortocentra F i središta O kruga opisanog oko trougla, tačka takva da je $FT:TO = 2:1$. Ranije smo pomenuli da je u literaturi poznat jedan vid generalizacije te teoreme koji su godine 1957. izveli G. P. Krejcer i G. I. Tjurin. Takva generalizacija, obzirom na definiciju pojma ortocentra, bila je proširena isključivo na n-dimenzione orto - gonalne simplekse. Pri tom uopštenju, težište T n-dimenzionog ortogonalnog simpleksa $\Pi^n_{n+1}(A)$ je tačka, koja se nalazi izmedju ortocentra F i središta O hipersfere Γ^{n-1} opisane oko tog simpleksa, takva da je $FT : TO = 2 : /n-1/$.

Koristeći tako generalisanu Ojlerovu teoremu dokazaćemo da su ortocentri n-dimenzionih ortogonalnih simpleksa tačke istovetne sa ortotežištima tih simpleksa. Posle toga postaje jasno da i prvi deo izvedene teoreme 2.1 predstavlja generalizaciju navedene Ojlerove teoreme koja obuhvata ranije proširenu Ojlerovu teoremu na n-dimenzione ortogonalne simplekse. Takva generalizacija po prirodi svojoj potpuno se razlikuje od generalizacije date u drugom delu teoreme 2.1. Na taj način, teoremom 2.1 generalisana je pomenuta Ojlerova teorema u dva različita smera, ne samo na proizvoljne simplekse, već na bilo kakve simpleksoide upisane u nekoj hipersferi prostora R^n.

Teorema 2.2. Ortocentar F n-dimenzionog ortogonalnog simpleksa $\Pi^n_{n+1}(A)$ poklapa se sa ortotežištem V tog simpleksa.

Dokaz. Neka je H linearni ortocentar, T težište i O središte hipersfere Γ^{n-1} opisane oko simpleksa $\Pi^n_{n+1}(A)$. Prema teoremi 1.6, tačke T i V su izmedju tačaka O i H takve da je $HT : TO = n : 1$ i $HV : VO = /n-2/ : 1$, odakle sleduju proporcije $/HT+TO/ : TO = /n+1/ : 1$ i $/HV+VO/ : VO = /n-1/ : 1$ iz kojih nalazimo da je $VO : TO = /n+1/ : /n-1/$. Medjutim, tačka T je izmedju tačaka O i V, pa je $/VT+TO/ : TO = /n+1/ : /n-1/$, odnosno $VT : TO = 2 : /n-1/$ ... /1/. S druge strane, prema Ojlerovoj teoremi proširenoj na n-dimenzione ortogonalne simplekse imamo da je $FT : TO = 2 : /n-1/$ ... /2/. Iz proporcija /1/ i /2/ neposredno sleduje da se ortocentar F ortogonalnog simpleksa $\Pi^n_{n+1}(A)$ poklapa sa ortotežištem V tog simpleksa.

Napominjemo da nije teško dokazati da se Konilijev ortocentar bilo kojeg tetivnog m-tougla koji smo pomenuli u prethodnom delu, takodje poklapa sa ortotežištem tog m-tougla. Stoga se opravdano Konilijev ortocentar tetivnog m-tougla smatra izvesnim proširenjem pojma ortocentra izvedenog u geometriji ortogonalnih simpleksa.

Teorema 2.3. Ako je O središte hipersfere Γ^{n-1}, H linearni ortocentar simpleksoida $\Pi^k_m(A)$ upisanog u hipersferi Γ^{n-1}, a $H_{\mu_1\cdots\mu_p}$, $H_{\mu_{p+1}\cdots\mu_m}$ linearni ortocentri i $T_{\mu_1\cdots\mu_p}$, $T_{\mu_{p+1}\cdots\mu_m}$ težišta dveju njegovih naspramnih pljosni, tada je $HH_{\mu_1\cdots\mu_p} : OT_{\mu_{p+1}\cdots\mu_m} = p : 1$ i $OH_{\mu_1\cdots\mu_p} : HT_{\mu_{p+1}\cdots\mu_m} = /m-p/ : 1$.

Dokaz. Teoremama 1.1 i 1.4 dokazali smo da su tačke H i $H_{\mu_1\cdots\mu_p}$ simetrične tačkama O i $H_{\mu_{p+1}\cdots\mu_m}$ u odnosu na antisredište S simpleksoida $\Pi^k_m(A)$, pa su duži $HH_{\mu_1\cdots\mu_p}$ i $OH_{\mu_{p+1}\cdots\mu_m}$ medjusobom jednake. Iz teoreme 1.6 imamo da je $OH_{\mu_{p+1}\cdots\mu_m} : OT_{\mu_{p+1}\cdots\mu_m} = p : 1$ i

$HH_{\mu_1 \cdots \mu_m} : HT_{\mu_1 \cdots \mu_m} = /m-p/ : 1$, odakle neposredno sleduje iskazana teorema. Pored toga, primetimo da iz pomenute simetrije i drugog dela teoreme 1.6 neposredno sleduje da su duži $HH_{\mu_1 \cdots \mu_p}$ i $OT_{\mu_{p+1} \cdots \mu_m}$ suprotno usmerene.

Tako je kod trougla duž koja spaja ortocentar s bilo kojim temenom dva puta veća od duži koja spaja središte opisanog kruga sa središtem naspramne stranice; kod tetivnog četvorougla duž koja spaja linearni ortocentar s bilo kojim temenom tri puta veća od duži koja spaja središte opisanog kruga sa težištem trougla odredjenog ostalim temenima, itd. Stoga prvi deo teoreme 2.3 predstavlja generalizaciju navedene Ojlerove teoreme iz geometrije trougla.

Specijalno, ako je središte hipersfere Γ^{n-1} istovetno sa težištem neke pljosni simpleksoida $\Pi_m^k(A)$, linearni ortocentar tog simpleksoida istovetan je sa linearnim ortocentrom naspramne pljosni, i obrnuto.

Teoremama 2.1 i 2.3 generalisane su dve Ojlerove teoreme poznate u geometriji trougla na k-dimenzione linearno ortocentarske simpleksoide. Te i još neke teoreme izvedene u prethodnom delu omogućuju da na pomenute simpleksoide proširimo i treću Ojlerovu teoremu iz geometrije trougla. Reč je o generalizaciji Ojlerovog kruga trougla, tj. kruga koji sadrži središta stranica, podnožja visina i središta duži što spajaju ortocentar sa temenima trougla. Napominjemo da su već poznata dva različita načina generalizacije te teoreme; jedan proširuje istu na n-dimenzione ortogonalne simplekse, a drugi isključivo na mnogougle upisane u nekom krugu. Tako su u ranije navedenim radovima Zbynek Nadenik, G. P. Krejcer i G. I. Tjurin dokazali da kod n-dimenzionog ortogonalnog simpleksa težišta pljosni sa jednakim brojem temena pripadaju jednoj, tzv. Ojlerovoj hipersferi tog simpleksa. Na taj način dokazano je da n-dimenzioni ortogonalni simpleks ima n Ojlerovih hipersfera. Za razliku od tog proširenja navedene Ojlerove teoreme, J. M Jaglom dokazuje da kod tetivnog četvorougla $A_1A_2A_3A_4$ središta Ojlerovih krugova trouglova $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, $A_1A_2A_3$

takodje pripadaju jednom krugu, Ojlerovom krugu tog četvorougla. Induktivnim postupkom dokazuje zatim da kod tetivnog n-tougla $A_1 \ldots A_n$ središta Ojlerovih krugova /n-1/-touglova $A_1 \ldots A_{\nu-1} A_{\nu+1} \ldots A_n$ za $\nu = 1, \ldots, n$ pripadaju jednom, Ojlerovom krugu tog n-tougla.

Cilj ovog rada jeste da se prva od ovih generalizacija izvede na jedan potpuno drugi način, proširujući je delimično i na izvesne k-dimenzione simpleksoide, a zatim da drugu od pomenutih dveju generalizacija proširimo na bilo kakve linearne ortocentarske simpleksoide. Tom prilikom biće definisane Ojlerove centroidne i Ojlerove karakteristične hipersfere pomenutih simpleksoida. S tim u vezi dokažimo sledeću teoremu.

Teorema 2.4. Ako je O središte hipersfere Γ^{n-1} prostora R^n, a H i V linearni ortocentar i ortotežište simpleksoida $\Pi^k_m(A)$ upisanog u toj hipersferi, tada težišta T_μ pljosni $\Pi_{\mu|m-1}(A)$ i tačke T'_μ duži $A_\mu V$ takve da je $A_\mu T'_\mu : T'_\mu V = /m-2/ : 1$ pripadaju jednoj hipersferi Γ^{n-1}_1 kojoj je središte O_1 tačka duži OH takva da je $HO_1 : O_1O = /m-2/ : 1$, a poluprečnik jednak /m-1/-tom delu poluprečnika hipersfere Γ^{n-1}.

Dokaz. Prema teoremi 2.1 tačke T_μ su na dužima koje spajaju tačku O sa linearnim ortocentrima H pljosni $\Pi_{\mu|m-1}(A)$ takve da je $H_\mu T_\mu : T_\mu O = /m-2/ : 1$, pa je $\Pi^k_m(T)$ simpleksoid sličan i u sličnom položaju sa simpleksoidom $\Pi^k_m(H)$ u odnosu na tačku O. Iz teoreme 1.1 sleduje da temena H_μ simpleksoida $\Pi^k_m(H)$ pripadaju hipersferi kojoj je središte H, a poluprečnik jednak poluprečniku hipersfere Γ^{n-1}, prema tome, temena T_μ simpleksoida $\Pi^k_m(T)$ pripadaju nekoj hipersferi Γ^{n-1} kojoj je središte O_1 tačka duži OH takva da je $HO_1 : O_1O = /m-2/ : 1$, a poluprečnik jednak /m-1/-tom delu poluprečnika hipersfere Γ^{n-1}.

Dokažimo sad da i tačke T'_μ pripadaju hipersferi Γ^{n-1}_1. Pre svega, primetimo da iz proporcija $HV : VO = /m-3/ : 1$ i $HO_1 : O_1O = /m-2/ : 1$ imamo da je $OO_1 : O_1V = /m-2/ : 1$, pa je $OA_\mu : O_1T'_\mu = /m-1/ : 1$, a duž OT'_μ jednako usmerena duži OA_μ. Pored toga, imamo da je $HH_\mu : O_1T_\mu = /m-1/ : 1$, a duž O_1T_μ jednako usmerena duži HH_μ. Prema teoremi 1.4, duži OA_μ i HH_μ su jednake i suprotno usmerene, pa su i duži OT_μ i OT'_μ jednake i suprotno usmerene. Otuda sleduje da tačke T'_μ pripadaju hipersferi Γ_1^{n-1} ; štaviše da su duži $T_\mu T'_\mu$ prečnici hipersfere Γ_1^{n-1} .

Nije teško primetiti da prave $A_\mu V$ prodiru hipersferu Γ_1^{n-1} u tačkama T''_μ takvim da su uglovi $T_\mu T''_\mu T'_\mu$ pravi.

Specijalno, kada je dati simpleksoid ortogonalan simpleks $\Pi^n_{n+1}(A)$, biće Γ_1^{n-1} njegova prva Ojlerova hipersfera, pa zbog toga teorema 1.8 predstavlja generalizaciju pomenute Ojlerove teoreme ne samo na bilo kakve simplekse, već na bilo kakve linearno ortocentarske simpleksoide.

Definicija 2.1. Hipersferu Γ_1^{n-1} kojoj pripadaju težišta T_μ pljosni $\Pi_{\mu|m-1}(A)$ simpleksoida $\Pi^k_m(A)$ upisanog u nekoj hipersferi Γ^{n-1} i tačke T'_μ duži koje spajaju ortotežište V sa temenima takve da je $A_\mu T'_\mu : T'_\mu V = /m-2/ : 1$ nazovimo prva Ojlerova centroidna hipersfera ili samo centroidna hipersfera pomenutog simpleksoida.

Teorema 2.5. Ako je O središte hipersfere Γ^{n-1} prostora R^n, a V i T ortotežište i težište simpleksoida $\Pi^k_m(A)$ upisanog u tog hipersferi i O_1 središte prve Ojlerove centroidne hipersfere Γ_1^{n-1} simpleksoida $\Pi^k_m(A)$, tada su O, O_1, T i V četiri harmonijske tačke.

Dokaz. Ako je H linearni ortocentar simpleksoida $\Pi^k_m(A)$, biće T, O_1, V tačke duži OH takve da je HT : TO = /m-1/ : 1, $HO_1 : O_1O$ = /m-2/ : 1, HV : VO = /m-3/ : 1 iz kojih nalazimo da je HO : TO = m : 1 ... /1/, HO : O_1O = /m-1/ : 1 ... /2/, HO : VO = /m-2/ : 1 ... /3/. Iz proporcija /1/ i /2/ imamo da je O_1O : TO = m : /m-1/, a iz proporcija /2/ i /3/ da je O_1O : VO = /m-2/ : /m-1/. Kako je tačka T izmedju tačaka O i O_1 a tačka V iza O_1 u odnosu na O, biće /O_1T+OT/ : OT = m : /m-1/ i /OV - O_1V/ : OV = /m-2/ : /m-1/, pa je OT : O_1T = /m-1/ : 1 i OV : O_1V :: OV : O V, odakle neposredno sleduje da su O, O_1, T, V četiri harmonijske tačke.

Izvedena teorema sa izmenjenom formulacijom poznata je u geometriji n-dimenzionih ortogonalnih simpleksa, pa se stoga može smatrati njenom generalizacijom na bilo kakve linearno ortocentarske simpleksoide.

Sledećom teoremom dokazaćemo na jedan poseban način da postoji simpleksoid $\Pi^k_m(A)$ upisan u hipersferi Γ^{n-1} prostora R^n kome težišta $T_{\mu_1\cdots\mu_p}$ pljosni $\Pi_{\mu_1\cdots\mu_p|m-p}(A)$ takodje pripadaju jednoj hipersferi. Saglasimo se da analogijom istu obeležavamo sa Γ^{n-1}_p i nazivamo p-ta Ojlerova centroidna hipersfera ili samo centroidna hipersfera simpleksoida $\Pi^k_m(A)$. Na taj način, simpleksoid $\Pi^k_m(A)$ upisan u nekoj hipersferi Γ^{n-1} može imati m-1 centroidnih hipersfera Γ^{n-1}_1 , ..., Γ^{n-1}_{m-1} . Iz definicije neposredno sleduje da je /m-1/-va centroidna hipersfera Γ^{n-1}_{m-1} linearno ortocentarskog simpleksoida $\Pi^k_m(A)$, hipersfera Γ^{n-1} opisana oko tog simpleksoida. Prema tome, kod svih linearno ortocentarskih simpleksoida $\Pi^k_m(A)$ uvek su definisane prva Γ^{n-1}_1 i /m-1/-va Γ^{n-1}_{m-1} centroidna hipersfera. Ostale centroidne hipersfere definisane su samo kod izvesnih simpleksoida. Dokažimo da su takvi simpleksoidi n-dimenzioni ortogonalni simpleksi $\Pi^n_{n+1}(A)$ koji imaju svih n Ojlerovih centroidnih hipersfera.

Teorema 2.6. Ako je H linearni ortocentar n-dimenzionog ortogonalnog simpleksa $\Pi^n_{n+1}(A)$, a O središte hipersfere Γ^{n-1} opisane oko tog simpleksa, tada težišta $T_{\mu_1\cdots\mu_p}$ $(\mu_1,\ldots,\mu_p=1,\ldots,n+1;\ \mu_1\neq\cdots\neq\mu_p)$ pljosni $\Pi^{n-p}_{\mu_1\cdots\mu_p|n-p+1}(A)$ pripadaju jednoj hipersferi Γ^{n-1}_p kojoj je središte O_p tačka Ojlerove prave OH tog simpleksa, takva da je $HO_p : O_pO = \left[(n-2)(n-p+1)+1\right] : (n-p)$.

Dokaz. Prema teoremi 2.4 težišta T_{μ_1} $(\mu_1=1,\ldots,n+1)$ pljosni $\Pi^{n-1}_{\mu_1|n}(A)$ odredjuju prvu centroidnu hipersferu Γ^{n-1}_1 simpleksa $\Pi^n_{n+1}(A)$, kojoj je središte O_1 tačka Ojlerove prave OH tog simpleksa takva da je $HO_1 : O_1O = /n-1/ : 1$. Da bismo dokazali da se težišta $T_{\mu_1\cdots\mu_p}$ pljosni $\Pi^{n-p}_{\mu_1\cdots\mu_p|n-p+1}(A)$ ortogonalnog simpleksa $\Pi^n_{n+1}(A)$ pripadaju jednoj hipersferi, primetimo najpre da su ortotežišta $V_{\mu_1\cdots\mu_{p-1}}$ njegovih pljosni $\Pi^{n-p+1}_{\mu_1\cdots\mu_{p-1}|n-p+2}(A)$ i središta $O_{\mu_1\cdots\mu_{p-1}}$ /n-p/-dimenzionih sfera opisanih oko tih pljosni, upravne projekcije ortotežišta V simpleksa $\Pi^{n}_{n+1}(A)$ i središta O hipersfere Γ^{n-1} na /n-p+l/-dimenzionim ravnima tih pljosni. Otuda sleduje da su Ojlerove prave $O_{\mu_1\cdots\mu_{p-1}} H_{\mu_1\cdots\mu_{p-1}}$ tih pljosni upravne projekcije Ojlerove prave OH simpleksa $\Pi^{n}_{n+1}(A)$ na ravnima $R^{n-p+1}_{\mu_1\cdots\mu_{p-1}}$. Neka su $O_{\mu_1\cdots\mu_{p-1}|1}$ središta prvih centroidnih /n-p/-dimenzionih sfera $\Gamma^{n-p}_{\mu_1\cdots\mu_{p-1}|1}$ pljosni $\Pi^{n-p+1}_{\mu_1\cdots\mu_{p-1}|n-p+2}(A)$, a $R'^{p-1}_{\mu_1\cdots\mu_{p-1}}$ /p-1/-dimenzione ravni apsolutno upravne na ravnima $R^{n-p+1}_{\mu_1\cdots\mu_{p-1}}$ u tačkama $O_{\mu_1\cdots\mu_{p-1}|1}$. Bilo kojoj od tih ravni, recimo $R'^{p-1}_{M_1\cdots M_{p-1}}$, gde su $M_1, \ldots, M_{p-1}$ fiksirane vrednosti indeksa $\mu_1, \ldots, \mu_{p-1}$, pripadaju sve prave prostora R^n upravne na ravni $R^{n-p+1}_{M_1\cdots M_{p-1}}$, prema tome, njoj pripada i prava koja projektuje neku tačku O_p Ojlerove prave OH simpleksa $\Pi^{n}_{n+1}(A)$u tačku $O_{M_1\cdots M_{p-1}|1}$. Otuda sleduje da ravan $R'^{p-1}_{M_1\cdots M_{p-1}}$ seče pravu OH u tački O_p. Kako su tačke $O_{M_1\cdots M_{p-1}}$, $O_{M_1\cdots M_{p-1}|1}$, $V_{M_1\cdots M_{p-1}}$, upravne projekcije tačaka O, O_p, V prave OH na pravoj $O_{M_1\cdots M_{p-1}} H_{M_1\cdots M_{p-1}}$ biće $VO_p : O_pO :: V_{M_1\cdots M_{p-1}} O_{M_1\cdots M_{p-1}|1} : O_{M_1\cdots M_{p-1}|1} O_{M_1\cdots M_{p-1}}$. Iz teorema 2.1 i 2.4 nalazimo da je odnos na desnoj strani u navedenoj proporciji jednak odnosu 1 : /n-p/, pa je i $VO_p : O_pO = 1 : /n-p/$. Analognim postupkom dokazuje se da ostale iz skupa ravni $R'^{p-1}_{\mu_1\cdots\mu_{p-1}}$ seku pravu OH u tačkama koje imaju istu osobinu, odakle sleduje da se sve te ravni $R'^{p-1}_{\mu_1\cdots\mu_{p-1}}$ seku u tački O_p. Kako je ravan $R'^{p-1}_{M_1\cdots M_{p-1}}$ apsolutno upravna u središtu $O_{M_1\cdots M_{p-1}}$ sfere $\Gamma^{n-p}_{M_1\cdots M_{p-1}|1}$ na ravni $R^{n-p+1}_{M_1\cdots M_{p-1}}$ te sfere, svaka njena tačka, prema tome i tačka O_p, jednako je udaljena od tačaka te sfere. Istim postupkom dokazuje se da je tačka O_p jednako udaljena od svih tačaka bilo koje od sfera $\Gamma^{n-p}_{\mu_1\cdots\mu_{p-1}|1}$, koje se medjusobom seku, pa su te sfere, prema tome i težišta $T_{\mu_1\cdots\mu_p}$ pljosni $\Pi^{n-p}_{\mu_1\cdots\mu_p|n-p+1}(A)$koje pripadaju njima, na jednoj hipersferi Γ^{n-1}_{p} kojoj je središte O_p.

Kako je O_p tačka duži OV takva da je $VO_p : O_pO = 1:/n-p/$, a tačka V izmedju tačaka O i H, biće $/VO_p - HV/ : O_pO = 1:/n-p/$, odnosno $HO_p : O_pO = HV : O_pO + 1 : /n-p/$. Prema teoremi 1.6 imamo da je $HV = /n-2/VO$, pa je $HO_p : O_pO = /n-2/VO : O_pO + 1:/n-p/$, odnosno $HO_p : O_pO = /n-2//VO_p + O_pO/ : O_pO + 1:/n-p/$. Iz ove jednakosti i proporcije $VO_p : O_pO = 1 : /n-p/$ nalazimo da je $HO_p : O_pO = \left[(n-2)(n-p+1) + 1 \right] : (n-p)$, pa je teorema dokazana.

Kada bismo položaj središta O_p hipersfere Γ^{n-1}_{p} odredjivali u odnosu na ortotežište V i težište T ortogonalnog simpleksa $\Pi^{n}_{n+1}(A)$, iz proporcije $OO_p : O_pV = /n-p/ : 1$ imali bismo $/OT+TO_p/ : O_pV = /n-p/ : 1$. Otuda i iz proporcije $HT : TO = m : 1$ koja sleduje iz teoreme 1.6, nalazimo da je $TO_p : O_pV = n-p-\frac{1}{n}HT : O_pV$. Kako je $HT = HV + VO_p + O_pT$, $HV = /n-2/VO$ i $VO = /n-p\ 1/O_pV$, biće $TO_p : O_pV = /n-2p+1/ : /n+1/$. Prema teoremi 2.2 ortotežište V ortogonalnog simpleksa $\Pi^{n}_{n+1}(A)$ poklapa se sa ortocentrom F tog simpleksa, pa se poslednja proporcija može napisati u obliku $FO_p : O_pT = /n+1/ : /n-2p+1/$, a taj rezultat, upravo je obrazac koji su godine 1957. na potpuno drugi način dobili G. P. Krejcer i G. I. Tjurin u zajedničkom radu "Sferi Ojlera ortocentričeskogo simpleksa".

Primetimo da se iz izvedene proporcije $HO_p : O_pO = \left[(n-2)(n-p+1)+1\right] : (n-p)$, za $p=1$, dobija proporcija $HO_1 : O_1O = /n-1/ : 1$, pa se teorema 2.4 specijalizovana na n-dimenzione simplekse može tretirati kao specijalan slučaj mnogo opštije teoreme 2.6. Otuda sleduje da indeks p u toj proporciji može uzimati vrednosti od 1 do n.

Definicija 2.2. Hipersferu Γ^{n-1}_{p} kojoj pripadaju težišta $T_{\mu_1 \cdots \mu_p}$ pljosni $\Pi^{n-p}_{\mu_1 \cdots \mu_p | n-p+1}(A)$ n-dimenzionog ortogonalnog simplek sa $\Pi^{n}_{n+1}(A)$ nazovimo p-ta Ojlerova centroidna ili samo p-ta centroidna hipersfera tog simpleksa.

Iz ove definicije i teoreme 2.6 neposredno sleduje da n-dimenzioni ortogonalni simpleks $\Pi^{n}_{n+1}(A)$ima n Ojlerovih centroidnih hipersfera $\Gamma^{n-1}_{1}, \ldots, \Gamma^{n-1}_{n}$.

Teorema 2.7. Ako su V i T ortotežište i težište n-dimenzionog ortogonalnog simpleksa $\Pi^{n}_{n+1}(A)$, a O_p i O_{n-p+1} središta centroidnih hipersfera Γ^{n-1}_{p} i Γ^{n-1}_{n-p+1} tog simpleksa, tada su O_{n-p+1}, O_p, T, V četiri harmonijske tačke. Pored toga, tačke V i T su središta sličnosti hipersfera Γ^{n-1}_{p} i Γ^{n-1}_{n-p+1}, a poluprečnici r_p i r_{n-p+1} tih hipersfera takvi da je

$r_p : r_{n-p+1} = /n-p\ \ 1/ : p$.

Dokaz. U prethodnoj teoremi dokazali smo da je položaj tačaka O_p i O_{n-p+1} odredjen u odnosu na tačke V i T proporcijama $VO_p : O_pT = /n+1/ : /n-2p+1/$ i $VO_{n-p+1} : O_{n-p+1}T = -/n+1/ : /n-2p+1/$, odakle neposredno sleduje da su O_{n-p+1}, O_p, T, V četiri harmoniske tačke.

Kako su težišta $T_{\mu_1\ldots\mu_p}$ pljosni $\Pi^{n-p}_{\mu_1\ldots\mu_p|n-p+1}(A)$ na hipersferi Γ^{n-1}_p, a težišta $T_{\mu_{p+1}\ldots\mu_{n+1}}$ naspramnih pljosni na hipersferi Γ^{n-1}_{n-p+1} i kako je tačka T izmedju tačaka $T_{\mu_1\ldots\mu_p}$ i $T_{\mu_{p+1}\ldots\mu_{n+1}}$ takva da je $T_{\mu_1\ldots\mu_p}T : TT_{\mu_{p+1}\ldots\mu_{n+1}} = /n-p+1/ : p$, biće T unutrašnje, a V spoljašnje središte sličnosti hipersfera Γ^{n-1}_p i Γ^{n-1}_{n-p+1}. Stoga je odnos poluprečnika r_p i r_{n-p+1} tih hipersfera jednak odnosu duži $TT_{\mu_1\ldots\mu_p}$ i $TT_{\mu_{p+1}\ldots\mu_{n+1}}$, pa je $r_p : r_{n-p+1} = /n-p+1/ : p$.

Dokaz ove teoreme može se takodje izvesti polazeći neposredno od proporcija $HO_p : O_pO = \left[(n-2)(n-p+1)+1\right] : (n-p)$ i $HO_{n-p+1} : O_{n-p+1}O = \left[(n-2)p+1\right] : (p-1)$ koje predstavljaju posledicu teoreme 2.6.

Teorema 2.8. Ako je broj dimenzija ortogonalnog simpleksa $\Pi^n_{n+1}(A)$ neparan broj, tj. ako je $n=2k+1$, tada se središte O_{k+1} /k+1/-ve Ojlerove hipersfere poklapa sa težištem T tog simpleksa.

Dokaz. Neka je H linearni ortocentar, O središte hipersfere opisane oko simpleksa $\Pi^n_{n+1}(A)$ a O_p središte p-te Ojlerove centroidne hipersfere Γ^{n-1}_p simpleksa $\Pi^n_{n+1}(A)$. Prema teoremi 2.6 imamo da je $HO_p : O_pO = \left[(n-2)(n-p+1)+1\right] : (n-p)$ odakle, za $p=k+1$ nalazimo da je $HO_{k+1} : O_{k+1}O = /2k+1/ : 1$. Iz ove proporcije i proporcije $HT : TO = /2k+1/ : 1$ imamo da je $HO_{k+1} : O_{k+1}O :: HT : TO$, odakle neposredno sleduje da se središte O_{k+1} /k+1/-ve Ojlerove centroidne hipersfere Γ^{n-1}_{k+1} poklapa sa težištem T tog simpleksa.

Tako se naprimer središte O_2 druge centroidne sfere Γ^2_2 ortogonalnog tetraedra $\Pi^3_4(A)$, tj. sfere kojoj pripadaju središta njegovih ivica, poklapa sa težištem T tog tetraedra; središte O_3 treće Ojlerove hipersfere Γ^4_3 ortogonalnog simpleksa $\Pi^5_6(A)$, poklapa sa težištem T tog simpleksa, itd.

Teorema 2.9. Antisredišta S_μ pljosni $\Pi_{\mu|m-1}(A)$, podnožja F_μ upravnih kroz temena A_μ na centralnim hiperravnima naspramnih pljosni i središta E_μ duži koje spajaju linearni ortocentar H sa temenima simpleksoida $\Pi_m^k(A)$ upisanog u nekoj hipersferi Γ^{n-1} prostora R^n pripadaju jednoj hipersferi Γ_*^{n-1} kojoj je središte istovetno sa antisredištem S pomenutog simpleksoida, a poluprečnik jednak polovini poluprečnika hipersfere Γ^{n-1}.

Dokaz. Prema teoremi 1.1, tačke S_μ /$\mu = 1, \ldots, m$/ su središta duži koje spajaju središte O hipersfere Γ^{n-1} sa linearnim ortocentrima H_μ pljosni $\Pi_{\mu|m-1}(A)$ pa se analognim postupkom kao u teoremi 2.4 dokazuje da iste pripadaju jednoj hipersferi Γ_*^{n-1} kojoj je središte tačka S, a poluprečnik jednak polovini poluprečnika hipersfere Γ^{n-1}.

Tačke H i A_μ simetrične su tačkama O i H_μ u odnosu na tačku S, odakle neposredno sleduje da su središta E_μ duži HA_μ simetrična tačkama S_μ u odnosu na istu tačku S, prema tome, duži $E_\mu S_\mu$ su prečnici, a E_μ tačke hipersfere Γ_*^{n-1}.

Prema teoremi 1.3, upravne $A_\mu F_\mu$ na centralnim hiperravnima pljosni $\Pi_{\mu|m-1}(A)$ prolaze kroz tačku H, pa su tačke E_μ na pravama $A_\mu F_\mu$. Otuda neposredno sleduje da su duži $E_\mu F_\mu$ i $S_\mu F_\mu$ upravne medju sobom. Kako su duži $E_\mu S_\mu$ prečnici hipersfere Γ_*^{n-1}, a uglovi $E_\mu F_\mu S_\mu$ pravi, podnožja F_μ takodje pripadaju hipersferi Γ_*^{n-1}.

Specijalno, kod trougla $\Pi_3^2(A)$ upisanog u krug Γ^1, antisredišta pljosni $\Pi_{\mu|2}^1$ su središta stranica tog trougla, pa je hipersfera Γ_*^1 Ojlerov krug tog trougla. Stoga se teorema 2.9 može smatrati drugom generalizacijom navedene Ojlerove teoreme.

Definicija 2.3. Za razliku od već uvedenog pojma Ojlerove centroidne hipersfere pomenutog simpleksoida $\Pi_m^k(A)$, hipersferu Γ_*^{n-1} koja sadrži navedene karakteristične tačke nazovimo Ojlerova karakteristična hipersfera ili samo karakteristična hipersfera tog simpleksoida.

Iz ove definicije i teoreme 2.9 neposredno sleduje da karakteristična hipersfera Γ_*^{n-1} simpleksoida $\Pi_m^k(A)$ upisanog u hipersferi Γ^{n-1} prostora R sadrži središta karakterističnih hipersfera njegovih pljosni $\Pi_{\mu|m-1}(A)$.

Kod ravnog simpleksoida $\Pi^2_m(A)$ upisanog u krug Γ^1 Ojlerova karakteristična hipersfera biće Ojlerov karakteristični krug Γ^1_* tog simpleksoida. Primera radi, u prilogu je na slici 1 konstruisan karakteristični krug tetivnog četvorougla, a na slici 2 karakteristični krug tetivnog petougla.

U trodimenzionom prostoru simpleksoid $\Pi^3_m(A)$ upisan u sferi Γ^2 imaće Ojlerovu karakterističnu sferu, itd. Pri tome napominjemo da Ojlerove sfere ortogonalnih tetraedara u literaturi poznate pod nazivima "sfera dvanaest tačaka" koju je pronašao C. F. A. Jakobi i "sfera dvadeset i četiri tačke" koju je pronašao H. Vogt nisu Ojlerove karakteristične, već Ojlerove centroidne sfere tih tetraedara.

3. GENERALIZACIJA POJMA ORTOPOLA NA n-DIMENZIONE SIMPLEKSE I NEKA NJEGOVA SVOJSTVA

Problem koji se proučava u ovom radu odnosi se na proširenje već generalisanog pojma ortopola na n-dimenzione simplekse. U uvodnom delu pomenuli smo da je navedenu generalizaciju izveo godine 1957. u svojem radu "O ortopolu u prostoru R^n" japanski geometar Ivata. Smisao te generalizacije kao i proširenje koje želimo izvesti obrazložićemo posle izvodjenja definicije ortopola neke hiperravni u odnosu na bilo koji n-dimenzioni simpleks kojoj prethodi sledeća teorema.

Teorema 3.1. Ako su $T_{\mu\nu}$ $/\mu,\nu = 1, \ldots, n+1; \mu \neq \nu/$ težišta pljosni $\Pi^{n-2}_{\mu\nu|n-1}(A)$ simpleksa $\Pi^{n}_{n+1}(A)$, a $T'_{\mu\nu}$ podnožja upravnih kroz te tačke na nekoj hiperravni P^{n-1}, tada se svih $\binom{n+1}{2}$ hiperravni $Q^{n-1}_{\mu\nu}$ koje prolaze kroz tačke $T'_{\mu\nu}$ i upravne su na ivicama $A_\mu A_\nu$ seku u jednoj tački.

Dokaz. Da bismo dokazali ovu teoremu, primetimo najpre da se hiperravni $Q^{n-1}_{\mu\nu}$ koje odgovaraju ivicama bilo koje dvodimenzione pljosni simpleksa $\Pi^{n}_{n+1}(A)$, na primer pljosni $A_1A_2A_3$ seku po jednoj /n-2/-dimenzionoj ravni P^{n-2}. Prave A_1A_2 i A_1A_3 seku pravu A_2A_3, pa i njima odgovarajuće hiperravni Q^{n-1}_{13} i Q^{n-1}_{12} seku hiperravan Q^{n-1}_{23} po /n-2/-dimenzionim ravnima P^{n-2} i P'^{n-2} apsolutno upravnim na dvodimenzionoj ravni $A_1A_2A_3$. Neka je L jedna od tačaka prave $T'_{23}T_{23}$ takva da je $T'_{23}T'_{13} : T'_{23}T'_{12} :: T_{13}L : T_{12}L$ a R^{n-2} /n-2/-dimenziona ravan kroz tačku T'_{23} apsolutno upravna na ravni $LT_{12}T_{13}$. Ravan R^{n-2} sadrži tačku T'_{23} i upravna je na pravoj $T_{12}T_{13}$, prema tome, i na pravoj A_2A_3 koja je uporedna sa $T_{12}T_{13}$, odakle sleduje da ista pripada hiperravni Q^{n-1}_{23}. Neka su M i M' tačke u kojima proizvoljna prava ravni R^{n-2} kroz tačku T'_{23} seče P^{n-2} i P'^{n-2}. Odgovarajuće stranice trouglova $MT'_{13}T'_{23}$ i $T_{12}T_{23}L$ upravne su medjusobom, odakle sleduje da su ti trougli slični, pa je $T_{23}M : T_{23}T_{13} :: T_{12}L : T_{23}L$ ... /2/

Iz istih razloga i trougli $M\,T_{12}T_{23}$, $T_{13}T_{23}L$ su slični, pa je

$T'_{23}T'_{12} : T'_{23}M' :: T_{23}L : T_{13}L$ ... /3/. Množenjem levih, a zatim desnih strana proporcija /1/, /2/, /3/ nalazimo da su duži $T'_{23}M$ i $T'_{23}M'$ jednake i jednako usmerene, tj. da su tačke M i M' istovetne. Kako su ravni P^{n-2} i P'^{n-2} kroz tačku M apsolutno upravne na ravni $A_1A_2A_3$, one su istovetne; obe pripadaju ravni Q_{23}, prema tome, sve tri hiperravni Q_{12}, Q_{13}, Q_{23} seku se po istoj /n-2/-dimenzionoj ravni P^{n-2}, koja je apsolutno upravna na ravni $A_1A_2A_3$.

Sad dokažimo da se hiperravni $Q^{n-1}_{\mu\nu}$ koje odgovaraju ivicama bilo koje trodimenzione pljosni datog simpleksa, na primer pljosni $A_1A_2A_3A_4$ seku po istoj /n-3/-dimenzionoj ravni P^{n-3}. Ravni P^{n-2}_1 i P^{n-2}_2 koje odgovaraju susednim pljosnima $A_1A_2A_3$ i $A_2A_3A_4$ na kojima su apsolutno upravne, pripadaju istoj hiperravni Q^{n-1}_{23}, prema tome, one se seku po jednoj /n-3/-dimenzionoj ravni P^{n-3}. Kako ravan P^{n-3} pripada hiperravnima Q^{n-1}_{12} i Q^{n-1}_{24}, ona pripada i hiperravni Q^{n-1}_{14}, pa se svih šest hiperravni $Q^{n-1}_{\mu\nu}$ koje odgovaraju ivicama trodimenzione pljosni $A_1A_2A_3A_4$ seku po istoj /n-3/-dimenzionoj ravni P^{n-3}.

Potpuno analognim postupkom dokazuje se zatim, da se svih deset hiperravni $Q^{n-1}_{\mu\nu}$ koje odgovaraju ivicama neke četvorodimenzione pljosni seku po jednoj /n-4/-dimenzionoj ravni P^{n-4}, itd. Najzad, da se svih $\binom{n+1}{2}$ hiperravni $Q^{n-1}_{\mu\nu}$ koje odgovaraju ivicama datog simpleksa $\Pi^{n}_{n+1}(A)$ seku po jednoj /n-n/-dimenzionoj ravni, tj. jednoj tački P; time je teorema dokazana.

Izvedena teorema 3.1 može se proširiti, uzimajući umesto težišta $T_{\mu\nu}$ linearne ortocentre $H_{\mu\nu}$ pljosni $\Pi^{n-2}_{\mu\nu|n-1}(A)$ bilo kojeg simpleksa $\Pi^{n}_{n+1}(A)$. Štaviše, može se dokazati sledeća teorema.

Teorema 3.2. Ako je O proizvoljna tačka prostora R^n i ako su $H_{\mu\nu}$ linearni ortocentri pljosni $\Pi^{n-2}_{\mu\nu|n-1}(A)$ simpleksa $\Pi^{n}_{n+1}(A)$, $K_{\mu\nu}$ tačke pravih $OH_{\mu\nu}$ takve da su odnosi $OK_{\mu\nu} : K_{\mu\nu}H_{\mu\nu}$ jednaki medju sobom, a $K'_{\mu\nu}$ upravne projekcije tih tačaka na nekoj hiperravni P^{n-1}, tada se svih $\binom{n+1}{2}$ hiperravni $Q^{n-1}_{\mu\nu}$ koje sadrže tačke $K'_{\mu\nu}$ i upravne su na ivicama $A_\mu A_\nu$ seku u jednoj tački.

Na taj način, teorema 3.1 postaje specijalan slučaj mnogo opštije teoreme 3.2, koja omogućuje da izvedemo sledeću definiciju.

Definicija 3.1. Tačku u kojoj se seku hiperravni $Q^{n-1}_{\mu\nu}$ pomenute u teoremi 3.2 nazovimo ortopolom $P(K)$ simpleksa $\Pi^{n}_{n+1}(A)$ koji je definisan u odnosu na hiperravan P^{n-1}.

Kada su tačke $K_{\mu\nu}$ istovetne težištima $T_{\mu\nu}$ pljosni $\Pi^{n-2}_{\mu\nu|n-1}(A)$ biće ortopol $P(T)$ Ivata-ov ortopol simpleksa $\Pi^{n}_{n+1}(A)$ definisan u odnosu na istu hiperravan P^{n-1}. Sledećom teoremom izvedimo neka svojstva ravnih simpleksoida upisanih u krug Γ^1.

Teorema 3.3. Ortopolovi $P(T)$ centralnih pravih pljosni $\Pi_{\mu\nu\lambda|m-3}(A)$ /$\mu,\nu,\lambda=1, \ldots, m; \mu\neq\nu\neq\lambda$ / simpleksoida $\Pi^{2}_{m}(A)$ upisanog u krug Γ^1, koji su definisani u odnosu na trotemenike odredjene preostalim temenima, pripadaju Ojlerovom karakterističnom krugu tog simpleksoida.

Dokaz. Neka su $p_{\mu\nu\lambda}$ centralne prave pljosni $\Pi_{\mu\nu\lambda|m-3}(A)$ pomenutog simpleksoida, a $P_{\mu\nu\lambda}$/T/ ortopolovi tih pravih definisani u odnosu na trotemenike $A_\mu A_\nu A_\lambda$. Kroz središte O kruga Γ^1 konstruišimo prave $p'_{\mu\nu\lambda}$ uporedne pravama $p_{\mu\nu\lambda}$, zatim ortopolove $P'_{\mu\nu\lambda}(T)$ definisane u odnosu na odgovarajuće trotemenike $A_\mu A_\nu A_\lambda$. Prave $p'_{\mu\nu\lambda}$ sadrže središte O kruga Γ^1 opisanog oko trotemenika $A_\mu A_\nu A_\lambda$, pa su prema poznatoj teoremi, ortopolovi $P'_{\mu\nu\lambda}(T)$ tačke Ojlerovog karakterističnog kruga trotemenika $A_\mu A_\nu A_\lambda$ /v.d. 2.3/. Obeležimo sa S antisredište simpleksoida $\Pi^{2}_{m}(A)$, a sa $S_{\mu\nu\lambda}$ i $S'_{\mu\nu\lambda}$ antisredišta naspramnih pljosni $\Pi_{\mu\nu\lambda|m-3}(A)$ i $(A_\mu A_\nu A_\lambda)$. Prema poznatim teoremama, duži $P'_{\mu\nu\lambda}P_{\mu\nu\lambda}$ jednake su i jednako usmerene dužima $OS_{\mu\nu\lambda}$, a duži $OS_{\mu\nu\lambda}$ jednake i jednako usmerene dužima $S'_{\mu\nu\lambda}S$, pa su duži $P'_{\mu\nu\lambda}P_{\mu\nu\lambda}$ jednake i jednako usmerene dužima $S'_{\mu\nu\lambda}S$. Otuda sleduje da su duži $SP_{\mu\nu\lambda}$ jednake dužima $S'_{\mu\nu\lambda}P'_{\mu\nu\lambda}$, pa su ortopolovi $P_{\mu\nu\lambda}$ pravih $p_{\mu\nu\lambda}$ definisani u odnosu na trotemenike $A_\mu A_\nu A_\lambda$ tačke karakterističnog kruga simpleksoida $\Pi^{2}_{m}(A)$.

Pored izvedenih, ravni simpleksoidi upisani u nekom krugu imaju niz drugih osobina vezanih za pojam ortopola.

Nije teško dokazati, na primer, sledeće teoreme:

Teorema 3.4. Ortopolovi proizvoljne prave p definisani u odnosu na pljosni $\Pi^2_{\mu|3}(A)$ četvorotemenika $\Pi^2_4(A)$, upisanog u krug Γ^1, pripadaju jednoj pravoj - ortopolari prave p definisane u odnosu na četvorotemenik $\Pi^2_4(A)$.

Teorema 3.5. Ako je $\Pi^2_m(A)$ proizvoljan simpleksoid upisan u nekom krugu Γ^1, ortopolare centralnih pravih svih pljosni $\Pi_{\mu\nu\delta\lambda|m-4}(A)$ definisane u odnosu na četvorotemenike $A_\mu A_\nu A_\delta A_\lambda$ prolaze kroz antisredište S simpleksoida $\Pi^2_m(A)$.

Tako je u prilogu na sl. 4 konstruisana centralna prava pljosni $A_1A_2A_3$, zatim njena ortopolara u odnosu na naspramnu pljosan $A_4A_5A_6A_7$ simpleksoida $\Pi^2_7(A)$ upisanog u krug Γ^1 i antisredište S tog simpleksoida.

4. GENERALIZACIJA DEZARGOVIH TEOREMA NA k-DIMENZIONE SIMPLEKSOIDE

Problemi proučavani u prethodna tri dela ovog rada odnosili su se na uopštenje niza pojmova i teorema metričke geometrije na euklidske prostore s bilo kojim brojem dimenzija. Pri tome su ispitivana svojstva isključivo simpleksoida upisanih u hipersferama prostora R^n. Kao što smo ranije pomenuli, u ovom delu proučavaćemo izvesna projektivna svojstva mnoštva dvaju ili više simpleksoida perspektivnih u odnosu na istu, konačnu ili beskrajno daleku, tačku tog prostora. Pretpostavljajući da je prostor u kome proučavamo pomenuta mnoštva simpleksoida projektivan, u daljim izlaganjima nećemo isticati da li je neka tačka konačna ili beskrajno daleka, da li se izvesne prave seku ili su uporedne medjusobom. Tom prilikom, na takva mnoštva simpleksoida proširićemo Dezargovu direktnu i njoj obrnutu teoremu, nezavisno od broja dimenzija tih simpleksoida. Smisao takvog proširenja na izvestan način analogan je s nizom generalizacija izvedenih u prethodna tri dela. Pri izvodjenju koristićemo pomenute Dezargove teoreme dvaju trotemenika $\Pi_3(A^1)$ i $\Pi_3(A^2)$ perspektivnih u odnosu na istu tačku, zatim teoremu kojom se ustanovljuje da se ose perspektiva triju parova trotemenika $\Pi_3(A^2)$ i $\Pi_3(A^3)$, $\Pi_3(A^3)$ i $\Pi_3(A^1)$, $\Pi_3(A^1)$ i $\Pi_3(A^2)$, perspektivnih takodje u odnosu na istu tačku, seku u jednoj, takozvanoj Heseovoj tački tog mnoštva trotemenika. Proširenje izvedimo postupno, najpre kod četvorotemenika, zatim kod petotemenika, itd. Pre svega, primetimo da kod dvaju perspektivnih simpleksoida $\Pi_4(A^1)\equiv(A^1_1A^1_2A^1_3A^1_4)$ i $\Pi_4(A^2)\equiv(A^2_1A^2_2A^2_3A^2_4)$ ose perspektiva trotemenika $\Pi_{\mu|3}(A^1)$ i $\Pi_{\mu|3}(A^2)$ pripadaju jednoj ravni.

Teorema 4.1. Ako su $\Pi_4(A^1)\equiv(A^1_1A^1_2A^1_3A^1_4)$, $\Pi_4(A^2)\equiv(A^2_1A^2_2A^2_3A^2_4)$, $\Pi_4(A^3)\equiv(A^3_1A^3_2A^3_3A^3_4)$ tri simpleksoida perspektivna u odnosu na istu tačku O, tada Heseove tačke S_λ pljosni $\Pi_{\lambda 13}(A^1), \Pi_{\lambda 13}(A^2), \Pi_{\lambda 13}(A^3)$, za $\lambda = 1, 2, 3, 4$ pripadaju jednoj pravoj.

Dokaz. Neka su $A^{ij}_{\mu\nu}$ tačke u kojima se seku odgovarajuće ivice $A^i_\mu A^i_\nu$ i $A^j_\mu A^j_\nu$ /$i, j = 1, 2, 3$; $i \neq j$ i $\mu, \nu = 1, \ldots, 4$; $\mu \neq \nu$ / datih simpleksoida. Prema Dezargovoj teoremi, tačke $A^{ij}_{\mu\nu}$ za fiksirane vrednosti indeksa i, j i proizvoljne vrednosti indeksa μ, ν koje su različite od λ, pripadaju jednoj pravoj a^{ij}_λ, osi kolineacije ili afiniteta pljosni $\Pi_{\lambda 13}(A^i)$ i $\Pi_{\lambda 13}(A^j)$, a prema Heseovoj teoremi prave a^{ij}_λ prolaze kroz Heseovu tačku S_λ pljosni $\Pi_{\lambda 13}(A^1), \Pi_{\lambda 13}(A^2), \Pi_{\lambda 13}(A^3)$.

Prave $A^{ik}_{\mu\lambda} A^{jk}_{\mu\lambda}$ za $i \neq j \neq k$ i $\mu \neq \lambda$ prolaze kroz tačku A^k_λ, pa su simpleksoidi $\Pi_3(A^{ik}) \equiv (A^{ik}_{\mu\lambda} A^{ik}_{\nu\lambda} A^{ik}_{\delta\lambda})$ i $\Pi_3(A^{jk}) \equiv (A^{jk}_{\mu\lambda} A^{jk}_{\nu\lambda} A^{jk}_{\delta\lambda})$ za $\mu \neq \nu \neq \delta \neq \lambda$ perspektivni u odnosu na tačku A^k_λ; odakle neposredno sleduje da tačke S_μ, S_ν, S_δ u kojima se seku odgovarajuće ivice ovih simpleksoida pripadaju jednoj pravoj. Uzimajući različite vrednosti indeksa nalazimo da sve Heseove tačke S pripadaju jednoj pravoj.

Tako su npr. simpleksoidi $\Pi_3(A^{12}) \equiv (A^{12}_{12} A^{12}_{13} A^{12}_{14})$ i $\Pi_3(A^{13}) \equiv (A^{13}_{12} A^{13}_{13} A^{1}$ perspektivni u odnosu na tačku A^1_1, prema tome, tačke S_2, S_3, S_4 u kojima se seku odgovarajuće stranice $A^{12}_{13} A^{12}_{14}$ i $A^{13}_{13} A^{13}_{14}$, $A^{12}_{14} A^{12}_{12}$ i $A^{13}_{14} A^{13}_{12}$, $A^{12}_{12} A^{12}_{13}$ i $A^{13}_{12} A^{13}_{13}$ ovih simpleksoida pripadaju jednoj pravoj. Isto tako, simpleksoidi $\Pi_3(A^{23}) \equiv (A^{23}_{23} A^{23}_{24} A^{23}_{21})$ i $\Pi_3(A^{24}) \equiv (A^{24}_{23} A^{24}_{24} A^{24}_{21})$ perspektivni su u odnosu na tačku A^2_2, prema tome, tačke S_3, S_4, S_1 u kojima se seku odgovarajuće stranice $A^{23}_{24} A^{23}_{21}$ i $A^{24}_{24} A^{24}_{21}$, $A^{23}_{21} A^{23}_{23}$ i $A^{24}_{24} A^{24}_{23}$, $A^{23}_{23} A^{23}_{24}$ i $A^{24}_{23} A^{23}_{24}$ ovih simpleksoida pripadaju takodje jednoj pravoj. Otuda neposredno sleduje da sve četiri Heseove tačke S_λ pljosni $\Pi_{\lambda 13}(A^1)$, $\Pi_{\lambda 13}(A^2)$, $\Pi_{\lambda 13}(A^3)$ za $\lambda = 1, 2, 3, 4$ pripadaju jednoj pravoj.

Definicija 4.1. Pravu s kojoj pripadaju Heseove tačke S_λ pljosni $\Pi_{\lambda 13}(A^1), \Pi_{\lambda 13}(A^2), \Pi_{\lambda 13}(A^3)$ datih simpleksoida nazovimo Heseova prava tog mnoštva simpleksoida.

Dokaz teoreme 4.1 izveden je nezavisno od broja dimenzija simpleksoida $\Pi_4(A^1)$, $\Pi_4(A^2)$, $\Pi_4(A^3)$, odakle neposredno sleduje da posmatrani simpleksoidi mogu biti ravni. Tako je na sl. 5 predstavljen sistem od tri ravna četvorotemenika kojima Heseove tačke S_λ pljosni $\Pi_{\lambda 13}(A^1)$, $\Pi_{\lambda 13}(A^2)$, $\Pi_{\lambda 13}(A^3)$ za $\lambda = 1, 2, 3, 4$ pripadaju pravoj s, Heseovoj pravoj tog mnoštva simpleksoida.

Teorema 4.2. Ako su $\Pi_4(A^1) \equiv (A^1_1 A^1_2 A^1_3 A^1_4)$, $\Pi_4(A^2) \equiv (A^2_1 A^2_2 A^2_3 A^2_4)$ $\Pi_4(A^3) \equiv (A^3_1 A^3_2 A^3_3 A^3_4)$, $\Pi_4(A^4) \equiv (A^4_1 A^4_2 A^4_3 A^4_4)$ četiri simpleksoida perspektivna u odnosu na istu tačku O, tada Heseove prave s simpleksoida $\Pi_4(A^i)$, $\Pi_4(A^j)$, $\Pi_4(A^k)$ za $i, j, k, l = 1, \dots, 4$, $i \neq j \neq k \neq l$ prolaze kroz istu tačku.

Dokaz. Kao u prethodnoj teoremi, neka su $A^{ij}_{\mu\nu}$ tačke u kojima se seku prave $A^i_\mu A^i_\nu$ i $A^j_\mu A^j_\nu$ $/\mu, \nu = 1, \dots, 4; \mu \neq \nu$ /. Tačke $A^{il}_{\mu\lambda}$, $A^{jl}_{\mu\lambda}$, $A^{kl}_{\mu\lambda}$ pripadaju jednoj pravoj koja prolazi kroz tačku A , pa su simpleksoidi $\Pi_3(A^{il}) \equiv (A^{il}_{\mu\lambda} A^{il}_{\nu\lambda} A^{il}_{\delta\lambda})$, $\Pi_3(A^{jl}) \equiv (A^{jl}_{\mu\lambda} A^{jl}_{\nu\lambda} A^{jl}_{\delta\lambda})$ $\Pi_3(A^{kl}) \equiv (A^{kl}_{\mu\lambda} A^{kl}_{\nu\lambda} A^{kl}_{\delta\lambda})$ perspektivni u odnosu na tačku A^l_λ; stoga se, prema Heseovoj teoremi, ose kolineacije parova ovih simpleksoida seku u jednoj tački. Medjutim, ose kolineacije simpleksoida $\Pi_3(A^{jl})$ i $\Pi_3(A^{kl})$, $\Pi_3(A^{kl})$ i $\Pi_3(A^{il})$, $\Pi_3(A^{il})$ i $\Pi_3(A^{jl})$ su Heseove prave s^i, s^j, s^k; prema tome, one prolaze kroz istu tačku, recimo S. Dajući različite vrednosti indeksu , nalazimo da sve četiri Heseove prave s^1, s^2, s^3, s^4 prolaze kroz tačku S.

Tako su napr. simpleksoidi $\Pi_3(A^{14}) \equiv (A^{14}_{12} A^{14}_{13} A^{14}_{14})$, $\Pi_3(A^{24}) \equiv (A^{24}_{12} A^{24}_{13} A^{24}_{14})$, $\Pi_3(A^{34}) \equiv (A^{34}_{12} A^{34}_{13} A^{34}_{14})$ perspektivni u odnosu na tačku A^4_1 /v. sl. 6 /; pa se prema Heseovoj teoremi ose kolineacija s^1, s^2, s^3 parova simpleksoida $\Pi_3(A^{24})$ i $\Pi_3(A^{34})$, $\Pi_3(A^{34})$ i $\Pi_3(A^{14})$, $\Pi_3(A^{14})$ i $\Pi_3(A^{24})$ seku u nekoj tački S. Analognim postupkom dokazujemo da se i prave s^2, s^3, s^4 seku takodje u jednoj tački, odakle neposredno sleduje da sve četiri prave s^1, s^2, s^3, s^4 prolaze kroz tačku S.

Definicija 4.2. Tačku S u kojoj se seku Heseove prave s navedenih simpleksoida nazovimo Heseova tačka tog mnoštva simpleksoida.

Izvedena teorema 4.2. omogućuje da analogno, postupkom primenjenim u teoremi 2.1, dokažemo da slična svojstva ima i mnoštvo od četiri simpleksoida $\Pi_5(A^1)$, $\Pi_5(A^2)$, $\Pi_5(A^3)$, $\Pi_5(A^4)$, takodje perspektivna u odnosu na istu, konačnu ili beskonačno daleku tačku, i da na taj način navedenu Dezargovu teoremu generališemo na još veći broj simpleksoida. Posle toga nije teško dokazati da se i Heseova teorema može proširiti na mnoštvo od pet simpleksoida $\Pi_5(A^1), \Pi_5(A^2), \Pi_5(A^3), \Pi_5(A^4), \Pi_5(A^5)$ opet perspektivnih u odnosu na istu tačku. Induktivnim postupkom dokazuju se na taj način sledeće uopštene teoreme.

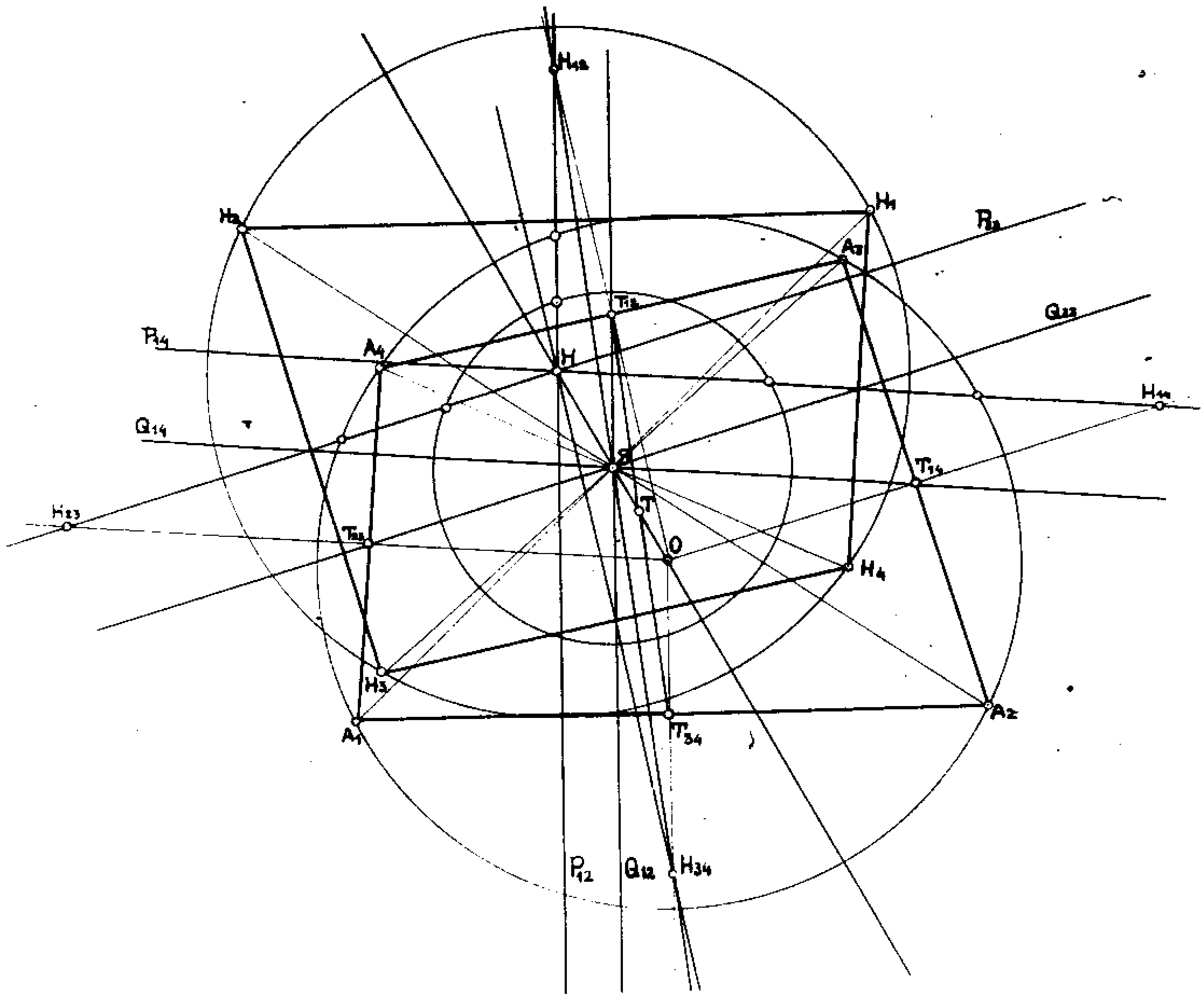
Teorema 4.3. Ako je $\Pi_m(A^1) \equiv (A_1^1 A_2^1 A_3^1 \cdots A_m^1), \ldots, \Pi_m(A^{m-1}) \equiv (A_1^{m-1} \cdots A_m^{m-1})$ mnoštvo od m-1 simpleksoida perspektivnih u odnosu na istu tačku prostora R^n, tada Heseove tačke S_λ pljosni $\Pi_{\lambda|m-1}(A^1)$ ..., $\Pi_{\lambda|m-1}(A^{m-1})$ za $\lambda = 1$, ..., m, pripadaju jednoj pravoj.

Definicija 4.3. Po analogiji, pravu s kojoj pripadaju Heseove tačke S_λ pljosni $\Pi_{\lambda|m-1}(A^1)$, ..., $\Pi_{\lambda|m-1}(A^{m-1})$ simpleksoida $\Pi_m(A^1)$, ..., $\Pi_m(A^{m-1})$ nazovimo Heseova prava tog mnoštva simpleksoida.

Teorema 4.4. Ako je $\Pi_m(A^1) \equiv (A_1^1 \cdots A_m^1), \ldots, \Pi_m(A^m) \equiv (A_1^m \cdots A_m^m)$ mnoštvo od m simpleksoida perspektivnih u odnosu na istu tačku prostora R^n, tada se Heseove prave s^{l_m} simpleksoida $\Pi_m(A^{l_1})$, ..., $\Pi_m(A^{l_m})$ za l_1 , ..., l_m = 1, ..., m i $l_1 \neq \cdots \neq l_m$ seku u jednoj tački.

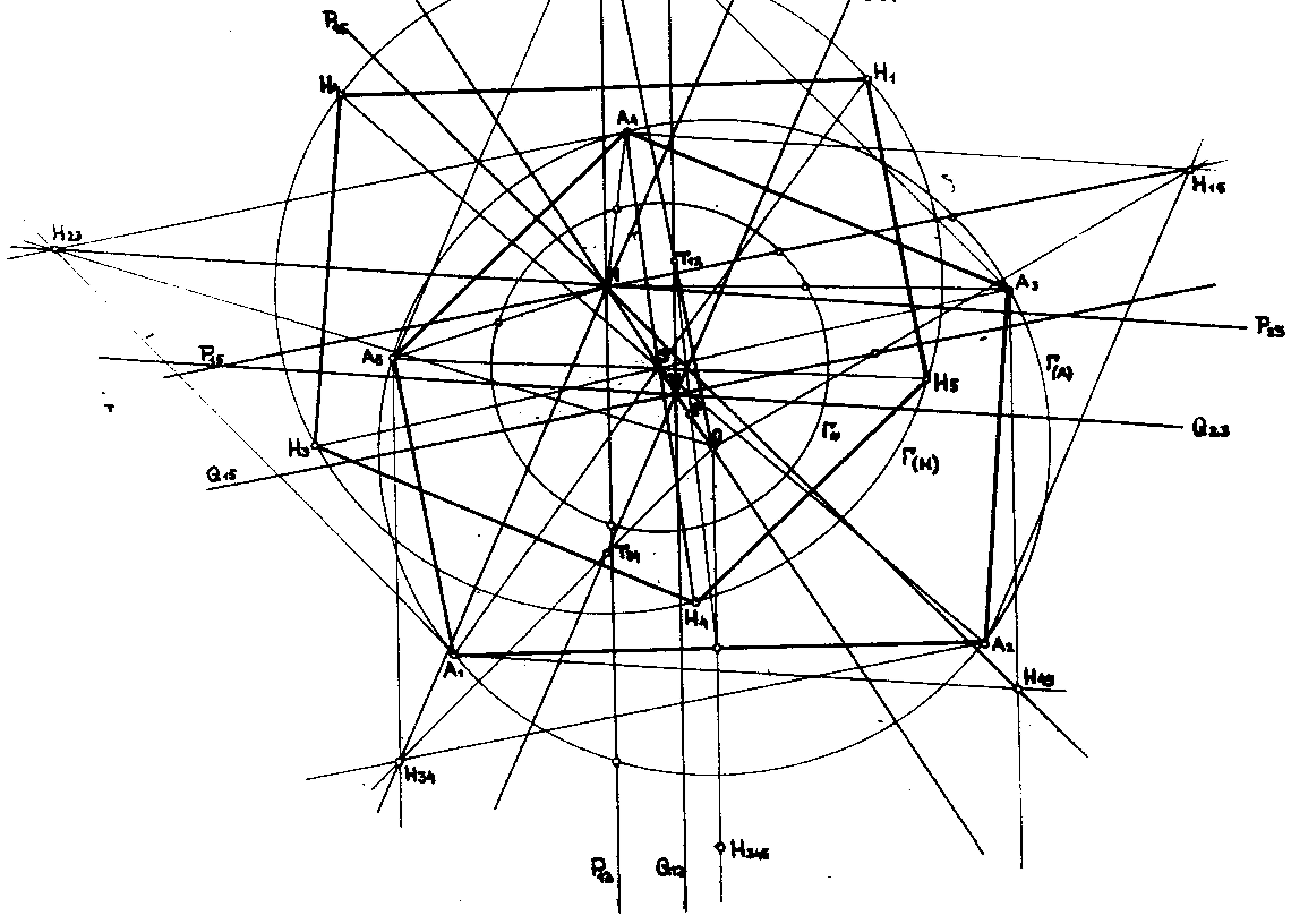
Definicija 4.4. Saglasimo se da tačku u kojoj se seku Heseove prave pomenutih simpleksoida nazovemo Heseova tačka datog mnoštva simpleksoida.

Na potpuno analogan način dokazuju se i teoreme obrnute iskazanim teoremama.



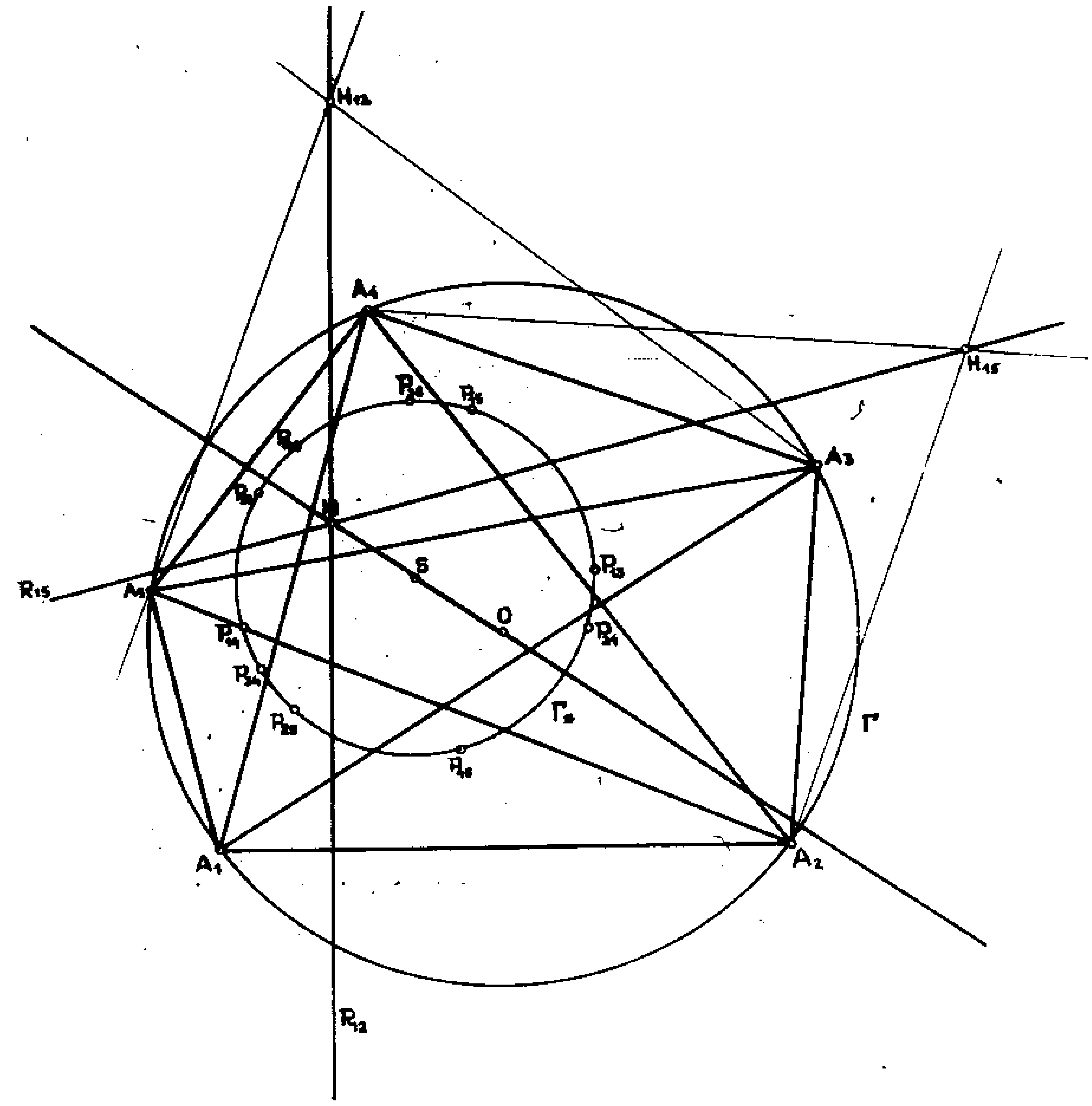
H12
H2
H1
P23
A3
T13
Q23
P14
A4
H
H14
Q14
T14
H23
T23
T
O
H4
H3
A1
T34
A2
P12
Q12
H34

Sl. 1

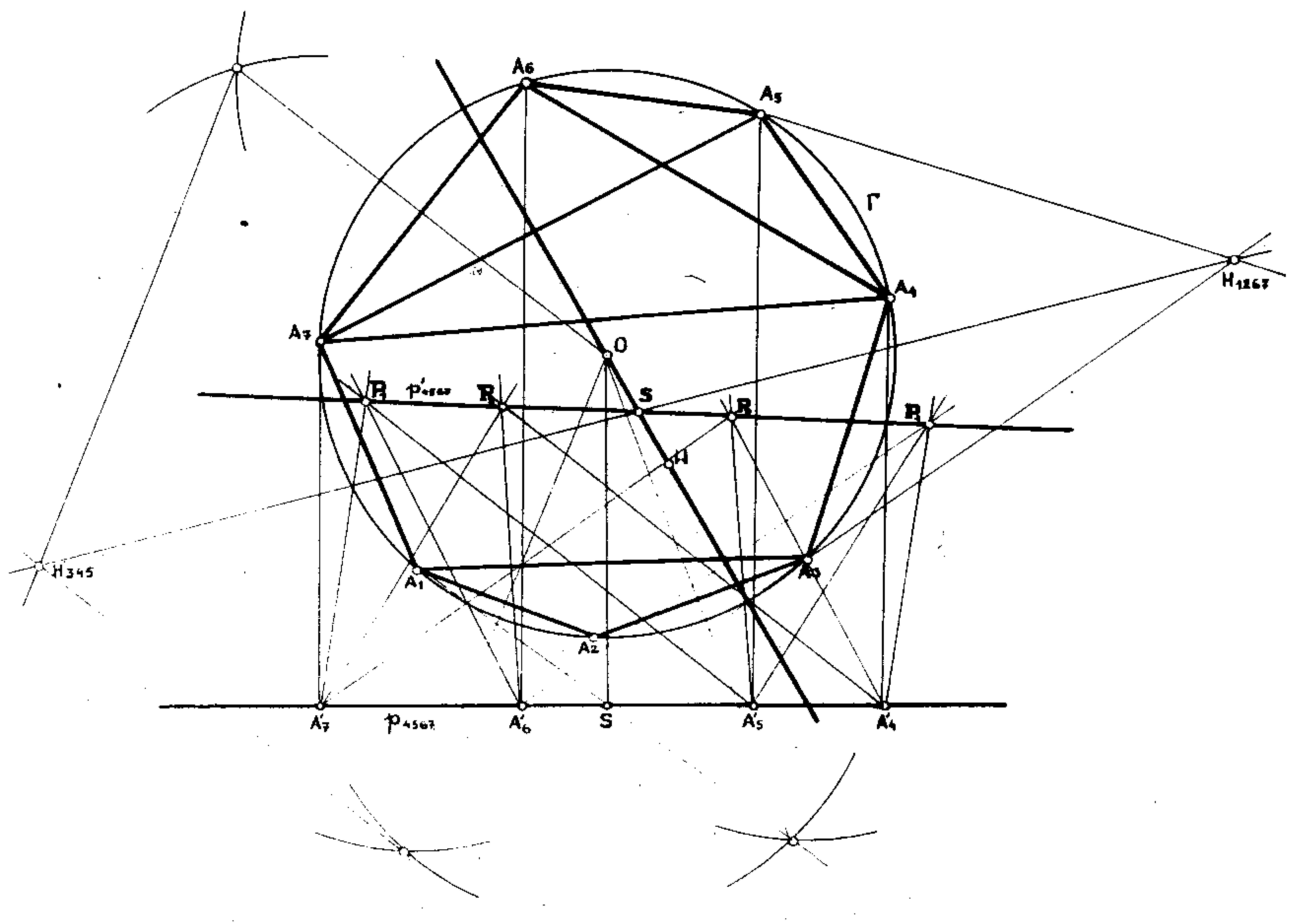


H12
P45
Q34
P25
H2
H1
A4
H15
H23
T13
A3
P23
P35
A5
H5
Γ(A)
Q23
H3
Γ0
Γ(H)
Q15
T34
H4
A1
A2
H45
H34
H345
P12
Q12

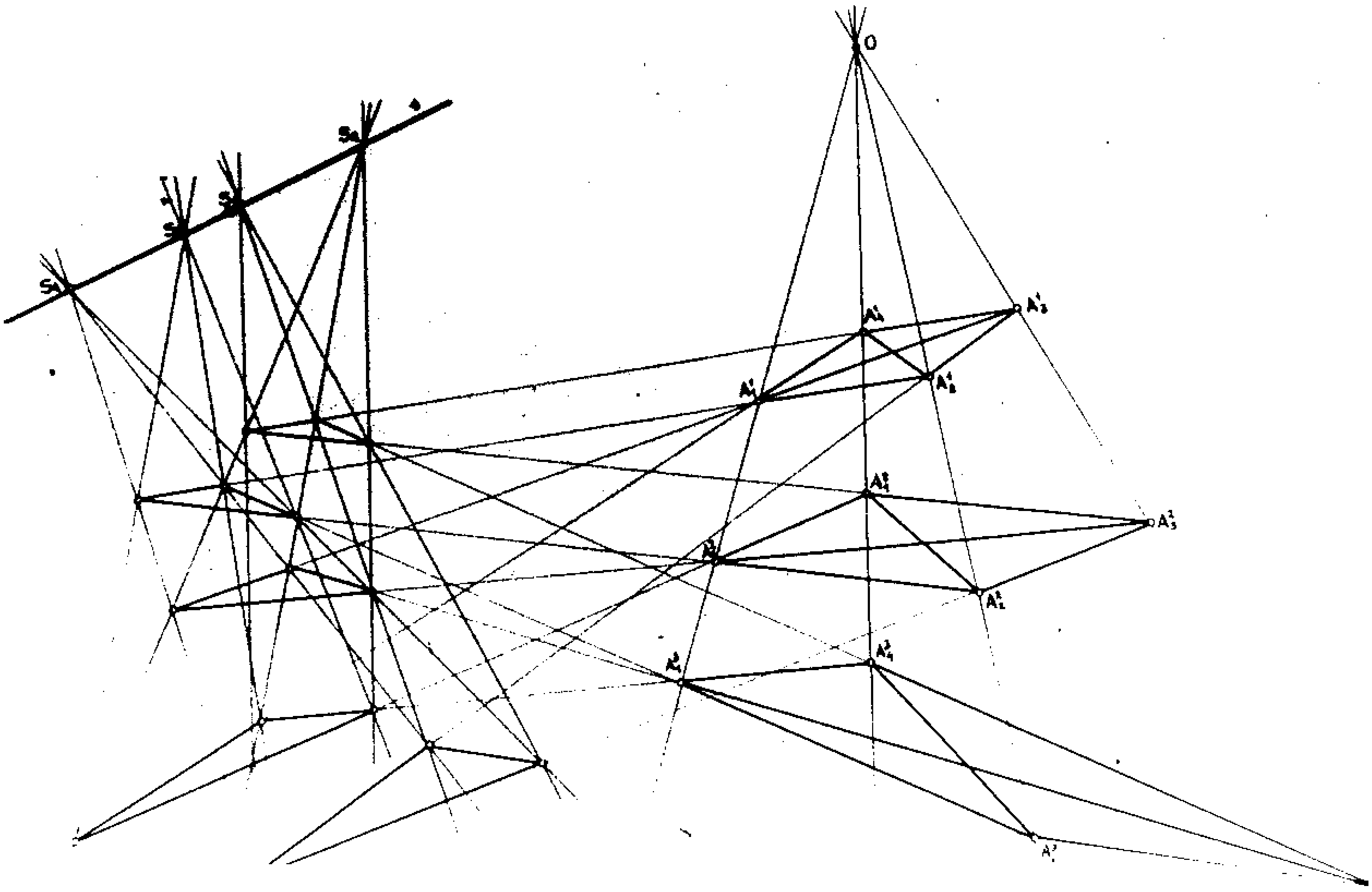
Sl. 2


H12
A4
H15
A3
A5
R15
S
O
Γ
A1
A2
R12

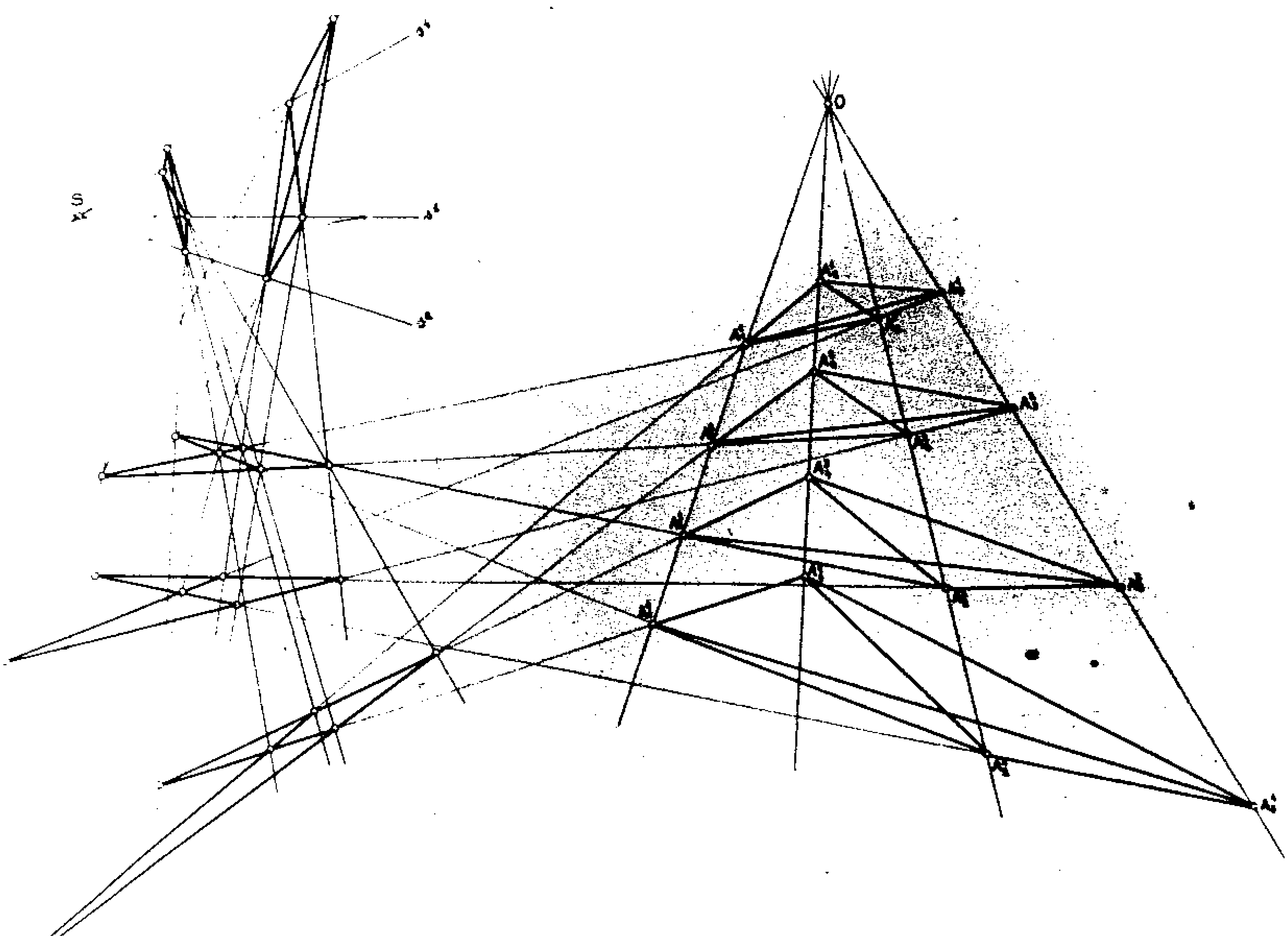
Sl. 3.


A6
A5
Γ
H1267
A4
A7
O
S
H
H345
A1
A2
A'7
p4567
A'6
S
A'5
A'4

Sl. 4.



Sl. 5



Sl. 6

L i t e r a t u r a

1. Aleksandrov, P. S.: Kombinatornaja topologija
2. Baumgartner, L.: Geometrie im Raum von vier dimensionen
3. Coxter, H. S. M.: Regular polytopes
4. Durieu, M.: Sur le point de Monge d'un tétraèdre, Mathesis, 1958, 67, No. 1-3, 57-58
5. Egervary, E.: On the Feuerbach-spheres of an orthocentric simplex, Acta math. Acad. Sci. Hung. 1, 5-15, 1950
6. Forsyth, A. R.: Geometry of four dimensions
7. Gerretsen, J. C. H.: An analogue of the nine-point circle in the space of n dimensions, Naderl. Acad. Wetensch. Proc. 48, 535-536
8. Goormaghtigh, R.: Ortopôles et droites ortopolaires dans les polygones, Bull. Soc. roy. Sci. Liège 15, 119-133, 1946
9. Goormaghtigh, R.: A theorem of a cylic poligon, Amer math. Monthly, 466-468, 1948
10. Goormaghtigh, R.: Sur le quadrilatère complet, Mathesis, No. 7-8-9-10, 1952
11. Goormaghtigh, R.: L'orthopôles dans les polygones inscriptibles, Mathesis, No. 6-7-8, 261-266, 1955
12. Goormaghtigh, R.: Théorèmes recurrents relatifs aux polygones inscriptibles, Mathesis, No. 7-8-9, 288-291, 1957
13. Goormaghtigh, R.: Extension au polygone inscriptible de la droite de Simsone d'angle quelconque, Mathesis, No. 1-2-3, 23-27, 1958
14. Goormaghtigh, R.: Sur les droites de Simson d'un polygon inscriptible, Mathesis, No. 7-8, 241-245, 1948
15. Hajos, G.: Uber die Feuerbachschen Kugeln mehrdimensionaler orthozentricher Simplexe, Acta math. Acad. Sci. Hungar. 2, 191-196, 1951

16. Ivata: O ortopolu u prostoru R^n, 1957

17. Konnully, A. O.: Orthocentre of a cyclic polygon, Math. student 11, 28-30, 1943

18. Krejcer, G. P. i Tjurin, G. I.: Sferi Ejlera ortocentričeskogo simpleksa, Matematičeskoe prosveščenie, 2, 187-195, 1957

19. Majcen, G.: Sur les pentagones orthocentriques, Mathesis, /3/, IV, 1904

20. Manning, H. P.: Geometry of four dimensions

21. Nadenik, Z.: Rozšireni vet Menelaovy a Cevovy na n-dimensionalni Utvary, Čas. Pro Pest. mat. Sv. 81, č. 1, 1-25, 1956

22. Nadenik, Z.: Nekolik vlastnosti vrcholovych nadrovin normalniho mnohouhelnika, Čas. Pro Pest. mat. Sv. 81, č. 3, 285-290, 1956

23. Nadenik, Z.: O ortocentru normalniho mnohouhelnika, Čas. Pro Pest. mat. Sv. 81, č. 3, 291-298, 1956

24. Naumovič, N. V.: Primenenie mnogomernoj načertateljnoj geometrii k dokazateljstvu nekotorih teorem planimetrii i stereometrii, Metodi načertateljnoj geometrii i jejo priloženija,1955

25. Niče, V.: Prilog geometriji tetraedra, Glasnik matem.-fiz. Ser. II. T. 7, No. 4, 228-244, 1952

26. Rao, A. N.: On the metric geometry of a ciclic n-point, Math. Student, 12, 91-97, 1945

27. Rouché, E. et Comberousse, de Ch.: Traité de Géométrie

28. Schoute, P. H.: Mehrdimensionale Geometrie

29. Sommerville, D. M. Y.: An introduction to the geometry of n-dimensions

30. Thébault, V.: A study of a quadrilatelal inscribed in a circle, Amer. Math. Monthly 49, 174-181, 1942

31. Thébault, V.: Nouvelles analogies entre le triangle et le tétraèdre, C. r. Acad. Sci., Paris, 218, 262-264, 1944

32. Thébault, V.: Perspective and orthologic triangles and tetrahedrons, Amer. math. Monthly, 59, 24-28, 1952

33. Thébault, V.: Un chapitre de géometrie du triangle et du tétraèdre. Orthopôles d'une droite, Mathesis, No. 8-9-10,1952

34. Thébault, V.: Sur la geometrie du tétraèdre, Extrait des Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 1953

S a d r ž a j