UNIVERZITET U PRIŠTINI

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

ABDULLAH ZEJNULLAHU

MEDIALNE POLUGRUPE I NJIHOVO UOPŠTAVANJE

(Doktorska disertacija)

RUKOVODILAC

DR. TOMAŠ KEPKA

PRIŠTINA, 1989.

SADRŽAJ

PREDGOVOR

Ovaj rad se sastoji od četiri dela.

U prvom delu navedeni su poznati pojmovi i rezultati iz teorije polugrupa koje su nam korisne za dalji rad.

U početku drugog dela, tačno rečeno u paragrafima 1.1, 1.2 i 1.3 dati su neki poznati rezultati iz teorije medialnih polugrupa, gde kod svakog navedenog stava napisan je u zagradama od kog članka je uzet i nisu dokazani. U paragrafu 1.4 dali smo definiciju levo polumedialne polugrupe, desno polumedialne polugrupe i polumedialne polugrupe, koja predstavlja uopštenje medialne polugrupe (lema 1.4.1). Dalje u ovom paragrafu data je karakterizacija polumedialnih archimedovih polugrupa koje sadrže idempotente preko ortogonalne grupe (1.4.4, 1.4.5, 1.4.6). U paragrafu 1.5 daje se definicija levo (desno) 2- archimedove polugrupe, 2- archimedove polugrupe i razmatra se dekompozicija polumedialne polugrupe po spomenutim polugrupama (1.5.1, 1.5.4). U paragrafu 1.6 daje se karakterizacija polumedialne separativne polugrupe preko kancelativnosti njenih archimedovih i 2- archimedovih komponenta (1.6.3, 1.6.4, 1.6.5).

U trečem delu razmatraju se L polugrupe. U paragrafu 2.4 dati su neki poznati rezultati iz [29] o varietetima L polugrupa koje smo ih naveli bez dokaza zbog celine materijala.

U paragrafu 2.1 vidimo da *K* polugrupa je pod direktno razloživa. U paragrafu 2.2 daje se pojam splei polugrupe i konstrukcija *K* polugrupe preko jedne polugrupe idempotenta i *A* polugrupe. U paragrafu 2.3 daju se potrebni i dovoljni uslovi da *K* polugrupa bude splei (2.3.1, 2.3.2, 2.3.3, 2.3.4, 2.3.5 i 2.3.6). U paragrafu 2.5 proučava se slobodne *L* polugrupe i neki njenih podvarieteta. U poragrafu 2.6 broj a(*L*,n) odredjen u 2.5 dobija drugi oblik.

U četvrtom delu proučavaju se *D* polugrupe. U paragrafu 3.1 opisuje se struktura *D* polugrupa u kome se vidi da *D* polugrupa je poddirektno razloživa kao jedna polugrupa idempotenta i jedna *A* polugrupa, tako da u paragrafu 3.4 daju se konstrukcija *D* polugrupe i potrebni i dovoljni uslovi da *D* polugrupa bude splei. U paragrafu 3.2 proučava se slobodna *I∩D* polugrupa. U paragrarafu 3.3.proučava se konstrukcija slobodne *D* polugrupe preko slobodne komutativne polugrupe idempotenta i dva njena homomorfizma.

Ističemo da su u I, II i III svi stavovi dati sa dokazom, originalni.

Većina rezultata prikazana su u katedru olgebre fakulteta Matematike-Fizike Univerziteta Karlovo u Pragu (ČSSR) gde sam boravio godine 1988.

Sa posebnim zadovoljstvom zahvaljujem se Dr. Tomašu Kepke iz Prage, Dr. Georgi Čuponu iz Skopje, Dr. Ejupu Hamitiju iz Prištine i Dr. Smile Markovskom iz Skopje na pomoći i podršci u radu.

0. U V O D

Termin polugrupa prvi put se pojavio u knjigu Seguier-a (Seguier J.A. Elements de la Theorie des Groupes Abstraits, Paris, 1904).

Prvi radovi iz teorije polugrupa bili su objavljeni 1905 od Dickson-a (Dickson L.E. On semi-groups and the general isomorphism betwen infinite groups, Trans. Amer. Math. Soc. 6, 205-208). Godine 1928 pojavljuju se važni radovi Suškevića. Rezultati Suškevića nisu bili podobni za primenu, tako da to je usavršio Rees godine 1940 uvodjenjem pojma matrice nad grupom sa nulom. Teoriji polugrupa je posvečena čitava jedna glava knjige Bruck-a (Bruck R. A Survey of Binary Systems, Ergebnisse, 1958). U knjizi Hille-a (Hille E., Functional Analysis and Semigroups, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1948) razmatra se analitička teorija polugrupa i njene primene u analizi.

Knjigu posvečenu sistematskog izloženja algebarske teorije polugrupa objavio je Ljapin (Ljapin E.S. Polugrupi, Moskva, 1960).

U donašnje vreme ima niz knjiga posvečena teoriji polugrupa a medju njima valja napomenuti monografije [1], [2], [8], [13], [17] i [18].

U ovoj doktorskoj disertaciji korističemo terminologiju koja je koriščena u [1], [2] i [13].

0.1. ELEMENTARNI POJMOVI

Grupoid $(S,\cdot)$ naziva se polugrupa ako zadovoljava identitet

$$(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z) \quad \text{za sve} \quad x, y, z \in S$$

tj. ako je operacija „·" asociativna.

U buduće operaciju „·" podrazumevaćemo sem u izuzetnim slučajevima kada postoji oposnost od konfuzije, tako da u mesto obeležja polugrupe $(S,\cdot)$ uzećemo samo polugrupa S.

Polugrupa S je komutativna ako zadovoljava identitet

$$xy = yx, \quad \text{za sve} \quad x, y \in S$$

Polugrupa S je medialna ako zadovoljava identitet

$$xaby = xbay, \quad \text{za sve} \quad x, a, b, y \in S.$$

Polugrupa S je levo distributivna ako zadovoljava identitet

$$xyz = xyxz, \quad \text{za sve} \quad x, y, z \in S.$$

Polugrupe S je distributivna ako zadovoljava i identitet

$$xyz = xyxz,\ yzx = yxzx, \quad \text{za sve} \quad x, y, z \in S.$$

Card (S) nazivamo red polugrupe S, gde card (S) je kardinalni broj od S.

Ako polugrupa S ima element 1 i ako zadovoljava identitet

$$x = x1 = 1x, \quad \text{za sve} \quad x \in S$$

onda S nazivamo polugrupa sa jedinicom ili monoid.

Ako polugrupa S sadrži najmanje dva elementa i sadrži element 0 tako da

$$xo = ox = o, \quad \text{za sve} \quad x \in S$$

onda kažemo da 0 je nula element od S i S je polugrupa sa nulom.

Polugrupa S za koju je card (s) = 1 naziva se trivialna polugrupa.

Polugrupa S naziva se kvazitrivialna ako zadovoljava relaciju

$$xy \in \{x,y\}, \quad \text{za sve} \quad x, y \in S.$$

Polugrupa S koja zadovoljava identitet

$$xy = x, \quad \text{za sve} \quad x, y \in S$$

naziva se polugrupa levih nula. Analogno polugrupa S koja zadovoljava identitet $xy = y$ za sve $x, y \in S$ naziva se polugrupa desnih nula.

Polugrupu S sa nulom 0 zvaćemo polugrupa sa nulom multiplikacijom ako zadovoljava identitet

$$xy = 0 \quad \text{za sve} \quad x, y \in S.$$

Element x polugrupe S naziva se idempotent ako zadovoljava

$$xx = x$$

Ako svaki element polugrupe S je idempotent, onda kažemo da S je polugrupa idempotenata.

Polugrupa S koja zadovoljava relaciju

$(\forall x \in S),\ xS = S$

naziva se leva grupa, dualno se definiše desna grupa.

Polugrupa S koja je leva i desna grupa naziva se grupa.

Neka je G- grupa onda $G^0 = G \cup \{0\}$ je polugrupa. G^0 nazivamo 0- grupa.

0.1.1. Teorema ([13]). Polugrupa S sa nulom je

(i) 0 - leva grupa akko $(\forall x \in S \setminus \{0\})\ xS = S$

(ii) 0 - desna grupa akko $(\forall x \in S \setminus \{0\})\ Sx = S$

(iii) 0 - grupa akko $(\forall x \in S \setminus \{0\})\ xS = Sx = S$ ▲

Neprazan podskup T polugrupe S naziva se podpolugrupa od S ako zadovoljava

$(\forall x,y)(x,y \in T \Rightarrow xy \in T)$

Iz ove definicije sledi T je podpolugrupa od polugrupe S ako $TT \subset T$/

Od interesa su one podpolugrupe polugrupe S koje su grupe. Podpolugrupa koja je grupa naziva se podgrupa polugrupe S.

0.1.2. Lema ([13]) Neprazan podskup T polugrupe S je podgrupa od S akko

$(\forall x \in T)xT = Tx = T$ ▲

Neprazan podskup A polugrupe S naziva se levi ideal ako $SA \subset A$, desni ideal ako $AS \subset A$ i (dvostrani) ideal ako je i levi i desni ideal. Očigledno je da svaki ideal polugrupe S je podpolugrupa od S dok obratno ne važi.

Polugrupa S naziva se levo (desno) prosta ako je S jedinstveni levi (desni) ideal. Polugrupa S naziva se prosta polugrupa ako je S jedinstveni ideal od S.

Ako je A neprazan podskup polugrupe S onda presek svih levih ideala od S koji sadrže A(S-je jedan od takvih ideala) je levi ideal koji sadrži A i koji se sadrži u svaki drugi ideal sa tom svojstvom. To nazivamo levi ideal generisan skupom A i jednak je sa $A \cup SA$. Dualno desni ideal polugrupe S generisan skupom A jednak je sa $A \cup AS$ i ideal polugrupe S generisan skupom A jednak je sa $A \cup SA \cup AS \cup SAS$. Ako je card (A) = 1, onda $L(a) = S \cup Sa$, $R(a) = aS \cup S$ i $J(a) = S \cup aS \cup Sa \cup SaS$ gde $a \in A$, nazivaju se glavni levi, desni i dvostrani ideal polugrupe S, generisani sa a.

0.1.3. Lema ([1]) Polugrupa S je

(i) levo prosta akko $(\forall x \in S)\ Sx = S$

(ii) desno prosta akko $(\forall x \in S)\ xS = S$

(iii) prosta akko $(\forall x \in S)\ xS = S = Sx$ ▲

Neka je f preslikovanje polugrupe S u polugrupu T onda kažemo da f je homomorfizam ako

$$(\forall x,y \in S)\ f(xy) = f(x)f(y)$$

Ako je f jedan-jedan onda f se naziva monomorfizam, ako je f jedan-jedan i na onda f se naziva izomorfizam. Homomorfizam od S u S naziva se endomorfizam i izomorfizam od S u S naziva se automorfizam. Ako postoji izomorfizam f od S na T onda kažemo da S i T su izomorfne i obeležimo na sledeći način $S \cong T$.

Neka su I i Λ proizvoljni neprazni skupovi i neka je na $I \times \Lambda$ definisana asociativna operacija

$$(a,b)(c,d) = (a,d) \text{ za sve } a,c \in I,\ b,d \in \Lambda.$$

Skup $I \times \Lambda$ naziva se ortogonalna traka. Ako je card(Λ) = 1 onda $I \times \Lambda$ je polugrupa levih nula i ako je card(I) = 1 onda $I \times \Lambda$ je polugrupa desnih

0.1.4. Teorema ([13]) Polugrupa je izomorfna sa ortogonalnom trakom akko je izomorfna sa direktnim proizvodom polugrupe levih nula i polugrupe desnih nula ▲

Neka je S polugrupa onda sa Id(S) obeležavamo skup idempotenta polugrupe S tj.

$$Id(S) = \{x \in S \mid xx = x\}$$

Neka su $e, f \in Id(S)$ onda

$$e \leqslant f \quad \text{akko} \quad ef = fe = e$$

Idempotent e polugrupe S naziva se primitivan ako nije nula i ako je minimalan u skupu ne nula idempotenta.

Polugrupa S naziva se kompletno prosta ako je prosta i sadrži primitivan idempotent.

Polugrupa S naziva se ortogonalna grupa ako je izomorfna sa direktnim proizvodom jedne grupe i jedne ortogonalne trake.

0.1.5. Teorema ([15]). Polugrupa S je ortogonalna grupa akko je kompletno prosta polugrupa u kojoj Id(S) je podpolugrupa od S ▲

Polugrupa S naziva se levo (desno) kancelativna ako iz $xa = xb (ax = bx)$ za sve $x \in S$, sledi $a = b$ $(a,b \in S)$. Polugrupa S naziva se kancelativna polugrupa ako je levo i desno kancelativna. Polugrupa S naziva se slabo kancelativna ako iz $xa = xb$ i $ax = bx$ za sve $x \in S$ sledi da $a = b$ $(a, b \in S)$.

0.2. KONGRUENCIJE

Neka je S polugrupa i ρ relacija na skupu S onda ρ naziva se levo saglasna ako

$$(a,b)\in\rho \Rightarrow (ca,cb)\in\rho \quad \text{za sve} \quad a,b,c\in S$$

desno saglasna ako

$$(a,b)\in\rho \Rightarrow (ac,bc)\in\rho \quad \text{za sve} \quad a,b,c\in S$$ i saglasna ako

$$(a,b)\in\rho \Rightarrow cc,d)\in\rho \Rightarrow (ac,bd)\in\rho \quad \text{za sve} \quad a,b,c,d\in S.$$

Levo (desno) saglasna ekvivalencija naziva se leva (desna) kongruencija. Saglasna ekvivalencija naziva se kongruencija.

0.2.1. Lema ([13]). Relacija ρ polugrupe S je kongruencija akko je leva i desna kongruencija ▲

Ako je ρ kongruencija polugrupe S onda sa $a\rho$ obeležimo klasu kongruencije elementa $a\in S$. Na faktor skupu S/ρ definišemo binarnu operaciju na sledeći način:

$$(a\rho)(b\rho) = (ab)\rho \tag{1}$$

Prirodno preslikavanje π_ρ od S na S/ρ definisana sa

$$\pi_\rho(a) = a\rho \quad (\text{za sve } a\in S) \tag{2}$$

je homomorfizam.

0.2.2. Lema ([13]). Ako je ρ kongruencija polugrupe S, onda S/ρ je polugrupa u odnosu na operaciju definisano sa (1) i preslikavanje $\pi_\rho : S \to S/\rho$ definisana sa (2) je homomorfizam. Ako je $f:S \to T$ homomorfizam, gde S i T su polugrupe, onda relacija

$$\mathrm{ker}f = f^{-1}\circ f = \{(a,b)\in S\times S \mid f(a) = f(b)\}$$

je kongruencija na S i postoji monomorfizam $\alpha: S/\mathrm{ker}f \to T$ tako da $\alpha(S/\mathrm{ker}f) = f(S)$ i diagram

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_{\mathrm{ker}f}"'] & T \\ S/_{\mathrm{ker}f} \arrow[ur, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

komutira.▲

0.2.3. Teorema ([13]). Neka su ρ, σ kongruencije na polugrupu S tako da $\rho \subset \sigma$. Onda

$$\sigma/\rho = \{(x\rho, y\rho)\in S/\rho\times S/\rho \mid (x,y)\in\sigma\}$$

je kongruencija na S/ρ i $(S/\rho)/(\sigma/\rho) \cong S/\sigma$ ▲

Pod dekompozicijom polugrupe S podrazumevamo njeno razbijanje kao uniju nepresečnih podpolugrupa $S_\alpha (\alpha\in\Omega)$. Dekompozicijom dobijaju se podpolugrupe S_α specialnog tipa koja nam omogučuje lakše proučavanje polugrupe S. Očigledno je da kongruencija polugrupe S razbija nju na podpolugrupe koje predstavljaju klase kongruencije.

Pretpostavimo da se $S = \cup\{S_\alpha \mid \alpha\in\Omega\}$ takva dekompozicija polugrupe S, da za svaki par $\alpha,\beta\in\Omega$ postoji element $\gamma\in\Omega$, tako da je $S_\alpha S_\beta \subset S_\gamma$. Definišemo binarnu operaciju na Ω na sledeći način:

$$\alpha\beta = \gamma \quad \text{ako} \quad S_\alpha S_\beta \subset S_\gamma$$

Lako je videti da je Ω traka u odnosu na tu operaciju. Kažemo da je S unija trake Ω polugrupa S_α. Preslikavanje definisana sa:

$$f(a) = \alpha, \text{ ako } a \in S_\alpha$$

je homomorfizam polugrupe S na Ω i podpolugrupa S_α je klasa kongruencije od kerf. Obratno, ako je f homomorfizam polugrupe S na traku Ω onda $S_\alpha = f^{-1}(\alpha)$ za sve $\alpha\in\Omega$ je podpolugrupa polugrupe S i S je traka Ω polugrupa $S_\alpha(\alpha\in\Omega)$. Ako je Ω komutativna, onda S se naziva unija polumreže Ω - polugrupa $S_\alpha(\alpha\in\Omega)$.

0.3. SLOBODNE POLUGRUPE

Neka je A neprazan skup, obeležimo sa F[A] skup svih reči $a_1a_2 \ldots a_m$ nad alfabetom A. Binarna operacija na F[A] definisana je na sledeći način.

$$(a_1a_2 \ldots a_m)(b_1b_2 \ldots b_n) = a_1a_2 \ldots a_mb_1b_2 \ldots b_n$$

Skup F[A] u odnosu na definisanu operaciju naziva se slobodna polugrupa nad A, card(A) nazivamo rang od F[A].

0.3.1. Teorema ([13]). Neka je A neprazan skup i S jedna polugrupa. Ako je $f:A\to S$ jedno proizvoljno preslikavanje onda postoji jedinstveni homomorfizam $g:F[A]\to S$ tako da $g/A=f$▲

Na osnovu teoreme 0.3.1 imamo da $S \cong F[A]/\ker g$.

Ako je $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ konačan i ako kongruencija ρ na F[A] je generisana konačnim skupom

$$R = \{(w_1,z_1), \ldots, (w_r,z_r)\}$$

elemenata $(w_i,z_i)\in F[A]\times F[A]$ onda kažemo da $F[A]/_\rho$ je konačno predstavljiva i pišemo

$$F[A]/_\rho = \langle a_1, \ldots, a_n | w_1 = z_1, \ldots, w_r = z_r\rangle .$$

Kažemo da $F[A]/_\rho$ ima sistem slobodnih generatora $a_1, \ldots, a_n$ i relacije koje je definišu $w_1 = z_1, \ldots, w_r = z_r$.

0.4. VARIETETI POLUGRUPA

Neka je A proizvoljan skup i F[A] slobodna polugrupa nad A. Neka je S jedna polugrupa. Ako su $p,q \in F[A]$, onda kažemo da polugrupa S zadovoljava jednakost $p = q$ ako $f(p) = f(q)$ za svaki homomorfizam $f:F[A] \to S$.

Klasu polugrupa koje zadovoljavaju jednakosti

$$p_1 = q_1, \quad p_2 = q_2, \ldots$$

nazivamo varietetom polugrupa odredjenom datim jednakosmim relacijama.

Variete odredjen jednakosnim relacijama $p_1 = q_1$, $p_2 = q_2$, ... obeležićemo ga sa $\mathrm{Mod}(p_1 = q_1, p_2 = q_2, \ldots)$.

Neka je R skup jednakosnih relacija. Odgovarajući variete obeležićemo ga sa Mod(R).

Presek neprazne kolekcije varieteta $V_i (i \in I)$ je variete. Ako je $V_i = \mathrm{Mod}(R_i)$ onda

$$\cap\{V_i \mid i \in I\} = \mathrm{Mod}(\cup\{R_i \mid i \in I).$$

Unija neprazne kolekcije varieteta $V_i (i \in I)$ ne mora da bude varietet.

0.4.1. Teorema ([13]). Neprazna klasa polugrupa V je variete akko

(i) Svaka podpolugrupa od polugrupe iz V je u V.

(ii) Svaka homomorfna slika polugrupe iz V je u V.

(iii) Direktni proizvod familije polugrupa iz V je u V ▲

0.4.2. Teorema ([*13*]). Neka je S polugrupa sa familijom kongruencija $\{\rho_i | i \in I\}$ za koje važi

$$\cap\{\rho_i | i \in I\} = \Delta_S$$

onda S je izmorfna sa poddirektnim proizvodom polugrupa S/ρ_i ▲

0.4.3. Toerema ([*13*]). Neprazna klasa polugrupa *V* je variete ako i samo ako

(i) Svaka homomorfna slika polugrupe iz *V* je u *V*.

(ii) Svaki pod direktni proizvod familije polugrupa iz *V* je u *V* ▲

I. MEDIALNE I POLUMEDIALNE POLUGRUPE

U ovom delu naveščemo neke rezultate medialnih polugrupa koje su date u [11], [14], [15], [17], [18], [19], [25], [26], [27], [31], [32], [33] i [34]. A zatim dokazačemo nekoliko tvrdjenja u vezi polumedialnih polugrupa i to u paragrafima 1.4, 1.5 i 1.6.

1.1. MEDIALNE POLUGRUPE

Polugrupa S naziva se medialna ako zadovoljava identitet

$xaby = xbay$ za sve $x,a,b,y \in S$

1.1.1. Lema ([14]). Za medialnu polugrupu S važi

(i) $(\forall x,y \in S)(\forall n \in N)((xy)^n = x^n y^n)$

(ii) $(\forall x \in S)(\forall n \in N)((SxS)^n = S^n x^n S^n)$ ▲

Polugrupa S naziva se archimedova ako

$(\forall a,b \in S)(\exists n \in N)(a^n \in SbS \wedge b^n \in SaS)$

Podskup A polugrupe S naziva se root u S ako

$(\forall a \in S)(\exists n \in N)(a^n \in A)$

Polugrupa S naziva se rooted ako sadrži idempotente i ako unija svih njenih podgrupa je root u S.

1.1.2. Lema ([14]). Polugrupa S je Archimedova akko svaki njen ideal je root u S ▲

1.1.3. Teorema ([14]). Polugrupa S je Archimedova i sadrži idempotente akko sadrži ideal K koji je prosta polugrupa idempotenta i root u S ▲

1.1.4. Lema ([14]). Polugrupa S je Archimedova i rooted akko sadrži ideal K koji je kompletno prosta polugrupa i root u S ▲

1.1.5. Lema ([14]). Neka je S Archimedova polugrupa i rooted. Onda za bilo koje idempotente e i f od S, eS je desna grupa Sf je leva grupa i eSf je grupa ▲

Polugrupa S naziva se desno Archimedova ako zadovoljava:

$$(\forall a,b\in S)(\exists n\in N)(a^n\in bS\wedge b^n\in aS).$$

1.1.6. Teorema ([14]). Polugrupa S je desno Archimedova i sadrži idempotente akko sadrži ideal koji je desna grupa i root u S ▲

1.1.7. Lema ([14]). Ako je S desno Archimedova polugrupa koja sadrži idempotente e i f, onda eT je desna grupa i Te = fTe je grupa. Šta više Id(s) je polugrupa desnih nula i eT ≅ Te x d(S) za sve e∈ d(S) ▲

Neka je S jedna polugrupa onda closet c(a), a∈S, definišemo na sledeći način

$$C(a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} Sa^n S$$

Ako je S komutativna polugrupa onda

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} Sa^n S = \bigcap_{n=1}^{\infty} a^n S$$

1.1.8. Teorema([31]). Ako je S medialna Archimedova polugrupa bez idempotente, onda

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} Sa^n S = \Phi \quad \text{za sve} \quad a \in S \ \blacktriangle$$

1.1.9. Lema ([31]). Medialna prosta polugrupa sadrži najmanje jedan idempotent ▲

1.1.10. Teorema ([31]). Polugrupa S je medialna i prosta akko S je izomorfna sa direktnim proizvodom jedne Abelove grupe i jedne ortogonalne trake ▲

1.1.11. Teorema ([14]). Neka je S medialna polugrupa. S je Archimedova polugrupa koja sadrži idempotente akko S sadrži ideal J koji je ortogonalna grupa i root u S ▲

1.1.12. Lema ([14]). Neka su S i J kao u teoremu 1.1.11. Onda Id(S) je ortogonalna traka, eSf je abelova grupa za sve $e,f \in Id(S)$ i $J \cong eSf \times Id(S)$ za sve $e,f \in Id(S)$ ▲

1.1.13. Lema ([14]). Neka su S, J i Id(S) kao u teoremu 1.1.12. Onda postoji kongruencija ρ u S tako da $S/_\rho$ je izomorfna sa ortogonalnom trakom Id(S) i svaka kongruencijska klasa $S_e(e \in Id(S))$ od ρ sadrži ideal G_e koji je abelova grupa i root u polugrupu S_e ▲

1.2. DEKOMPOZICIJA MEDIALNE POLUGRUPE

Neka je S jedna polugrupa. Kongruencija τ polugrupe S naziva se polumrežna kongruencija ako je S/τ polumreža.

U svaku polugrupu S postoji največa i jedinstvena polumrežna kongruencija. Obeležićemo je sa σ_S.

1.2.1. Teorema ([14]). Neka je S medialna polugrupa i neka je u S definisana σ_S na sledeći način:

$$(\forall a,b\in S)(a\sigma_S b \Leftrightarrow (\exists n\in N)(a^n\in SbS\wedge b^n\in SaS)$$

Onda σ_S je največa polumrežna kongruencija u S i kongruencijske klase od σ_S su medialne Archimedove polugrupe ▲

Za medialnu polugrupu S kongruencijske klase od σ_S nazivaćemo ih Archimedovim komponentama i $S = \cup\{S_\alpha|\alpha\in Y\}$ gde je $Y = S/\sigma_S$ i $S_\alpha S_\beta\subset S_{\alpha\beta}$, tj. S je unija polumreže Y polugrupa $S_\alpha,\alpha\in Y$.

Polugrupa S naziva se levo separativna ako zadovoljava

$$(\forall x,y\in S)(x^2 = xy\wedge y^2 = yx \Rightarrow x = y)$$

desno separativna ako zadovoljava

$$(\forall x,y\in S)(x^2 = yx\wedge y^2 = xy \Rightarrow x = y)$$

i separativna ako zadovoljava

$$(\forall x,y\in S)(x^2 = xy = y^2 \Rightarrow x = y)$$

Kongruencija ξ polugrupe S naziva se (levo, desno) separativna kongruencija ako je S/ξ (leva, desna) separativna polugrupa.

1.2.2. Teorema ([14]). Ako je S medialna polugrupa sa archimedovim komponentama $S_\alpha(\alpha\in Y)$. Onda:

(i) S je separativna akko svaki S_α je slabo kancelativna

(ii) S je levo (desno) separativna akko svaki S_α je levo (desno) kancelativna.

(iii) S je levo i desno separativna akko svaki S_α je kancelativna ▲

1.2.3. Lema ([14]). Neka je S medialna slabo kancelativna polugrupa. Definišemo relaciju η u polugrupu $S^* = S\times S\times S$ na sledeći način:

$$(a,b,c)\eta(a',b',c') \Leftrightarrow cab'c' = c'a'bc$$

Onda relacija η je kongruencija u S^*, S^*/η je ortogonalna grupa i preslikavanje $\varphi: S \to S^*/\eta$ definisana sa $\varphi(a) = (a,a^2,a)\eta$ je izomorfizam ▲

1.2.4. Teorema ([14]). Medialna polugrupa S može se potopiti u polugrupu koja je unija grupa akko S je seperativna ▲

1.3. SLOBODNA MEDIALNA POLUGRUPA

Neka je (S,+) komutativna polugrupa, φ i ψ njeni homomorfizmi koji zadovoljavaju uslove (1):

$$\varphi^2 = \varphi, \ \psi^2 = \psi \ \text{ i } \ \varphi\psi = \psi\varphi \tag{1}$$

$t_o\in S$ gde $\varphi(t_o) = \psi(t_o)$ ili t_o je slobodan simbol, u S definišemo multiplikaciju na sledeći način:

$$ab = \varphi(a)+\psi(b)+t_o \quad \text{za sve} \quad a,b\in S \tag{2}$$

1.3.1. Lema ([25]). $(S,\cdot)$ sa operacijom (2) je medialna polugrupa ▲

U daljem izlaganju daje se konstrukcija slobodne medialne polugrupe $S = S[x_i, i\in I]$.

Razmatramo slobodnu komutativnu polugrupu $(F,+) = (F[a_i,b_i,c_i,d_i ; i\in I],+)$. Definišemo φ i ψ na sledeći način

$$\varphi = \begin{pmatrix} a_i & b_i & c_i & d_i \\ b_i & b_i & d_i & d_i \end{pmatrix}$$
$$\psi = \begin{pmatrix} a_i & b_i & c_i & d_i \\ c_i & d_i & c_i & d_i \end{pmatrix} \tag{*}$$

za sve $i\in I$.

1.3.2. Lema ([25]). Homomorfizmi φ i ψ zadovoljavaju uslove (1). $(F,\cdot)$ sa operacijom (2) je medialna polugrupa (t_0 je slobodno izabran simbol) ▲

1.3.3. Lema ([25]). $(F[a_i, i\in I],\cdot)$ je slobodna medialna polugrupa sa sistemom generatora $\{a_i\}$, $i\in I$ ▲

Očigledno je da smo konstrukciju slobodne medialne polugrupe izveli preko slobodne komutativne polugrupe i dva njena homomorfizma.

Vidi se da ako želimo konstruisati slobodnu medialnu polugrupu ranga 2 preko slobodne komutativne polugrupe i dva njena homomorfizma, onda sistem generatora komutativne polugrupe mora da bude sačinjen od četiri elemenata. Naime, ako je $(F,+) = (F[a,b,c,d], +)$ slobodna komutativna polugrupa, onda $(F,\cdot) = (F[a,c],\cdot)$ je slobodna medialna polugrupa gde su φ i ψ dati sa

$$\varphi = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & b & c & d \end{pmatrix}$$

$$\psi = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & d & d \end{pmatrix}$$

i zadovoljavaju se uslovi (1). Multiplikaciju definišemo na sledeći način

$$w_1 w_2 = \varphi(w_1)+\psi(w_2) \quad \text{za sve} \quad w_1,\ w_2 \in F[a,c].$$

Gornje tvrdjenje dokazuje sledeća lema

1.3.4. Lema ([25]). Neka je $(S,+)$ slobodna komutativna polugrupa i φ, ψ njeni homomorfizmi koji zadovoljavaju (1), onda $(S,\cdot)$ je slobodna medialna polugrupa čiji je rang veći od jedan ▲

Poznato je da medialna polugrupa definisana preko komutativne polugrupe φ, ψ i uslova (1) i (2) zadovoljava implikaciju

$$ab = cd \Rightarrow axb = cxd \tag{3}$$

i da svaka medialna polugrupa koja zadovoljava (3) je podpolugrupa medialne polugrupe konstruisane lemom 1.3.1.

U nastavku izložićemo konstrukciju medialne polugrupe koja zadovoljava uslov (3).

Neka je $(\{x_i\}, i\in I;\cdot)$ medialna polugrupa koja zadovoljava (3). Definišemo relacije $\tilde{l}$, $\tilde{r}$, $\tilde{t}$ na sledeći način:

$$x_j \underset{l}{\sim} x_k \Leftrightarrow \begin{cases} x_j = x_k \text{ ili za neki } y_1,\ldots,y_n\in X, n>1 \text{ i} \\ \text{permutaciju } \pi \text{ od brojeva } 2,3,\ldots,n \\ x_j = y_1\ldots y_n \text{ i } x_k = y_1 y_{\pi(2)}\ldots y_{\pi(n)} \end{cases}$$

$$x_j \underset{r}{\sim} x_k \Leftrightarrow \begin{cases} x_j = x_k \text{ ili za neki } y_1,\ldots,y_n\in X,\ n>1 \text{ i} \\ \text{permutaciju } \pi \text{ od brojeva } 1,\ldots,n-1 \\ x_j = y_1\ldots y_n,\ x_k = y_{\pi(1)}\ldots y_{\pi(n-1)}y_n \end{cases}$$

$$x_j \underset{t}{\sim} x_k \Leftrightarrow \begin{cases} \text{za neki } y_1,\ldots,y_n\in X,\ n\geq 1 \text{ i permutaciju} \\ \text{od brojeva } 1,\ldots,n \\ x_j = y_1\ldots y_n \text{ i } x_k = y_{\pi(1)}\ldots y_{\pi(n)} \end{cases}$$

1.3.5. Lema ([26])(i) Relacije $\underset{l}{\sim}$, $\underset{r}{\sim}$, $\underset{t}{\sim}$ su refleksivne, simetrične i saglasne u odnosu na datu multiplikaciju

(ii) $\underset{r}{\sim} \subset \underset{t}{\sim}$ i $\underset{l}{\sim} \subset \underset{t}{\sim}$

(iii) $x_j \underset{l}{\sim} x_k \Rightarrow x_j y = x_k y$ za sve $y\in X$

$x_j \underset{r}{\sim} x_k \Rightarrow yx_j = yx_k$ za sve $y\in X$

$x_j \underset{t}{\sim} x_k \Rightarrow x_j y \underset{r}{\sim} x_k y$ i $yx_j \underset{l}{\sim} yx_k$ za sve $y\in X$▲

Tranzativnom zatvorenjem pomenutih relacija dobijamo kongruencije. Klase ovih kongruencija elementa y obeležićemo ih sa $[y]_l$, $[y]_r$ i $[y]_t$

1.3.6. Lema ([26]). Za $[y_1]_l = [y_2]_l$ i $[x_1]_t = [x_2]_t$ važi $[y_1x_1]_l = [y_2x_2]_l$. Za $[x_1]_r = [x_2]_r$ i $[y_1]_t = [x_2]_t$ važi $[x_1y_1]_r = [x_2y_2]_r$. Za $[y_1]_l = [y_2]_l$ i $[x_1]_r = [x_2]_r$ važi $y_1x_1 = y_2x_2$▲

Za bilo koju medialnu polugrupu $(X,\cdot) = (\{x_i\}, i\in I, \cdot)$ neka je $F = (F,+) = (F[a_i, b_i, c_i, d_i, i\in I], +)$ slobodna komutativna polugrupa ($F\cap X = \Phi$). Elementi R,S od F su oblika

$$R = \Sigma\ \alpha_i a_i + \beta_i b_i + \gamma_i c_i + \delta_i d_i, \Sigma\alpha_i + \beta_i + \gamma_i + \delta_i \geq 1$$

Neka je $\sim$ relacija u F definisana na sledeći način:

$R \sim S \Leftrightarrow$

(1) $R = S$ ili

(2) $R = \Sigma\delta_i d_i$ i $S = \Sigma\delta'_i d_i$ gde $[\Pi x_i^{\delta_i}]_t = [\Pi x_i^{\delta'_i}]_t$ ili

(3) $R = b_h + \Sigma^*\delta_i d_i$, $S = b_j + \Sigma^*\delta'_i d_i$ gde

$[x_h \Pi^* x_i^{\delta_i}]_l = [x_j \Pi^* x_i^{\delta'_i}]_l$ ili

(4) $R = c_h + \Sigma^*\delta_i d_i$, $S = c_j + \Sigma^*\delta'_i d_i$ gde

$[(\Pi^* x_i^{\delta_i}) x_h]_r = [(\Pi^* x_i^{\delta'_i}) x_j]_r$ ili

(5) $R = b_h + c_k + \Sigma^*\delta_i d_i$, $S = b_j + c_m + \Sigma^*\delta'_i d_i$ gde

$x_h \Pi^* x_i^{\delta_i} x_k = x_j \Pi^* x_i^{\delta'_i} x_m$

Preko relacije $\sim$ definišemo relaciju $\Delta u(F,+)$ na sledeći način: Neka su

$$R = \Sigma\alpha_i a_i + \beta_i b_i + \gamma_i c_i + \delta_i d_i \quad \text{i} \quad S = \Sigma\alpha'_i a_i + \beta'_i b_i + \gamma'_i c_i + \delta'_i d_i$$

onda

$R\ \Delta\ S \Leftrightarrow$ postoje $A_1, \ldots, A_n, A'_1, \ldots, A'_n \in F$ tako

da

$$R = \sum_{i=1}^{n} A_i, \quad S = \sum_{i=1}^{n} A'_i \quad \text{i} \quad A_i \sim A'_i$$

Relacija Δ je refleksivna, simetrična i saglasna u odnos odnosu na adiciju. Tranzitivnom zatvaranjem relacije Δ dobijamo kongruenciju $\equiv u(F,+)$.

Sa $[R] = [\Sigma\alpha_i a_i + \beta_i b_i + \gamma_i c_i + \delta_i d_i]$ obeležimo klasu koja sadrži:

$$R = \Sigma\alpha_i a_i + \beta_i b_i + \gamma_i c_i + \delta_i d_i$$

1.3.7. Lema ([26]) (i) $[a] = \{a\}$

(ii) Ako $A = b_m + c_n + \Sigma^* \delta_i d_i$ i $A \equiv B$ onda $A \sim B$ ▲

Homomorfizme φ_o i ψ_o od $(F,+)$ u $(F,+)$ dati relacijama (*) (str. 23) očigledno zadovoljavaju (1) i još važi: ako $R \equiv S$ onda $\varphi_o(R) = \varphi_o(S)$ i $\psi_o(R) \equiv \psi_o(S)$.

Endomorfozmi φ_o i ψ_o indukuju endomorfizme φ i ψ u $F/\equiv$, koji zadovoljavaju uslove (1) i (*).

1.3.8. Lema ([26]). $F/\equiv$ je medialna polugrupa sa multiplikacijom

$$[R]\,[S] = [\varphi(R)] + [\psi(S)] \; ▲$$

Neka je $x_h \Pi^* x_i^{\delta_i} x_k = x_n$. Klasu $[b_h + c_k + \Sigma^* \delta_i d_i]$ obeležićemo sa T_n.

1.3.9. Teorema ([26]) (i) Skup

$$T = \{[a_i] \mid x_j \in X^2\} \cup (\cup T_n)$$

je medialna podpolugrupa od $(F/\equiv, \cdot)$

(ii) Preslikavanje

$$\varepsilon(x_j) = \begin{cases} [a_j] & \text{ako } x_j \in X^2 \\ T_j & \text{ako } x_j \in X^2 \end{cases}$$

je izomorfizam od X u $T \subset F/\equiv$ ▲

1.3.10. Teorema ([26]). Neka je $X = (\{x_i\}, i \in I, \cdot)$ medialna Archimedova polugrupa. Onda $(F/\equiv, \cdot)$ je medialna Archimedova polugrupa ▲

1.4. POLUMEDIALNE POLUGRUPE

Polugrupa S naziva se levo (desno) polumedialna ako zadovoljava identitet

$$aabc = abac(bcaa = baca)$$

Za sve $a,b,c \in S$.

Polugrupa S naziva se polumedialna ako je levo i desno polumedialna polugrupa.

1.4.1. Lema. Ako je S medialna polugrupa onda S je polumedialna polugrupa.

Dokaz: je očigledan i sledi na osnovu definicije ▲

Na osnovu leme 1.4.1 vidimo da polumedialnost je uopštenje medialnosti.

1.4.2. Lema. Neka je S polumedialna polugrupa onda važe;

(i) $(\forall x,y \in S)(\forall n \in N)((xy)^n = x^n y^n)$

(ii) $(\forall x \in S)(\forall n \in N)((SxS)^n = S^n x^n S^n)$

Dokaz: (i) $(xy)^n = (xy)(xy)^{n-1} =$

$$= \underbrace{(xy)(xy)\ \dots (xy)}_{n\text{-}puta} = x^2y^2\underbrace{xy\ \dots\ xy}_{n\text{-}2\text{-}puta} =$$

$$= \dots = x^n y^n$$

(ii) Za $n = 2$, $(SxS)^2 = SxSSxS = SxSxSS = S^2x^2S^2$

Pretpostavimo da važi za $n = k$ tj. $(SxS)^k = S^k x^k S^k$

onda

$$(SxS)^{k+1} = (SxS)^k(SxS) = S^k x^k S^k SxS = S^{k+1}x^{k+1}S^{k+1}\ ▲$$

1.4.3. Lema. Ako je S polugrupa tako da $S=Id(S)$ onda sledeći uslovi su ekvivalentni

(i) S je medialna

(ii) S je polumedialna

Dokaz: Očigledan na osnovu definicije ▲

1.4.4. Teorema. Neka je S polumedialna polugrupa. S je ardhimedova polugrupa koja sadrži idempotente ako i samo ako S sadrži ideal J koji je ortogonalna grupa i root u S.

Dokaz: ($\Rightarrow$) Neka je S Archimedova polugrupa koja sadrži idempotente. Na osnovu teoreme 1.1.3 S sadrži ideal J koji je root u S. Neka su e i f idempotenti iz J za koje važi $ef = fe = e$. Kako je J- prost $f = xey$ za neki $x,y\in J$. Dakle

$$f = f^2 = xeyf = x\,e^2yf = xeyef = fef = ef = e$$

to znači svaki idempotent od J je primitivan na taj način J je kompletna prosta polugrupa. Idempotenti polumedialne polugrupe su oblika podpolugrupe. Na osnovu teoreme 0.1.5 J je ortogonalna grupa.

Obratan dokaz je trivialan i sledi neposredno na osnovu teoreme 1.1.3 ▲

1.4.5. Lema. Neka je S i J kao u teoremu 1.4.4. Onda $Id(S)$ je ortogonalna traka, eSf je grupa za sve $e,f\in Id(S)$ i $J \cong eSf\times Id(S)$ za sve $e,f\in Id(S)$.

Dokaz: Svi idempotenti od S pripadaju J tj. $Id(S)\subset J$. Ako je $J \cong G\times\Gamma$, G- grupa i Γ je ortogonalna traka onda $\Gamma \cong Id(J)$. Znači $Id(S)$ je izomorfna sa ortogonalnom trakom Γ. Kako S je rooted, eSf za sve $e,f\in Id(S)$ je grupa na osnovu leme 1.1.4.

Na osnovu leme 1.1.4 imamo takodje da je $eSf = eJf$, $eJf \approx G$ i $J \approx eSf\times Id(S)$ za sve $e,f\in Id(S)$ ▲

1.4.6. Lema. Neka su S i J kao u teoremu 1.4.4. Onda postoji kongruencija ρ u S tako da S/ρ je izomorfna sa ortogonalnom trakom Id(S) i svaka kongruencijska klasa $S_e (e\in Id(S))$ od ρ sadrži ideal G_e koji je grupa i root u polugrupu S_e.

Dokaz: Kako je J izomorfna sa direktnim proizvodom $G\times E$ grupe G i ortogonalne trake Id(S), onda J je disjunktna unija grupa G_e gde

$$G_e = \{(g,e) \mid g\in G\}.$$

Neka je

$$S_e = \{a\in S \mid a^n\in S_e \quad \text{za neki} \quad n\in N\}.$$

Kako su G_e disjunktne podpolugrupe i kako $J = \cup G_e$, $e\in Id(S)$, je root u S, onda S_e indukuje relaciju ekvivalencije ρ u S. Dokažimo saglasnost relacije ρ. Neka je a^n, $b^m\in G_e$ i $d\in S$. Tada $d^p\in G_f$ za neki $f\in Id(S)$ i $p\in N$. Odakle sledi:

$$(ad)^{np} = a^{np}d^{pn}\in G_eG_f \subset G_{ef}$$

Analogno $(bd)^{mp}\in G_{ef}$. Prema tome, $ad\rho bd$. Na analogan naćin dobijamo da je $da\rho db$. Da je S/ρ izomorfna sa Id(S) sledi iz činjenice da je Id(S) reprezentativni sistem za kongruenciju ρ.

Neka je S_e kongruencijska klasa od ρ i $S_e\cap J = G_e$. Kako je J ideal u S to G_e je ideal u S_e. Iz definicije za S_e sledi da je G_e root u S_e ▲

1.5. DEKOMPOZICIJA POLUMEDIALNE POLUGRUPE

1.5.1. Teorema. Neka je S polumedialna polugrupa. U S u kojoj je definisana relacija σ_S na sledeči način:

$$(\forall a,b\in S)(a\sigma_S b \Leftrightarrow (\exists n\in N)(a^n\in SbS \wedge b^n\in SaS)$$

Onda je σ_S polumrežna kongruencija i klase kongruencije od σ_S su polumedialne archimedove polugrupe.

Dokaz: Definišemo relaciju ρ u S na sledeći način:

$$a\rho b \Leftrightarrow (\exists n\in N)(a^n\in SbS \wedge b^n\in SaS),\ a,b\in S$$

Refleksivnost i simetričnost relacije ρ su očigledne. Neka je $a\rho b$ i $b\rho c$. Onda $a^n\in SbS$, $b^n\in SaS$, $b^m\in ScS$ i $c^m\in SbS$ za neke $n,m\in N$, odnosno

$$a^{nm}\in(SbS)^m = S^m b^m S^m \subset S^m ScSS^m \subset ScS$$

$$c^{mn}\in(SbS)^n = S^n b^n S^n \subset S^n SaSS^n \subset SaS$$

odale sledi da se $a\rho c$ tj. da je ρ tranzitivna relacija.

Neka je $a\rho b$ i $d\in S$. Onda

$$(ad)^{n+1} = a^{n+1}d^{n+1}\in SbSd^{n+1} = SbdSd^n \subset SbdS$$

i

$$(bd)^{n+1} = b^{n+1}d^{n+1}\in SaSd^{n+1} = SadSd^n \subset SadS$$

što znači da je $ad\rho bd$. Analogno se dokaže da je $da\rho db$, Prema tome ρ je kongruencija na S. ρ je polumrežna kongruencija. Zaista,

$$x^4\in Sx^2S,\ (x^2)^2\in SxS$$

$$(xy)^2\in SyxS,\ (yx)^2\in SxyS$$

a to znači da je ρ polumrežna kongruencija.

Na osnovu izloženog imamo da je $\sigma_S \subset \rho$. Dokažimo da je $\rho \subset \sigma_S$. Neka je $a\rho b$ onda $a^n = ubv$ i $b^n = waz$ za neki $n\in N$ i $u,v,w,z\in S$ i

$$a\sigma_S a^n \sigma_S ubv \sigma_S ub^2 v \sigma_S uvb \sigma_S a^n b^n \sigma_S awaz$$

$$\sigma_S wa^2 z \sigma_S waz \sigma_S b^n \sigma_S b$$

a to znači da je $a\sigma_S b$ odnosno $\rho \subset \sigma_S$. Na taj način dobili smo da je $\rho = \sigma_S$. Na osnovu definicije relacije σ_S sledi da su klase kongruencije od σ_S, archimedove polugrupe ▲

Na osnovu teoreme 1.5.1 zaključujemo da se polumedialna polugrupa može relacijom σ_S dekompozirati kao unija polumedialnih archimedovih polugrupa. Odgovarajuće klase kongruencije nazivamo archimedovim komponentama.

Polugrupa S naziva se desno archimedova ako zadovoljava

$$(\forall a,b\in S)(\exists n\in N)(a^n\in bS \wedge b^n\in aS)$$

Polugrupa S naziva se levo archimedova ako zadovoljava

$$(\forall a,b\in S)(\exists n\in N)(a^n\in Sb \wedge b^n\in Sa)$$

Polugrupa S naziva se desno 2-archimedova ako zadovoljava

$$(\forall a,b\in S)(\exists n\in N)(a^n\in b^2S \wedge b^n\in a^2S)$$

Polugrupa S naziva se levo 2-archimedova ako zadovoljava

$$(\forall a,b\in S)(\exists n\in N)(a^n\in Sb^2 \wedge b^n\in Sa^2)$$

Polugrupa S naziva se 2-archimedova ako zadovoljava

$$(\forall a,b\in S)(\exists n\in N)(a^n\in Sb^2S \wedge b^n\in Sa^2S)$$

1.5.2. Lema. Neka je S jedna polugrupa. Onda

(i) Ako je S desno 2-archimedova onda S je desno archimedova

(ii) Ako je S levo 2-archimedova onda S je levo archimedova

(iii) Ako je S desno i levo 2-archimedova onda S je desno i levo archimedova

(iv) Ako je S 2-archimedova onda S je archimedova.

Dokaz: Sledi neposredno iz definicije archimedovih polugrupa ▲

Kongruencija ρ polugrupe S naziva se traka kongruencija ako je S/ρ traka tj. ako je $\mathrm{Id}(S/\rho) = S/\rho$. Maksimalnu traku kongruencije obeležićemo sa τ_S.

1.5.3. Teorema. Neka je S polumedialna polugrupa. Onda

(i) Relacija σ_r u S definirana sa

$$(\forall a,b\in S)(a\sigma_r b \Leftrightarrow (\exists n\in N)(a^n\in bS \wedge b^n\in aS))$$

je polumrežna kongruencija i klase kongruencije od σ_r su desno archimedove polugrupe.

(ii) Relacija σ_l u S definisana sa

$$(\forall a,b\in S)(a\sigma_l b \Leftrightarrow (\exists n\in N)(a^n\in Sb \wedge b^n\in Sa))$$

je polumrežna kongruencija i klase kongruencije od σ_l su levo archimedove polugrupe.

(iii) Relacija τ_r u S definisana sa

$$(\forall a,b\in S)(a\tau_r b \Leftrightarrow (\exists n\in N)(a^n\in b^2S \wedge b^n\in a^2S))$$

je traka kongruencija i klase kongruencije od τ_r su desno 2-ardhimedove polugrupe.

(iv) Relacija τ_l u S definisana sa

$$(\forall a,b\in S)(a\tau_l b \Leftrightarrow (\exists n\in N)(a^n\in Sb^2 \wedge b^n\in Sa^2))$$

je traka kongruencija i klase kongruencije od τ_l su levo 2-archimedove polugrupe.

(v) Relacija $\tau_r \cap \tau_l$ u S je traka kongruencija i klase kongruencije od $\tau_r \cap \tau_l$ su levo i desno 2-archimedove polugrupe.

(vi) Relacija σ_t u S definisana sa

$$(\forall a,b\in S)(a\sigma_t b \Leftrightarrow (\exists n\in N)(a^n\in Sb^2S \wedge b^n\in Sa^2S)$$

je maksimalna polumrežna kongruencija i klase kongruencije od σ_t su 2-archimedove polugrupe.

Dokaz: (i) i (ii) dokazuju se analogno sa dokazom teoreme 1.5.1.

(iii) Refleksivnost i simetričnost je očigledna.

Neka je $a\tau_r b$ i $b\tau_r c$ onda $a^n\in b^2S$, $b^n\in a^2S$, $b^m\in c^2S$, $c^m\in b^2S$ za neki $n,m\in N$, odakle

$$a^{nm}\in(b^2S)^m = b^{2m}S^m = (b^m)^2S^m \subset (c^2S)^2S^m \subset c^2S$$

$$c^{mn}\in(b^2S)^n = b^{2n}S^n = (b^n)^2S^n \subset (a^2S)^2S^n \subset a^2S$$

tj. $a\tau_r c$. Dakle τ_r je tranzitivna relacija.

Neka je $a\tau_r b$ i $d\in S$ onda

$$(ad)^{n+1} = a^{n+1}d^{n+1}\in b^2Sd^{n+1} = b^2d^2Sd^{n-1} \subset (bd)^2S,$$

$$(bd)^{n+1} = b^{n+1}d^{n+1}\in a^2Sd^{n+1} = a^2d^2Sd^{n-1} \subset (ad)^2S,$$

$$(da)^{n+1} = d^{n+1}a^{n+1}\in d^{n+1}b^2S = d^2b^2d^{n-1}S \subset (db)^2S \text{ i}$$

$$(db)^{n+1} = d^{n+1}b^{n+1}\in d^{n+1}a^2S = d^2a^2d^{n-1}S \subset (da)^2S.$$

Prema tome $ad\tau_r bd$ i $da\tau_r db$, što znači da je τ_r kongruencija na S.

Kako

$x^4 \in x^3 S \subset x^2 S$, $(x^2)^2 \in x^2 S$

to τ_r je traka kongruencija tj. $Id(S/\tau_r) = S/\tau_r$. Očigledno je da su klase kongruencije od τ_r desno 2-archimedove polugrupe.

(iv) se dokazuje analogno sa (iii).

(v) sledi iz (iii) i (iv)

(vi) Neka je ρ_t u S definisana sa

$a\rho_t b \Leftrightarrow (\ n\in N)(a^n \in Sb^2S \wedge b^n \in Sa^2S)$

Refleksivnost i simetričnost je očigledna.

Neka je $a\rho_t b$ i $b\rho_t c$ onda $a^n \in Sb^2S$, $b^n \in Sa^2S$, $b^m \in Sc^2S$, $c^m \in Sb^2S$ za neke $n,m\in N$, i

$$a^{nm} \in (Sb^2S)^m = S^m b^{2m} S^m = S^m (b^m)^2 S^m \subset S^m (Sc^2S)^2 S^m =$$
$$= S^{m+2} c^4 S^{m+2} \subset Sc^2S;$$
$$c^{mn} \in (Sb^2S)^n = S^n b^{2n} S^n = S^n (b^n)^2 S^n \subset S^n (Sa^2S)^2 S^n =$$
$$= S^{n+2} a^4 S^{n+2} \subset Sa^2S$$

tj. ρ_t je tranzitivna relacija.

Neka je $a\rho_t b$ i d S onda

$$(ad)^{n+1} = a^{n+1} d^{n+1}\ Sb^2Sd^{n+1} = Sb^2d^2Sd^{n-1} \subset S(bd)^2S,$$
$$(bd)^{n+1} = b^{n+1} d^{n+1}\ Sa^2Sd^{n+1} = Sb^2d^2Sd^{n-1} \subset S(ad)^2S,$$
$$(da)^{n+1} = d^{n+1} a^{n+1}\ d^{n+1}Sb^2S = d^{n-1}S(db)^2S \subset S(db)^2S \text{ i}$$
$$(db)^{n+1} = d^{n+1} b^{n+1}\ d^{n+1}Sa^2S = d^{n-1}S(da)^2S \subset S(da)^2S$$

što znači da je ρ_t kongruencija na S.

Kako je

$$x^4 \in Sx^2S, \quad (x^2)^3 \in S(x^2)^2S,$$

$$(xy)^3 \in S(yx)^2S, \quad (yx)^3 \in S(xy)^2S,$$

to sledi da je ρ_t polumrežna kongruencija.

Na osnovu izloženog možemo zaključiti da je $\sigma_t \subset \rho_t$. Dokažimo i obratno da je $\rho_t \subset \sigma_t$. Neka je $a\rho_t b$ onda $a^n = ub^2v$ i $b^n = wa^2z$ za neki $n \in N$ i $u,v,w,z \in S$ i

$$a\sigma_t a^n \sigma_t ub^2v\sigma_t ub^4v\sigma_t ub^2vb^2\sigma_t,$$

$$a^nb^n\sigma_t awa^2z\sigma_t wa^2z\sigma_t b^n\sigma_t b.$$

a to znači da je $\rho_t \subset \sigma_t$.

Na taj način dobili smo da je $\rho_t = \sigma_t$, tj. σ_t je maksimalna kongruencija sa tom svojstvom. Lako je videti da su klase kongruencije od σ_t 2-archimedove polugrupe i da se polumedialna polugrupa može dekompozirati kao unija 2-archimedovih polugrupa koje nazivamo 2-archimedove komponente. Dakle,

$$S = \cup S_\alpha (\alpha \in Y = S/\sigma_t)$$

gde su S_α 2-archimedove komponente ▲

1.6. POLUMEDIALNA SEPARATIVNA POLUGRUPA

U ovom paragrafu daćemo karakterizaciju polumedialnih separativnih polugrupa preko njenih 2-archimedovim i ardhimedovim komponentama.

1.6.1. Lema. Ako je S polumedialna separativna polugrupa onda važi

(i) $(\forall x,y\in S)(\forall n\geq 2)(x^{n+1} = x^n y \Rightarrow x^2 = xy)$

(ii) $(\forall x,y\in S)(\forall n\geq 2)(x^{n+1} = yx^n \Rightarrow x^2 = yx)$

Dokaz: Neka je $x^{n+1} = x^n y$. Onda

$$(x^n)^2 = x^{n-1}x^{n+1} = x^{n-1}x^n y = x^n(x^{n-1}y)$$

$$= x^{n+1}x^{n-2}y = x^n y x^{n-2} y = (x^{n-1}y)^2$$

gde $x^{n-2}x = y$ za $n = 2$. Kako je S separativna onda $x^n = x^{n-1}y$. Ponavljajući taj proces n-1 puta dobijamo $x^2 = xy$.

(ii) se dokazuje analogno kao (i) ▲

1.6.2. Lema. Ako je S polumedialna levo separativna polugrupa onda važi

$$(\forall x,y\in S)(\forall n\geq 2)(x^{n+1} = x^n y \Rightarrow x^2 = xy)$$

Dokaz: Neka je $x^{n+1} = x^n y$ onda

$$(x^n)^2 = x^{n-1}x^{n+1} = x^{n-1}x^n y = x^n(x^{n-1}y)$$

i

$$(x^{n-1}y)^2 = x^{n-1}yx^{n-1}y = x^{n-2}yx^{n+1} = (x^{n-1}y)x^n.$$

Na osnovu levo separativnosti od S imamo da je $x^n = x^{n-1}y$. Ponavljajući taj proces n-1 puta dobijamo da je $x^2 = xy$.

Analogno se dokazuje u slučaju za desne seperativne polugrupe ▲

1.6.3. Teorema. Neka je S polumedialna polugrupa sa archimedovim komponentama $S_\alpha(\alpha\in Y = S/\sigma_S)$. Onda

(i) Ako je S separativna i svaki S_α levo i desno 2-archimedova onda svaki S_α je slabo koncelativna.

(ii) Ako je S levo separativna i svaki S_α je desno 2-ardhimedova polugrupa onda svaki S_α je levo kancelativna polugrupa.

(iii) Ako je S desno separativna i svaki S_α je levo 2-archimedova polugrupa onda svaki S_α je desno kacelativna polugrupa.

(iv) Ako je S levo i desno separativna i svaki S_α je levo i desno 2-archimedova polugrupa onda svaki S_α je kancelativna polugrupa.

Dokaz: (i) Pretpostavimo da $a,x,y\ S_\alpha(\alpha\in Y)$ i $ax = ay$ onda za neki $u\in S_\alpha$ i $n\in N$ imamo

$$x^n = a^2u$$

Dalje,

$$x^{n+1} = a^2ux = auax = auay = a^2uy = x^ny$$

a to znači da je $x^2 = xy$. Analogno, ako $xb = yb(x,y,b\in S_\alpha)$ onda za neki $v\in S_\alpha$ i $n\in N$ imamo

$$x^n = vb^2$$

Dalje

$$x^{n+1} = xvb^2 = xbvb = ybvb = yvb^2 = yx^n$$

a to znači da je $x^2 = yx$.

Na osnovu separativnosti od S imamo da svaki S_α je slabo kancelativna polugrupa.

(ii) Pretpostavimo da $a,x,y\in S_\alpha(\alpha\in Y)$ i $ax = ay$ onda za neki $u\in S_\alpha$ i $n\in N$ imamo

$$x^n = a^2u$$

Iz poslednje relacije sledi

$$x^{n+1} = a^2ux = auax = auay = a^2uy = x^ny$$

a to znači da je $x^2 = xy$. Dualno se dobija da je $y^2 = yx$.

Na osnovu levo separativnosti od S imamo da svaki S je levo kacelativna polugrupa.

(iii) Pretpostavimo da $a,x,y \in S_\alpha (\alpha \in Y)$ i $xa = ya$ onda za neki $u \in S_\alpha$ i $n \in N$ imamo

$$x^n = ua^2$$

i

$$x^{n+1} = xua^2 = xaua = yaua = yua^2 = yx^n$$

a to znači da $x^2 = yx$. Dualno se dobija da je $y^2 = xy$.

Na osnovu desno separativnosti od S imamo da svaki S_α je desno kacelativna polugrupa.

(iv) se dokazuje kombinacijom (ii) i (iii) ▲

1.6.4. Teorema. Neka je S polumedialna polugrupa sa archimedovim komponentama $S_\alpha (\alpha \in Y = S/\sigma_S)$. Onda

(i) Ako je svaki S_α slabo kancelativna onda S je separativna polugrupa

(ii) Ako svaki S_α je levo (desno) kancelativna onda S je levo (desno) seperativna polugrupa

(iii) Ako svaki S_α je kancelativna onda S je levo i desno separativna polugrupa.

Dokaz: (i) Neka je $x^2 = xy = y^2$; $x,y \in S$. Koristeći definiciju za σ_S imamo da je

$$x \sigma_S x^2 \sigma_S xy \sigma_S y^2 \sigma_S y$$

to znači da x = y i da x,y pripadaju istoj archimedovoj komponenti.

(ii) Neka je $x^2 = xy$ i $y^2 = yx$; $x,y \in S$. Na osnovu definicije za σ_S imamo da je

$$x\sigma_S x^2\sigma_S xy\sigma_S yx\sigma_S y^2\sigma_S y$$

a to znaći da $x = y$ i da x,y nalaze se u istu archimedovu komponentu. Dualno se dokaže za desnu kancelativnu polugrupu.

(iii) dokazuje se koristeći (ii) ▲

1.6.5. Teorema. Neka je S polumedialna polugrupa sa 2-ardhimedovim komponentama $S_\alpha(\alpha\in Y = S/\sigma)$. Onda

(i) S je separativna akko svaki S_α je slabo kancelativna.

(ii) S je levo (desno) separativna akko svaki S_α je levo (desno) kancelativna.

(iii) S je levo i desno separativna akko svaki S_α je kancelativna.

Dokaz: (i) Neka je S separativna i $ax = ay$ i $xb = yb$ $(a,b,x,y\in S_\alpha)$, tada

$$x^n = ua^2v$$

za neki $u,v\in S_\alpha$ i $n\in N$ i

$$x^{n+1} = ua^2vx = uavax = uavay = ua^2vy = x^ny$$

a to znaći da

$$x^2 = xy$$

s druge strane

$$x^n = wb^2z$$

za neki $w,z\in S_\alpha$ i $n\in N$. Dalje

$$x^{n+1} = xwb^2z = xbwbz = ybwbz = ywb^2z = yx^n$$

a to znači da $x^2 = yx$.

Dualno se dobija $y^2 = yx$ i $y^2 = xy$. Na osnovu separativnosti od S sledi da je S_α slabo kančelativna.

Obratno, neka je $x^2 = xy = y^2$, $x,y \in S$. Na osnovu definicija za σ_t imamo:

$$x\sigma_t x^2 \sigma_t xy \sigma_t y^2 \sigma_t y$$

tj. x,y pripadaju istom S_α a to znaći da je $x = y$.

(ii) Neka je S levo separativna i $ax = ay(a,x,y \in S_\alpha)$ onda za neki $u,v \in S_\alpha$ i $n \in N$ imamo

$$x^n = ua^2 v$$

iz ove relacije sledi

$x^{n+1} = ua^2 vx = uavax = uavay = au^2 vy = x^n y$ što znači da je $x^2 = xy$.

Dualno se đobija da je $y^2 = yx$. Na osnovu leve seperativnosti od S imamo da S_α je levo kancelativna.

Obratno, neka je $x^2 = xy$ i $y^2 = yx$; $x,y \in S$. Na osnovu definicije za σ_t imamo

$$x\sigma_t x^2 \sigma_t xy \sigma_t yx \alpha_t y^2 \alpha_t y$$

tj. x,y pripadaju istom S_α i $x = y$ na osnovu levo kancelativnosti. Dualno je za desno seperativnu polugrupu.

(iii) se dokazuje analogno sa (ii) ▲

II. LEVO DISTRIBUTIVNE POLUGRUPE

U ovom delu razmatračemo levo distributivne polugrupe. U radu [29] dati su varieteti levo distributivnih polugrupa, u radu [3], [4] i [30] date su splei levo distributivne polugrupe, slobodne levo distributivne polugrupe i konačno generisane levo distributivne polugrupe.

2.1. NEKI REZULTATI LEVO DISTRIBUTIVNIH POLUGRUPA

Polugrupa S naziva se levo distributivna ako zadovoljava

$(\forall x,y,z \in S)(xyz = xyxz)$.

Variete levo distributivnih polugrupa obeležavamo sa $\mathcal{L}$ tj. $\mathcal{L} = \mathrm{Mod}(xyz = xyxz)$.

Neka je S polugrupa. Relacije p(s) i q(S) definisane na sledeći način

$(a,b) \in p(S)$ akko $ae = be$;

$(c,d) \in q(S)$ akko $ec = ed$

za svaki $e \in S$ su kongruencije.

Neka je

$$R_1 = L \cap \mathrm{Mod}(xy = xyx)$$
$$T_1 = L \cap \mathrm{Mod}(xy = x^2y)$$
$$T = L \cap \mathrm{Mod}(xy^2 = x^2y^2)$$
$$R = L \cap \mathrm{Mod}(x^2y = x^2y^2)$$
$$A = L \cap \mathrm{Mod}(xyz = uvw)$$
$$A_1 = L \cap \mathrm{Mod}(xy = uv)$$
$$I^* = L \cap \mathrm{Mod}(x = x^2).$$

2.1.1. Lema. Neka je $S \in L$. Onda:

(i) aba, ab^2, $a^3 \in Id(S)$ za sve $a,b \in S$,

(ii) $Id(S)$ je levi ideal od S.

(iii) S zadovoljava sledeće identitete

$$xyz = xyxz = xy^2z,$$
$$x^ny = x^2y,$$
$$(xy)^n = xy^n = xy^2,\ n\ \ 2.$$

(iv) $S/_{p(S)} \in R_1$ i $S/_{q(S)} \in T_1$

(v) Za $n > 2$ preslikavanje $a \to a^n$ je endomorfizam u S akko $S \in T$

(vi) $Id(S)$ je ideal u S akko $S^3 \subset Id(S)$ akko $S \in R$

(vii) Skup $I(a,b) = \{c \mid ac = bc\}$ je ili prazan ili desni ideal od S za sve $a,b \in S$.

(viii) Skup $K(a,b) = \{c \mid ca = cb\}$ je ili prazan ili levi ideal od S za sve $ab \in S$.

Dokaz: (i) $(aba)(aba) = abaaba = ababa = abaa = aba$ tj. $aba \in Id(S)$, analogno se dokazuje za ab^2 i a^3.

(ii) Neka je $i \in Id(S)$ i $s \in S$ onda

$si \cdot si = sii = si$ tj. $si \in Id(S)$. $Id(S)$ je dakle levi idal od S.

(iii) $xyz = xyxz = (xyx)^2z = xyxxyxz = xyyxz =$

$= xyyz = xy^2z.$

Analogno se dukazuju ostali identiteti.

(iv) $S/_{p(S)} \in \mathcal{R}_1$ akko $(xy, xyx) \in p(S)$

akko $xye = xyxe = xye$ za sve $e \in S$

$S/_{q(S)} \in \mathcal{T}_1$ akko $(xy, x^2y) \in q(S)$

akko $exy = ex^2y = exexy = exey = exy$

za sve $e \in S$.

(v) Neka je $n = 3$ i $f(a) = a^3$ i $S \in \mathcal{T}$, onda

$f(xy) = xyxyxy = xyyxy = xxyyxy =$

$= xxyyy = x^3y^3 = f(x)f(y)$

Analogno se dokazuje za $n > 3$.

(vi) Neka je $i \in Id(S)$ i $s \in S$ onda

$is \cdot is = (isi)^2s = isiisis = isiis^2 = isi^2s^2 =$

$= isis = i^2s^2 = i^2s = is.$

$Id(S)$ je dakle desni ideal od S.

Na osnovu (ii) sledi da je $Id(S)$ ideal od S.

(vii) Pretpostavimo da $I(a,b) \neq \Phi$. Neka je $c \in I(a,b)$ i $s \in S$. Onda $ac = bc \wedge s = s$ i $acs = bcs$ tj. $cs \in I(a,b)$.

$I(a,b)$ je desni ideal od S.

(viii) se dokazuje analogno sa (vii) ▲

2.1.2. Lema. Neka je $S \in \mathcal{L}$. Onda:

(i) $S \in \mathcal{A}$ akko $\mathrm{card}(Id(S)) = 1$

(ii) Ako je $S \in \mathcal{T}$ i $f(a) = a^3$ onda svaki blok od $\ker f$ je polugrupa iz $\mathcal{A}$

(iii) Ako je $S \in \mathcal{R}$ onda $S/_{Id(S)} \in \mathcal{A}$

(iv) Ako je $S \in \mathcal{R} \cap \mathcal{T}$ onda $\ker f \cap (Id(S) \times Id(S) \cup \Delta_S) = \Delta_S$

(v) Ako je $S \in \mathcal{R} \cap \mathcal{T}$ onda S je pod direktni proizvod jedne polugrupe idempotenata i polugrupe iz $\mathcal{A}$.

Dokaz: (i) Ako je $S \in \mathcal{A}$ onda $0 \in S$ i $Id(S) = \{0\}$. Obratno pretpostavimo da $card(Id(S)) = 1$. Na osnovu 2.1.1.(i) imamo da $aba = ab^2 = a^3$ a to znači da S zadovoljava $xyz = uvw$ tj. $S \in \mathcal{A}$.

(ii) Neka je $S \in \mathcal{T}$ i $f(a) = a^3$. U 2.1.1(v) dokazali smo da f je endomofizam. Neka je B jedan blok od kerf. Neka su $a,b, \in Id(B)$ i $a \neq b$. Tada $ab \in Id(B)$. Kako $a \ker f b$ akko $a = b$, to $card(B) = 1$, tj. $B \in \mathcal{A}$.

(iii) Kako $S \in \mathcal{R}$ onda $Id(S)$ je ideal u S. Zbog toga $S/_{Id(S)} \in \mathcal{A}$ pri čemu $Id(S/_{Id(S)}) = \{Id(S)\}$.

(iv) Neka je $S \in \mathcal{R} \cap \mathcal{T}$ onda za svaki $x,y \in S$ važi:

$$x \ker f \cap \sim_{Id(S)} y \Leftrightarrow f(x) = f(y) \wedge (x,y \in Id(S) \vee x = y)$$
$$\Leftrightarrow x^3 = y^3 \wedge (x,y \in Id(S) \vee x = y)$$
$$\Leftrightarrow x = y \in \Delta_S$$

(v) Neka je $S \in \mathcal{R} \cap \mathcal{T}$, onda na osnovu 2.1.2(iv), S je poddirektni proizvod od $Id(S) \times S/_{ID(S)}$ jer

$$g : S \to Id(S) \times S/_{Id(S)}$$

gde $\pi_{Id(S)} : S \to S/_{Id(S)}$ definisan sa

$$g(s) = (f(s), \pi_{Id(S)}(s))$$

je jedan homomorfizam od S u $Id(S) \times S/_{Id(S)}$ ▲

2.1.3. Lema. Neka je $S \in \mathcal{R}$. Onda

(i) $S^2 \subset Id(S)$, $Id(S)$ je ideal i $S/_{Id(S)} \in \mathcal{A}$

(ii) $S \in \mathcal{R}$ i S zadovoljava identitet $xy = xy^2 = xyx$

(iii) $S/_{q(S)} \in \mathcal{I}^*$

Dokaz: (i) Neka je $S \in \mathcal{R}_1$. Kako $xy = xyx\ Id(S)$ te na osnovu 2.1.1.(i), sledi $S^2 \subset Id(S)$.

Neka je $i \in Id(S)$ i $s \in S$ onda $is \cdot is = isi = is$ tj. $Id(S)$ je ideal u S i $S/_{Id(S)} \in \mathcal{A}$.

(ii) $x^2y = xxy = xxyx = xxyxx = xxyyx = xxyy = x^2y^2$ tj. $S \in \mathcal{R}$.

$xy = xyx = xyxyx = xyxy = xy^2$

(iii) Neka je $x \in S$, kako

$$ex = exe = exee = exexe = exex = ex^2$$

to imamo da je $S/_{q(S)} \in \mathcal{I}^*$ ▲

2.1.4. Lema ([29]). Neka je $S \in \mathcal{I}$. Sledeći uslovi su ekvivalentni

(i) S zadovoljava identitet $xyzx = xzyx$

(ii) S je medialna polugrupa

(iii) S je levo i desno distributivna ▲

2.1.5. Lema ([29]). Neka je S jedna polugrupa. Sledeći uslovi su ekvivalentni:

(i) $S \in \mathcal{R}$ i S je medialna polugrupa

(ii) S je levo i desno distributivna ▲

2.2. SPLEI LEVO DISTRIBUTIVNE POLUGRUPE

2.2.1. Lema. Neka je $S \in \mathcal{L}$. Sledeći uslovi su ekvivalentni

(i) S zadovoljava identitete $x^2y = x^2y^2$ i $xy^2 = x^2y^2$

(ii) S zadovoljava identitet $x^2y = xy^2$

Dokaz: Ako važi uslov (i) onda je očigledno da važi uslov (ii).

Obratno, neka važi (ii) tj. $x^2y = xy^2$ onda $x^3y = x^2y^2$ u levu distributivnu polugrupu $x^3y = x^3y$ i imamo

$xy^2 = x^2y = x^3y = x^2y^2$ ▲

Neka je $K = L\cap Mod(xy^2 = x^2y)$. Ako je $S\in I\cap L$ onda $S\in K$ i ako $S\in A$ onda $S\in K$. Svaki direktni proizvod jedne $I\cap L$ polugrupe i jedne A polugrupe je K polugrupa. Ove polugrupe nazivamo splej polugrupe.

2.2.2. Stav. Neka je $S\in K$. Onda

(i) $Id(S)$ je ideal od S.

(ii) $abc\in Id(S)$ za sve $a,b,c\in S$

(iii) $A(S) = S/_{Id(S)}\in A$.

Dokaz: (i) Kako za $a\in S$, imamo

$$a^3\cdot a^3 = (aa^2)(aa^2) = a(a^2\cdot a^2) = a^5 =$$
$$= (aa^2)(aa) = a(a^2\cdot a) = a^{44} =$$
$$= (a\cdot a)(a\cdot a) = a(a\cdot a) = a^3$$

to sledi da $a^3\in Id(S)$ a to znaći da je $Id(S) \neq \Phi$.

Neka su $a,b\in Id(S)$ i $c\in S$. onda

$cb\cdot cb = c.bb = cb$ tj. $cb\in Id(S)$ i

$bc\cdot bc = bb\cdot c = bc$ tj. $bc\in Id(S)$,

što znači da je $Id(S)$ ideal od S.

(ii) Neka su $a,b,c\in S$. Onda

$$abc = abac = aba^2c = aba^3c = abacabc =$$
$$= abcabc \text{ tj. } abc\in Id(S).$$

(iii) Neka je $[u], [v], [w]\in S/_{Id(S)}$. Onda, na osnovu (ii) sledi da je $uvw\in Id(S)$ tj. $[uvw] = Id(S)$ a to znači da je $S/_{Id(S)}\in A$.

2.2.3. Stav. Neka je $S \in K$. Tada:

(i) Preslikavanje $f: a \to a^3$ je endomofrizam od S i $f(S) \subset Id(S)$.

(ii) $\ker f \cap \sim_{Id(S)} = \Delta_S$

(gde je $\sim_{Id(S)}$ odgovarajuća kongruencija po idealu $Id(S)$).

Dokaz: (i) Kako za $a,b \in S$ važi

$a^3b^3 = a^2b^3 = a^3b \cdot b^3 = ab^2 \cdot b^2 = ab^4 = ab^3 = (ab)^3$,

to imamo da je f endomorfizam od S. S druge strane za svaki $a \in S$, $a^3 \in Id(S)$ što znači da je $f(S) \subset Id(S)$.

(ii) je očigledno ▲

2.2.4. Posledica. Svaka K polugrupa je poddirektni proizvod jedne $I \cap L$ polugrupe i jedne A polugrupe.

2.2.5. Posledica. Svaka poddirektno nerazloživa K polugrupa je ili I polugrupa ili A polugrupa.

Za $S \in K$ i $a \in Id(S)$, neka je

$A(a) = \{b \in S \mid f(b) = a\} = \{b \in S \mid b^3 = a\}$ tada važi sledeći stav.

2.2.6. Stav. Neka je $S \in K$ i $a \in Id(S)$. Onda

(i) $A(a)$ je podpolugrupa od S,

(ii) $A(a)$ je A polugrupa

(iii) $A(a)$ je izomorfna sa jednom podpolugrupom od $A(S)$.

(iv) Ako su $a_1, a_2 \in Id(S)$, $a_1 \neq a_2$, onda $A(a_1) \cap A(a_2) = \Phi$.

Dokaz: (i) Pošto je f endomorfizam od S, to $A(a)$ je podpolugrupa od S.

(ii) Za $b,c,d\in A(a)$ imamo da je $bcd\in Id(S)$ i $bcd = f(bcd) = a^3 = a$. I $bcd = a$ sledi da je $A(a)$ A polugrupa.

(iv) Sledi trivijalno jer za svaki $a\in S$ važi $A(a)\cap Id(S) = \{a\}$ ▲

2.2.7. Stav. Neka je $S\in K$. Onda S je desno distributivna polugrupa akko $Id(S)$ je desno distributivna polugrupa.

Dokaz: Pretpostavimo da je S desno distributivna tj. da važi $abc = acbc$ za sve $a,b,c\in S$. Onda to važi i u $Id(S)$ jer $Id(S)\subset S$ i $Id(S)$ je podpolugrupa od S.

Obratno, pretpostavimo da je $Id(S)$ desno distributivna polugrupa onda za $a,b,c\in S$ imao

$$abc = f(abc) = f(a)f(b)f(c) = f(a)f(c)f(b)f(c) =$$
$$= f(acbc) = acbc.$$

Na taj način smo dokazali da je S desno distributivna polugrupa ▲

2.2.8. Konstrukcija: Neka je $S\in K$ i $I = Id(S)$. Onda $I\in I\cap L$, i S je disjunkna unija A polugrupa $A(a)$, $a\in I$.

Neka su $a,b\in I$. Ako je $c\in A(a)$ i $d\in A(b)$, onda $f(cd) = f(c)f(d) = ab$ i $cd\in A(ab)$. No, imamo preslikavanje $g_{a,b}$ od $A(a)XA(b)$ u $A(ab)$ data sa

$$g_{a,b}(c,d) = cd$$

Za $a\in I$, neka je

$$A(a,2) = A(a)\cdot A(a) = cd \ c,d\in A(a)$$
$$A(a,1) = A(a)\setminus A(a,2).$$

Ako je $b\in I$, $c\in A(a,2)$, $d\in A(b)$ onda $cd\in I\cdot A(ab) = ab$ i $cd = ab$. Analogno se dokazuje da je $dc = ba$ tj. važi

(1) $g_{a,b}(A(a,2)XA(b)) = \{0_{ab}\} = g_{a,b}(A(a)XA(b,2))$

(gde smo sa 0_{ab} obeležili nulu od $A(ab)$, $0_{ab} = ab$).

Za $a \in I$, neka je

$$Z(a) = \{c \in A(a) \mid cA(a) = \{0_a\} = A(a)c\}$$

Očigledno je da $A(a,2) \subset Z(a)$. Ako je $b \in I$, $c \in A(a,1)$ i $d \in A(b,1)$ onda $ab \in Z(ab)$. Na taj način imamo

$$(2) \qquad g_{a,b}(A(a,1) X A(b,1)) \subset Z(ab).$$

Na kraju, neka je

$$P(a,b) = (Z(ab) - \{0_{ab}\}) \cap g_{a,b}(A(a,1) X A(b,1))$$

Ako je $c \in I$, $d \in P(a,b)$ i $e \in A(c)$, onda

$$de = 0_{abc} \quad \text{i} \quad ed = 0_{cab}.$$

Prema tome

Ako je $P(a,b) \neq \Phi$, onda:

$$(3) \qquad \begin{aligned} &g_{ab,c}(P(a,b) X A(c)) = \{0_{abc}\} \\ &g_{c,ab}(A(c) X P(a,b)) = \{0_{cab}\}. \end{aligned}$$

Obratno, neka je $I \in \mathcal{I} \cap \mathcal{L}$ i $A(a), a \in I$ familija disjunktnih $\mathcal{A}$ polugrupa. Za svaki $a,b \in I$, $a \neq b$, neka je dato preslikavanje $g_{a,b}$ od $A(a) X A(b)$ u $A(ab)$ i neka su $A(a,1)$, $A(a,2)$, $Z(a)$, $P(a,b)$ gore definisani skupovi. Pretpostavimo da se uslovi (1), (2) i (3) zadovoljavaju za sve $a,b,c \in A(S)$ $a \neq b$, $c \neq ab$ i neka je $S = \cup A(a)$. Definišemo operaciju $*$ na S na sledeći način:

$$x * y = xy \text{ ako } x,y \in A(a) \text{ i } a \in I$$

i

$$x * y = g_{a,b}(x,y) \text{ ako } x \in A(a), y \in A(b) \text{ i } a \neq b.$$

Nije teško videti da $S \in \mathcal{K}$, $Id(S) \simeq I$ i za $x \in Id(S)$, $A_{S(*)}(x)$ je jednaka sa $A(a)$ kada $x \in A(a)$.

2.2.9. Stav. Svaka K polugrupa konstruisana preko jedne $I\cap L$ polugrupe i familije disjunktnih A polugrupa je opisana postupkom 2.2.8 ▲

2.3. SPLEI K POLUGRUPE

Neka je $S\in K$. Kažemo da je S balansirana polugrupa ako su podpolugrupe A(a) i A(b) izomorfne za sve a,b Id(S).

Očigledno je da svaka splej K- polugrupa je balansirana. Preciznije, ako je S splej polugrupa onda S je izomorfna sa Id(S)XA(a), $a\in Id(S)$ je proizvoljan.

2.3.1. Lema: Neka je $S\in K$. Onda S je splei polugrupa akko postoji jedna A polugrupa T i izomorfizam g_a od A(a) na T, $a\in Id(S)$ tako da važi $g_a(c)g_b(d) = g_{ab}(cd)$ za sve $c\in A(a)$, $d\in A(b)$; $a,b\in Id(S)$ i $a \neq b$.

Dokaz: Ako je S splei polugrupa onda za T možemo uzeti A(S) a ostalo je očigledno. Obratno, neka je

$$g(x) = (f(x), g_{f(x)}(x)) \text{ za sve } x\in S$$

Onda g je izomorfizam od S na Id(S)XT ▲

2.3.2. Lema: Ako je $S\in K$ i $S\in A$ onda sledeći uslovi su ekvivalentni

(i) S je splei polugrupa i A(a) je Z polugrupa (tj. polugrupa sa nula multiplikacijom) za svaki $a\in Id(S)$.

(ii) S je splei polugrupa i $cd\in Id(S)$ za sve $c,d\in S$, $c\in A(a)$, $d\in A(b)$, $a \neq b$.

(iii) S je balansirana polugrupa i A(S) je Z polugrupa.

Dokaz: (i)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(iii) *je očigledno. Dokažimo da* (iii)$\Rightarrow$(i). Neka je $a\in Id(S)$ i za $b\in Id(S)$ neka je g_b jedan izomorfizam od $A(b)$ na $A(a)$. Ako su $b,c\in Id(S)$, $b \neq c$, $d\in A(b)$ i $e\in A(c)$, onda

$$g_b(d) = g_c(e) = a = g_{bc}(de)$$

Konačni rezultat se dobija na osnovu 2.3.1 ▲

2.3.3. Stav: Neka je $S\in K$ tako da $A(S)$ je Z polugrupa i $card(A(a)) = card(A(b))$ za sve $a,b\in Id(S)$. Onda S je splei polugrupa.

Dokaz: Proizilazi iz 2.3.2 imajući u obzir da dve Z polugrupe su izomorfne ako su istog kardinala ▲

2.3.4. Stav: Neka je $S\in K$, $Id(S)$ kvazitrivialna i $card(A(a)) = 2$ za sve a $Id(S)$. Onda S je splei polugrupa.

Dokaz: Na osnovu 2.3.3 vidimo da $A(S)$ je Z polugrupa. Pretpostavimo suprotno, onda $cd\in Id(S)$ za neki $c,d\in S$, $c\in A(a)$, $d\in A(b)$, $a,b\in Id(S)$. Tada $a \neq b$, $cd\in A(ab)$, $cd \neq ab$, $c \neq a$, $d \neq b$. Tako imamo da je $cd\in A(ab)\setminus\{ab\}$, $c\in A(a)\setminus\{a\}$ i $d\in A(b)\setminus\{b\}$. Kako $Id(S)$ je kvazitrivialna, onda ili $ab = a$ ili $ab = b$. Ako je $ab = a$, onda $c,cd\in A(a)\setminus\{a\}$ i $c = cd$. Ali $c^2 = c^2d = cd^2 = cd = c$, $c\in Id(S)$ i $cd\in Id(S)$ a to je kontradikcija. Analogno sledi ako predpostavimo da je $ab = b$.

2.3.5. Stav: Neka je $I\in \mathcal{I}\cap\mathcal{L}$ i $T\in\mathcal{A}$. Pretpostavimo da se najmanje jedan od sledećih uslova zadovoljava:

(a) I je netrivialna i T nije Z polugrupa

(b) I nije kvazitrivialna i T je dvoelementna Z polugrupa.

(c) I je netrivialna i T je Z polugrupa koja sadrži najmanje tri elementa.

Onda postoji ne splei balansirana K polugrupa S tako da $Id(S) \simeq I$ i $A(a) \simeq T, a \in Id(S)$.

Dokaz: (i) Neka se zadovoljava (a). Razmatramo familiju $A(a), a \in I$, koje su disjunktne A polugrupe izomorfne sa T i obeležimo sa 0_a nula element od $A(a)$. Neka je $S = \cup A(a)$ i $g_{a,b}(c,d) = 0_{ab}$ za sve $a,b \in I$, $a \neq b$, $c \in A(a)$, $d \in A(b)$. Očigledno je da uslovi (1), (2) i (3) iz 2.2.8 su ispunjeni. Neka je $S(*)$ odgovarajuća K polugrupa. Onda $Id(S(*) \simeq I$ i $A_{S(*)}(x) \simeq T$. $S(*)$ je balansirana polugrupa. Šta više, $x*y \in Id(S(*))$ za sve $x,y \in S$ i $x*x*x \neq y*y*y$. Kako T i A $(S(*))$ nisu Z polugrupe to na osnovu 2.3.2(ii),(iii) sledi da $S(*)$ nije splei polugrupa.

(ii) Neka se zadovoljava (b). Razmatramo familiju $A(a), a \in I$ disjunktnih dvu elementnih A polugrupa sa nulom 0_a i neka je $S = \cup A(a)$. Kako I nije kvazitrivialna, onda postoji $a,b \in I$ tako da $a \neq ab \neq b$, tj. $a \neq b$.

Neka je $A(a) = \{0_a, x\}$, $A(b) = \{0_b, y\}$ i $A(ab) = \{0_{ab}, z\}$. Onda elementi x,y,z su različiti. Definišemo preslikavanje $g_{c,d}$ od $A(c)XA(d)$ u $A(cd)$ za sve $c,d \in I$, $c \neq d$ gde

$$g_{c,d}(u,v) = 0$$

u jednom od ovih slučajeva

$$c = a,\ d = b,\ u = x,\ v = y.$$

Neka je $g_{a,b}(x,y) = z$. Očigledno je da su uslovi (1), (2), (3) iz 2.2.8 ispunjeni u odgovarajuću K polugrupu $S(*)$. Onda $Id(S(*) \simeq I$ i $A_{S(*)}(a)$ je dvoelementna A polugrupa.

Na kraju $x*y = z \notin Id(S(*))$, $A(S(*))$ nije A polugrupa. Na osnovu 2.3.2(i), (iii), $S(*)$ nije splei polugrupa.

(iii) Neka se zadovoljava (c). Razmatramo familiju $A(a), a \in I$ disjunktnih Z polugrupa izomorfne sa T, 0_a nula od $A(a)$ i neka je $S = \cup A(a)$. Kako I nije trivialna, onda postoji $a, b \in I$, $a \neq b$. Pošto svaka $A(c)$ sadrži najmanje tri elementa, onda postoje $x \in A(a) \setminus \{0_a\}$, $y \in A(b) \setminus \{0_b\}$ i $z \in A(ab) \setminus \{0_{ab}\}$ tako da su elementi x, y, z različiti. Ostalo se dokazuje na analogan način sa prethodnim slučajem ▲

2.3.6. Posledica: Neka je $I \in \mathcal{I} \cap \mathcal{L}$ i $T \in \mathcal{A}$. Onda svaka balansirana $\mathcal{K}$ polugrupa S gde $Id(S) \simeq I$ i $A_S(a) \simeq T$, a $Id(S)$, je splei polugrupa akko se zadovoljava najmanje jedan od sledećih uslova:

(i) I je trivialna

(ii) T je trivialna

(iii) I je kvazitrivalna i T je dvo elementna Z polugrupa.

2.4. VARIETETI LEVO DISTRIBUTIVNIH POLUGRUPA

U ovom paragrafu navešćemo nekoliko rezultata koje su date u radu [29] a koji će nam biti potrebni u našem izlaganju.

Podvarieteti od $\mathcal{I} \cap \mathcal{L}$ po definiciji su:

$\mathcal{I}_0 = Mod(x=y)$, $\mathcal{I}_1 = Mod(x=xy)$, $\mathcal{I}_2 = Mod(x=x^2, xy=yx)$

$\mathcal{I}_3 = Mod(x=yx)$, $\mathcal{I}_4 = Mod(x=x^2,\ xyz = xzy)$

$\mathcal{I}_5 = Mod(x=xyx)$, $\mathcal{I}_6 = Mod(x=x^2,\ xyz = yxz)$

$\mathcal{I}_7 = Mod(x=x\ ,\ xy = xyx)$, $\mathcal{I}_8 = Mod(x=x^2, xyzx=xzyx)$

$\mathcal{I}_9 = \mathcal{I} \cap \mathcal{L} = Mod(x=x^2,\ xyz = xyxz)$.

Važi sledeći stav

2.4.1. Stav ([29]):

(i) $I_0 \subset I_1 \subset I_4 \subset I_7 \subset I_9$

$I_1 \subset I_5 \subset I_8$

$I_2 \subset I_6 \subset I_8$

$I_0 \subset I_2 \subset I_4 \subset I_8 \subset I_9$

$I_0 \subset I_3 \subset I_5 \subset I_3 \subset I_6$

(ii) Varieteti $I_0, \ldots, I_9$ su jedini podvarieteti od $I \cap L$ ▲

Neka je

$A_5 = A = \mathrm{Mod}(xyz = u^3)$

$A_4 = \mathrm{Mod}(xyz = u)$, $A_3 = \mathrm{Mod}(xyz = u^3, xy = yx)$

$A_2 = \mathrm{Mod}(xyz = u^2, xy = yx)$, $A_1 = \mathrm{Mod}(xy = zx)$ i

$A_0 = \mathrm{Mod}(x = y)$

To da važi:

2.4.2. Stav ([29]):

$A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset A_5$

$A_2 \subset A_4 \subset A_5$

(ii) Varieteti $A_0, \ldots, A_5$ su jedini podvarieteti od A ▲

Za svaki $0 \leqslant i \leqslant 5$ i $0 \leqslant j \leqslant 9$ neka je

$P_{i,j} = A_i + I_j$

Onda važi:

2.4.3. Lema ([29])

(i) $P_{5,9} = T \cap R$

(ii) $P_{0,j} = I_j$ i $P_{i,0} = A_i$ ▲

2.4.4. Stav ([29]). Svaki podvariete od $T\cap R$ je jednak sa jednom od sledećih 44 varieteta:

$L_0 = P_{0,0} = I_0 = A_0$

$L_1 = P_{0,1} = I_1, \dots, L_9 = P_{0,9} = I_9$

$L_{10} = P_{1,0} = A_1, \dots, L_{14} = P_{5,0} = A_5$

$L_{15} = P_{1,1}, \dots, L_{23} = P_{1,9}$

$L_{24} = P_{2,2}, L_{25} = P_{2,1} = P_{4,1}, L_{26} = P_{4,2} = L_{27} = P_{2,3} = P_{4,3}$

$L_{28} = P_{2,4} = P_{4,4}, L_{29} = P_{2,5} = P_{4,5}$

$L_{30} = P_{2,6} = P_{4,6}, L_{31} = P_{2,7} = P_{4,7}$

$L_{32} = P_{2,8} = P_{4,8}, L_{33} = P_{2,9} = P_{4,9}$

$L_{34} = P_{3,2}, L_{35} = P_{3,1} = P_{5,1}, L_{36} = P_{5,2}$

$L_{37} = P_{3,3} = P_{5,3}, L_{38} = P_{3,4} = P_{5,4}, L_{39} = P_{3,5} = P_{5,5}$

$L_{40} = P_{3,6} = P_{5,6}, L_{41} = P_{3,7} = P_{5,7}, L_{42} = P_{3,8} = P_{5,8}$

$L_{43} = P_{3,9} = P_{5,9}$ ▲

Neka su $S_1 = L\cap \mathrm{Mod}(x^2 = x^3,\ xy^2 = xyx)$,

$S_2 = L\cap\mathrm{Mod}(x^2 = x^3)$, $S_3 = L\cap\mathrm{Mod}(xy^2 = xyx)$ i $S_4 = L$.

Neka su $1 \leqslant i \leqslant 4$ i $0 \leqslant j \leqslant 9$. Obeležimo sa $S_{4,j}$ klasu svih $S\in L$ za koje $\mathrm{Id}(S)\in I_j$ i neka je $S_{i,j} = S_i\cap S_{4,j}$

Tada važi:

2.4.5. Lema ([29])

(i) $S_1 = S_2 \cap S_3$, $S_2 \subset S_4$ *i* $S_3 \subset S_4 = L$

(ii) $S_{i,j}$ su podvarieteti od L i $S_{i,j} \cap I = I_j$

(iii) $A_5 \subset S_{3,j}$ $S_{4,j}$ *i* $A_5 \not\subset S_{1,j}, S_{2,j}$

(iv) $S_{1,j} = S_{2,j} = S_{3,j} = S_{4,j} = L, S_{4,0} = A_5 = S_{3,0}$ *i* $S_{2,0} = A = S_{1,0}$ ▲

Neka su $R_1 = L\cap\mathrm{Mod}(xy = xyx)$, $R_2 = L\cap\mathrm{Mod}(xy = xy^2)$

$R_3 = R\cap S_1$, $R_4 = R\cap S_2$, $R_5 = R\cap S_3$, $R_6 = R$

Tada važi:

2.4.6. Lema ([29]). $R_1 = R_2 \cap R_3$, $R_3 = R_5 \cap R_4$, $R_2 \subset R_4$, $R_4 + R_5 \subset R_6$ ▲

Za $0 \leqslant j \leqslant 9$ i $1 \leqslant i \leqslant 6$, neka je $R_{i,j} = S_{4,j} \cap R_i$ i neka je $T_1 = L \cap \mathrm{Mod}(xy = x^2y)$, $T_2 = T \cap S_2$, $T_3 = T \cap L$. Za $0 \leqslant j \leqslant 9$ i $1 \leqslant i \leqslant 3$ neka je $T_{i,j} = S_{4,j} \cap T_i$

2.4.7. Lema ([29]). $T_1 \subset T_2 \subset T_3$ ▲

2.4.8. Stav ([29]). Svaki podvariete od T je jednak sa jednim od sledećih 62 varieteta:

$L_0, \ldots, L_{43}$, $L_{44} = T_{1,2}$, $L_{45} = T_{1,4}$, $L_{46} = T_{1,6}$
$L_{47} = T_{2,2}$, $L_{48} = T_{1,7}$, $L_{49} = T_{2,4}$, $L_{50} = T_{3,2}$, $L_{51} = T_{2,6}$
$L_{52} = T_{1,8}$, $L_{53} = T_{2,7}$, $L_{54} = T_{3,4}$, $L_{55} = T_{1,9}$, $L_{56} = T_{3,6}$
$L_{57} = T_{2,8}$; $L_{58} = T_{3,7}$, $L_{59} = T_{2,9}$, $L_{60} = T_{3,8}$ i $L_{61} = T_{3,9}$ ▲

2.4.9. *Stav* ([29]). Svaki podvariete od R je jednak sa jednim od sledećih 80 varieteta:

$L_0, \ldots, L_{61}$, $L_{62} = R_{1,1}$, $L_{63} = R_{3,1}$, $L_{64} = R_{1,4}$
$L_{65} = R_{2,5}$, $L_{66} = R_{5,1}$, $L_{67} = R_{3,4}$, $L_{68} = R_{1,7}$,
$L_{69} = R_{2,8}$, $L_{70} = R_{4,5}$, $L_{71} = R_{5,4}$, $L_{72} = R_{3,7}$,
$L_{73} = R_{2,9}$, $L_{74} = R_{4,8}$, $L_{75} = R_{6,5}$, $L_{76} = R_{5,7}$,
$L_{77} = R_{4,9}$, $L_{79} = R_{6,8}$ *i* $L_{79} = R_{6,9}$ ▲

2.4.10. Stav ([29]). Svaki podvariete od L je jednak sa jednim od sledećih 88 varieteta:

$L_0, \ldots, L_{79}$, $L_{80} = S_{1,4}$, $L_{81} = S_{1,7}$, $L_{82} = S_{2,8}$,
$L_{83} = S_{2,9}$, $L_{84} = S_{3,4}$, $L_{85} = S_{3,7}$, $L_{86} = S_{4,8}$ *i* $L_{87} = S_{4,9} = L$ ▲

2.5. SLOBODNA LEVO DISTRIBUTIVNA POLUGRUPA

Neka je $F[X]$ slobodna polugrupa nad bezkonačnim skupom X.

Razmatramo sledeće podskupove od $F[X]$:

$A = \{x, x^2, x^3 \mid x \in X\}$

$B = \{x_1 x_2 \dots x_n \mid 2 \leq n, x_1, \dots, x_n \in X \text{ su različiti}\}$

$C = \{x_1^2 x_2 \dots x_{n-1} x_n \mid 2 \leq n, x_1, \dots, x_n \in X \text{ su različiti}\}$

$D = \{x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n^2 \mid 2 \leq n, x_1, \dots, x_n \in X \text{ su različiti}\}$

$E = \{x_1^2 x_2 \dots x_{n-1} x_n^2 \mid 2 \leq n, x_1, \dots, x_n \in X \text{ su različiti}\}$

$G = \{x_1 x_2 \dots x_n x_k \mid 2 \leq n, 1 \leq k < n, x_1, \dots, x_n \in X \text{ su različiti}\}$

$H = \{x_1^2 x_2 \dots x_n x_k \mid 2 \leq n, 1 \leq k < n, x_1, \dots, x_n \in X \text{ su različiti}\}$

2.5.1. Lema. (i) Neka su $r, s \in F[X]$. Onda postoje $p, q \in A \cup B \cup C \cup D \cup E \cup G \cup H = M$ tako da

$L \cap \mathrm{Mod}(r = s) = L \cap \mathrm{Mod}(p = q)$

(ii) Neka su $p, q \in M$ tako da $p \neq q$. Onda $L \not\subseteq \mathrm{Mod}(p = q)$

Dokaz: Očigledan ▲

Za sve brojeve $0 \leq m \leq n$, neka je

$$a(n,m) = n(n-1)\dots(n-m),$$

$$a(n) = \sum_{m=0}^{n} a(n,m),$$

i

$$z(n) = \sum_{m=0}^{n} m a(n,m).$$

Očigledno je da važi

$$a(n+1, m+1) = (n+1)a(n,m)$$

$$a(n+1) = (n+1)(1 + a(n))$$

i

$$z(n+1) = (n+1)(a(n) + z(n)).$$

Obeležimo sa $a(L,n)$ broj elemenata L polugrupe ranga n. Važi sledeći:

2.5.2. *Stav:* $a(L,n) = 4a(n)+2z(n)-n$, za sve $n \geq 1$.

Dokaz: Neka je X_n jedan n- elementan podskup od $F[X]$ i neka $F_n[X_n]$ podpolugrupa od $F[X]$ generisana sa X_n. Neka je $A_n = A \cap F_n$, analogno za ostale. Na osnovu 2.5.1 imamo:

$$a(L,n) = \mathrm{card}(A_n)+\mathrm{card}(B_n)+\mathrm{card}(C_n) + \mathrm{card}(D_n)+\mathrm{card}(E_n)+\mathrm{card}(G_n) + \mathrm{card}(H_n).$$

gde $\mathrm{card}(A_n) = 3n$;

$$\mathrm{card}(B_n) = \mathrm{card}(C_n) = \mathrm{card}(D_n) = \mathrm{card}(E_n) = \sum_{m=2}^{n}\binom{n}{m}m!$$

$$= \sum_{m=2}^{n} n(n-1)\dots(n-m+1)$$

$$= \sum_{m=1}^{n} a(n,m) = a(n)-n$$

$$\mathrm{card}(G\ ) = \mathrm{card}(H\ ) = \sum_{m=2}^{n}\binom{n}{m}m!(m-1) =$$

$$= \sum_{m=2}^{n}(m-1)n(n-1)\dots(n-m+1)$$

$$= z(n)$$

Odakle dobijamo da je:

$$a(L,n) = 3n + 4a(n) -4n+2z(n)$$

$$= 4a(n)+2z(n)-n.$$ Npr.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$a(L,n)$	3	18	93	516	3255	23378	191793	1753608	17755371	197282010

▲

Za svaki $n \geq 0$, neka je $b(n) = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!}$. Kako $1 = b(0) < 2 = b(1) < \frac{5}{2} = b(2) < b(3) \ldots$ imamo da $\lim_{n\to\infty} b(n) = e$. Neka je $b(-1) = 0$.

2.5.3. Lema: $a(n) = b(n-1)n!$ za svaki $n \geq 0$.

Dokaz: Relacija se dokazuje indukcijom ▲

Za svaki $n \geq 0$, neka je $y(n) = \sum_{m=0}^{n} b(m)$. Neka je $y(-1) = y(-2) = 0$. Tada važi

2.5.4. Lema: $z(n) = y(n-2)n!$ za svaki $n \geq 0$.

Dokaz: Relacija se dokazuje indukcijom ▲

Za svaki $n \geq -1$, neka je $v(n) = \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m!} = e-b(n)$ i za $n \geq 1$, neka je $u(n) = \sum_{m=1}^{n} v(n)$, $u(0) = 0$. Onda $u(1) < u(2) < \ldots < 1$ i $\lim u(n) = 1$.

Tada važi:

2.5.5. Stav: $a(L,n) = 2y(n)n!-2-n$ za svaki $n \geq 1$.

Dokaz: Na osnovu 2.5.2, 2.5.3 i 2.5.4 imamo:

$$
\begin{aligned}
a(L,n) &= 4b(n-1)n!+2y(n-2)n!-n \\
&= 2n!(2b(n-1)+y(n-2))-n \\
&= 2n!(b(n-1)+y(n-1))-n \\
&= 2n!(b(n-1)+\frac{1}{n!}+y(n-1))-2-n \\
&= 2n!(b(n)+y(n-1))-2-n \\
&= 2n!y(n)-2-n \ ▲
\end{aligned}
$$

2.5.6. Stav: $a(L,n) = 2n2n!-2-n+2(1-u(n))n!$.

Dokaz: Na osnovu 2.5.5 i imajući u obzir da je $y(n) = ne+1-u(n)$, to neposredno sledi pomenuti rezultat ▲

2.5.7. Posledica. $a(L,n) > 2nen! - 2 - n$ za svaki $n \geqslant 1$

što više

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a(L,n)}{2nen!-2-n} = 1.$$

Naime, iz donje tablice vidimo:

n	1	2	3	4	5	6
$2nen!-2-n$	1,436...	17,746...	92,858...	515,[illegible]...	3254,938...	23477,856...

▲

Neka su $R = L \cap \mathrm{Mod}(x^2y = x^2y^2)$

$R_1 = L \cap \mathrm{Mod}(xy = xyx)$ i $R_2 = L \cap \mathrm{Mod}(xy = xy^2)$

Tada važi

2.5.8. Lema. (i) $R_1 \subset R_2 \subset R$

(ii) $R_1 = \mathrm{Mod}(xy = xyx)$.

Dokaz: Jasno je da $R_2 \subset R$. Neka je $S \in R_1$ i $x,y \in S$, onda imamo

$$\begin{aligned} xy &= xyx = (xy)x = (xyx)(xy) = x(yxy) = \\ &= (xy)(xy) = xy^2 \end{aligned}$$

to znači da $S \in R_2$. Jednakost $R_1 = \mathrm{Mod}(xy = xyx)$ je očigledna ▲

2.5.9. Lema. $R_1 \neq R_2 \neq R$

Dokaz: Razmatramo sledeći grupoid $A = \{a,b,c,d\}$ $ab = ba = c$ i $xy = d$ u ostalim slučajevima. Onda $A \in A$ i $A \in R$. Očigledno je da $A \notin R_2$. Razmatramo sledeći grupoid $B = \{a,b\}$, $aa = ba = a$, $ab = bb = b$. Onda B je polugrupa desnih nula, $B \in R_2$ i $B \notin R_1$ ▲

Neka je V skup sledećih terma u F[X]:

$x,\ x^2,\ x^3;\ x\ X$

$xy,\ x^2y,\ xy^2;\ x,y\ X,\ x \neq y$

$y_1^2 y_2 \dots y_n,\ 1 \leqslant i \leqslant 2, 3 \leqslant n;\ y_1, \dots, y_n \in X$ su različiti

$y_1 y_2 \dots y_n y_k, 2 \leqslant n,\ 1 \leqslant k \leqslant n,\ 1 \leqslant i \leqslant 2,\ y_1 \dots, y_n \in X$ su različiti

Tada važi:

2.5.10. Lema: (i) Neka su $r,s \in F[X]$. Onda postoje $p,q \in V$ tako da $R \cap Mod(r = s) = R \cap Mod(p = q)$

(ii) Ako su $p,q \in V$ tako da $p \neq q$, onda $R \subset Mod(p = q)$.

Dokaz: Sledi na osnovu 2.5.1 i 2.5.9 ▲

2.5.11. Stav: $a(R,n) = n^2+2a(n)+2z(n)$

$a(R_2,n) = 2n - 2n^2+2a(n)+2z(n)$

$a(R_1,n) = 2a(n)$ za svaki $n \geqslant 1$.

Dokaz: Je analogan sa 2.5.2.▲

Neka je $T = L \cap Mod(xy^2 = x^2y^2)$ i $T_1 = L \cap Mod(xy = x^2y)$. Očigledno je da $T_1 \subset T$

2.5.12. Lema: $T_1 \neq T$

Dokaz: Razmatramo polugrupu A iz 2.5.9. Onda $A \in T$ i $A \notin T_1$.▲

2.5.13. Stav:

$a(T,n) = n^2+2a(n)+2z(n)$,

$a(T_1,n) = 2a(n)+2z(n)$,

$a(T \cap R,n) = n^2+n+a(n)+z(n)$,

$a(T_1 \cap R_2,n) = n+a(n)+z(n)$,

$a(T_1 \cap R_1,n) = n+a(n)$ za svaki $n \geqslant 1$.

Dokaz: Je analogan sa dokazmom u 2.5.2 ▲

Neka su I_0, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7, I_8 i I_9 kao u prethodnom paragrafu. Tada važi:

2.5.14. Stav. Za svaki $n \geq 1$

$a(I_0,n) = 1$, $a(I_1,n) = a(I_3,n) = n$

$a(I_2,n) = 2^n-1$, $a(I_4,n) = a(I_5,n) = n2^{n-1}$

$a(I_5,n) = n^2$, $a(I_7,n) = a(n)$

$a(I_8,n) = (n+n\ )2^{n-2}$, $a(I_9,n) = n+z(n)$.

Dokaz: Očigledan ▲

2.6. KONAČNO GENERISANE LEVO DISTRIBUTIVNE POLUGRUPE

U prethodnom paragrafu odredili smo $a(L,n)$ i $a(I,n)$

ɔbili smo da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a(L,n)}{2n!ne} = 1$$

om paragrafu dokazaćemo da je

$$a(L,n) = 2[\,n!n\,]-n$$

Za realni broj $r \geq 0$ $(r \leq 0)$, neka je $[r]$ najveći ceo

tako da $[r] \leq r$ $(r \leq [r])$.

Za svaki $n \geq 1$ i $m \geq 2$, neka je

$g(n,1) = 1$,

$g(n,m) = (n+2)(n+3)\ldots(n+m)+(n+3)(n+4)\ldots(n+m)+$
$\ldots+(n+m-1)(n+m)+(n+m)+1$,

$h(n,1) = 1 = (n+1)-n$,

$h(n,m) = (n+m)h(n,m-1)-n$.

2.6.1. Lema: Za svaki $n \geq 1$ i $m \geq 1$,

$..(n+m)-ng(n,m) = h(n,m)$

Dokaz:

$(n+1)\ \ldots\ (n+m)-ng(n,m) =$

$= (n+2)\ \ldots\ (n+m)-n(n+3)\ \ldots\ (n+m)-\ldots-n(n+m)-n\cdot 1 =$

$= h(n,1)(n+2)\ \ldots\ (n+m)-n(n+3)\ \ldots\ (n+m)-\ \ldots-n\cdot 1 =$

$= h(n,2)(n+3)\ \ldots\ (n+m)-n(n+4)\ \ldots\ (n+m)-\ \ldots-n\cdot 1 =$

$= \ldots = h(n,m-1)(n+m)-n = h(n,m)$ ▲

2.6.2. Lema: Za svaki $n,m\geqslant 1$ važi $h(n,m)\geqslant m!$

Dokaz: Indukcijom po m ▲

2.6.3. Lema: Za svaki $n,m\geqslant 1$ važi

$(n+1)\ \ldots\ (n+m) > ng(n,m)$

Dokaz: Na osnovu 2.6.1 i 2.6.2

2.6.4. Lema: Neka su $n,m\geqslant 1$. Onda

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}$$

Dokaz: Datu nejednakost množimo sa $n(n+1)\ldots(n+m)$ i dobijamo $(n+1)\ldots(n+m) > ng(n,m)$ a to važi na osnovu 2.6.3 ▲

2.6.5. Lema: Za svaki $n\geqslant 1$ važi

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \ldots$$

Dokaz: Za $m\geqslant 1$, neka je

$$k(n,m) = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{(n+1)\ldots(n+m)}.$$

Na osnovu 2.6.4, $\frac{1}{n} > k(n,m)$ za svaki m. Takodje $\frac{1}{n} > k(n,\infty)$. Ako je $\frac{1}{n} = k(n,\infty)$ onda

$$1 + \frac{1}{n} = (n+1)k(n,\infty) = 1+k(n+1,\infty), \text{ tj.}$$

$$\frac{1}{n} = k(n+1,\infty) \leqslant \frac{1}{n+1}$$

što je kontradikcija. Na taj način smo dokazali da je $\frac{1}{n} > k(n,\infty)$ ▲

Za svaki $0 \leq m \leq n$, neka je

$a(n,m) = n(n-1) \ldots (n-m)$

$a(n) = \sum_{m=1}^{n} a(n,m)$

i

$z(n) = \sum_{m=0}^{n} ma(n,m)$

Tada važi

2.6.6. Lema: Neka je $0 \leq m \leq n$. Onda

(i) $a(n+1,m+1) = (m+1)a(n,m)$

(ii) $a(n+1) = (n+1)(1+a(n))$

(iii) $z(n+1) = (n+1)(a(n)+z(n))$

(iv) $z(n) = (n-2)a(n)+n$.

Dokaz: (i) $a(n+1,m+1) = (n+1)\cdot n\ldots(n+1-m-1) =$

$= (n+1)a(n,m)$

(ii) Na osnovu (i) imamo

$$a(n+1) = \sum_{m=-1}^{n} a(n+1,m+1) = a(n+1,0)+(n+1) \sum_{m=0}^{n} a(n,m)$$

$$= (n+1)(1+a(n))$$

$$\text{(iii) } z(n+1) = \sum_{m=1}^{n} ma(n+1,m) = (n+1) \sum_{m=0}^{n} (m+1)a(n,m)$$

$$= (n+1)(a(n)+z(n)),$$

(iv) Dokažimo indukcijom po n. Stav važi za $n = 0$.

$z(0) = -2(0+0) = -2(a(0)+0)$;

Pretpostavimo da stav važi za n. Tada

$$z(n+1) = (n+1)(a(n)+z(n)) = (n+1)(a(n)+(n-2)a(n)+n)$$

$$= (n^2-1)a(n)+n^2+n = (n^2-1)(1+a(n))+n+1$$

$$= (n-1)a(n+1)+n+1$$ tj. stav važi za svaki n ▲

2.6.7. Lema: Za svaki $n \geq 1$ važi

$n!e-1 = a(n)+b(n)$ gde $b(n) < \frac{1}{n}$

Dokaz:

$$n!e-1 = 2n!+3\cdot 4\ldots n+4\cdot 5\ldots n+\ldots+(n-1)n+n+b(n).$$

gde

$$b(n) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + < \frac{1}{n}$$ na osnovu 2.6.5.

Odavde sledi:

$$n!e-1 = a(n,n-1)+a(n,n-2)+a(n,n-3)+\ldots+a(n,1)+$$
$$+a(n,0)+b(n) = a(n)+b(n) \blacktriangle$$

2.6.8. Lema: Za svaki $n \geqslant 1$ važi

$$a(n) = [n!e-1] = [n!e]-1$$

Dokaz: Je očigledan na osnovu 2.6.7 ▲

2.6.9. Lema: Za svaki $n \geqslant 1$ važi

$$n!(n-2)e+2 = a(n)+c(n)$$

gde $c(n) < 1-\frac{2}{n}$

Dokaz: $n!(n-2)e+2 = (n-2)(2n!+3\cdot 4\ldots n+\ldots+(n-1)n+n)+$
$$+ n+c(n) = (n-2)a(n)+n+c(n)$$

gde $$c(n) = (n-2)\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} +\ldots\right) < \frac{n-2}{n} \blacktriangle$$

2.6.10. Lema: Za svaki $n \geqslant 1$, važi

$$z(n) = [n!(n-2)e+2] = [n!(n-2)e]+2$$

Dokaz: Za $n = 1,2$ je očigledno a za $n \geqslant 3$ sledi iz 2.6.9. ▲

2.6.11. Lema: Za svaki $n \geqslant 1$, važi

$$2n!ne-n+4b(n)-2c(n) = 4a(n)+2z(n)-n$$

gde $1 < 4b(n)+2c(n) < 2$.

Dokaz: Na osnovu 2.6.7 i 2.6.9 imamo

$$4b(n)+2c(n) = 2n\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots\right)$$

gde po 2.6.5 imamo

$$1 \quad \frac{2n}{n+1} < 4b(n)+2c(n) < 2 \ \blacktriangle$$

2.6.12. Lema. Za svaki $n \geqslant 1$, važi

$$[2n!ne-n-1] = [2n!ne]-n-1 = 4a(n)+2z(n)-n$$

Dokaz: Na osnovu 2.6.10 ▲

2.6.13. Lema: Za svaki $n \geqslant 1$, važi

$$2[n!ne]-n = 4a(n)+2z(n)-n$$

Dokaz: $n!ne = x+d(n)$

gde x je pozitivan broj i $d(n) = \frac{n}{n+1} + \frac{n}{(n+1)(n+2)} + \ldots,$

$\frac{1}{2} \quad d(n) \quad 1$. Odakle

$[2n!ne] = 2x+1$ i $2[n!ne] = 2x$. Ostalo je jasno na osnovu 2.6.12. ▲

2.6.14. Teorema: Za svaki $n \geqslant 1$ važi

$$a(L,n) = 2[n!ne]-n$$

$$a(I,n) = [n!(n-2)e]+n+2$$

Dokaz: Iz prethodnog paragrafa imamo da

$$a(L,n) = 4a(n)+2z(n)-n$$

i

$$a(I,n) = n+z(n)$$

Primenjujući 2.6.13 i 2.6.10 dobijamo pomenute rezultate ▲

III. DISTRIBUTIVNE POLUGRUPE

Neka je L = Mod$(xyz = xyxz)$ tj. variete levo distributivnih polugrupa i R = Mod$(yzx = yxzx)$ tj. variete desno distributivnih polugrupa, onda polugrupa S naziva se distributivna ako $S \in D = L \cap R$, gde smo sa D označili variete distributivnih polugrupa.

U ovom delu razmatraćemo strukturu distributivne polugrupe, *slobodnu distributivnu polugrupu idempotenta, konstrukciju slobodne distributivne polugrupe preko jedne slobodne komutativne polugrupe idempotenta i dva njena homomorfizma i na kraju splei distributivnnu polugrupu.*

3.1. STRUKTURA DISTRIBUTIVNE POLUGRUPE

3.1.1. Lema. Neka je $S \in D$. Onda

(i) $abc \in Id(S)$ za sve $a,b,c \in S$

(ii) $Id(S)$ je ideal od S.

Dokaz: (i) Neka je $a,b,c \in S$, onda

$abc = abac = abcac = abcaabc = abcabc$ tj. $abc \in Id(S)$

(ii) Neka je $i \in Id(S)$ i $s \in S$ onda

$is \cdot is = i^2 s = is$ tj. $is \in Id(S)$

$si \cdot si = si^2 = si$ tj. $si \in Id(S)$

odakle imamo daje Id(S) je ideal u S.▲

Razmatramo kongruenciju $\sim_{Id(S)}$ po idealu Id(S) tj. $\sim_{Id(S)} = (Id(S)\times Id(S) \cup \Delta_S)$. Faktor polugrupu $S/\sim_{Id(S)}$ obeležavamo je sa A(S). Neka je π prirodni homomorfizam od S u A(S).

3.1.2. Lema: Neka je $S \in \mathcal{D}$. Onda

(i) $f: a \to a^3$ je homomorfizam u S

(ii) $f|_{Id(S)} = i_{Id(S)}$

(iii) $\ker f \cap \sim_{Id(S)} = \Delta_S$

(iv) S je poddirektno razloživa

Dokaz: (i) Neka su $a,b \in S$, onda

$f(ab) = = (ab)^3 = ababab = abbab$

$= abbb = ababb = aabb$

$= aabab = aaabb = aababb$

$= aaabb = aaabab$

$= aaabbab = aaabbb = a^3b^3 = f(a)f(b)$

(ii) Ako je $i \in Id(S)$ onda $f(i) = i^3 = i$ tj.

$f|_{Id(S)} = i_{Id(S)}$

(iii) Neka je $a,b \in S$ i

$a \ker f \cap \sim_{Id(S)} b$ akko $a \ker f \wedge a \sim_{Id(S)} b$

akko $a = b \wedge (a,b\ Id(S) \vee a = b)$

akko $a = b$.

akko $(a,b) \in \Delta_S$

(iv) Na osnovu (iii) ▲

3.1.3. Lema: Neka je $S \in \mathcal{D}$. Onda A(S) je $\mathcal{A}$ polugrupa, u ovom slučaju ulogu nule igra skup Id(S).

Dokaz: Očigledan ▲

3.1.4. Lema: Neka je $S \in \mathcal{D}$. Onda S je poddirektni proizvod jedne distributivne polugrupe idempotenta i jedne A polugrupe.

Dokaz: Sledi na osnovu 3.1.2 i 3.1.3 ▲

Neka je $S \in \mathcal{D}$. Definišemo skup A(a) za svaki $a \in Id(S)$ na sledeći način:

$$A(a) = \{x \in S \mid f(x) = a\} = \{x \in S \mid x^3 = a\}$$

Tada važi

3.1.5. Lema: Neka je $S \in \mathcal{D}$. Onda S je poddirektno ne razloživa ako je ili polugrupa idempotenta ili A polugrupa.

Dokaz: Sledi na osnovu 3.1.4.▲

3.1.6. Stav: Neka je $S \in \mathcal{D}$. Onda

(i) Za svaki $a \in Id(S)$, $A(a)$ je podpolugrupa od S, *ona je A* polugrupa, *a je nula i ona je izomorfna sa jednom podpo-*lugrupom od A(S).

(ii) Ako je $a \in Id(S)$ onda $A(a)$ je jedan blok od kerf koji sadrži a, svaki blok od kerf je jednak sa A(a) za neki $a \in Id(S)$.

(iii) $S = \cup A(a)$, $a \in Id(S)$ je disjunktna unija.

Dokaz: Očigledan. ▲

3.1.7. Posledica. Neka je $S \in \mathcal{D}$. Onda S je disjunktna unija A polugrupa.▲

3.1.8. Stav: Neka je S jedna polugrupa. Onda sledeći *uslovi su ekvivalentni*

(i) $S \in Mod(xyuv = xuyv,\ x^2y = x^2y^2, xyz = xyxz)$

(ii) $S \in \mathcal{D}$

Dokaz: (i) $\Rightarrow$ (ii)

$$abc = abac = aabc = aabbc = aabbcc = aabcc =$$
$$= aacbc = acabc = acbc \text{ za sve } a,b,c\in S.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i)

$$abcd = abcbd = abacbd = abacdb = ababcbd =$$
$$= acbd$$

Za sve $a,b,c,d\in S$.

3.1.9. Lema ([29]). Neka je S polugrupa idempotenta. Onda sledeći uslovi su ekvivalentni:

(i) $S\in Mod(xyzx = xzyx)$

(ii) $S\in Mod(xyuv = xuyv)$

(iii) $S\in \mathcal{D}$. ▲

3.2. SLOBODNA DISTRIBUTIVNA POLUGRUPA IDEMPOTENATA

Neka je $p\in F[X]$ onda sa var(p) obeležavamo skup variabla koje učestvuju u p i sa o(p) odnosno (p)o obeležavamo prvu odnosno zadnju variablu koje učestvuju u p.

3.2.1. Stav: Neka su p i q dva terma tako da var(p) = var(q) i o(p) = o(q) i (p)o = (q)o. Onda svaka distributivna polugrupa idempetenta zadovoljava identitet p = q.

Dokaz: Na osnovu 3.1.9.▲

Neka je X neprazan skup i F[X] skup svih uredjenih prava $\langle\langle a,b\rangle,M\rangle$, gde $a,b\in M\subset X$ i $card(M) < \infty$. Definišemo multiplikaciju na F[X] na sledeći način

$$\langle\langle a,b\rangle,M\rangle \cdot \langle\langle c,d\rangle,N\rangle = \langle\langle a,d\rangle, M\cup N\rangle$$

i neka je $Y = \{\langle\langle a,a\rangle,\{0\}\rangle \mid a\in X\}$.

3.2.2. Stav. Polugrupa $F[X]$ je slobodna distributivna polugrupa idempotenta i Y je njen sistem slobodnih generatora.

Dokaz: Neka je S jedna distributivna polugrupa idempotenta i f jedno preslikavanje od Y u S. Neka je $\langle\langle a,b\rangle,M\rangle \in F[X]$ i $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$, gde $a_1, \ldots, a_n \in X$ su različiti, $a = a_1$ i $b = a_n$ ili $a = b$.

Neka je

$$g(\langle\langle a,b\rangle,M\rangle) =$$

$$= f(\langle\langle a_1,a_1\rangle,\{a_1\}\rangle)\ldots f(\langle\langle a_n,a_n\rangle,\{a_n\}\rangle)\cdot$$

$$\cdot\ f(\langle\langle b,b\rangle,\{b\}\rangle$$

Očigledno je da g definiše jedno preslikavanje od $F[X]$ u S. što više $g|_Y = f$ i g je homomorfizam. Lako je videti da $F[X]$ je distributivna polugrupa idempotenta. Neka je G podpolugrupa od $F[X]$ generisana sa Y. Pretpostavimo da $G \neq F[X]$. Onda $\langle\langle a,b\rangle,M\rangle \notin G$ za neki $\langle\langle a,b\rangle,M\rangle \in F[X]$.

Kako $\langle\langle a,a\rangle,\{a\}\rangle\cdot\langle\langle b,b\rangle,\{b\}\rangle = \langle\langle a,b\rangle,\{a,b\}\rangle \in G$, onda postoji $c \in M$ tako da $a \neq c \neq b$. Neka je $N = M\setminus\{c\}$ onda $\langle\langle a,b\rangle,N\rangle \in G$. Onda

$$\langle\langle a,b\rangle,M\rangle = \langle\langle a,c\rangle,\{a,c\}\rangle\cdot\langle\langle a,b\rangle,N\rangle \in G$$

to je kontradikcija. Dakle X je skup generatora od $F[X]$ ▲

3.2.3. Posledica. Slobodna distributivna polugrupa idempotenta sa n generatora ima $(n^2+n)2^{n-2}$ elementa ▲

3.2.4. Posledica. Svaka konačno generisana distributivna polugrupa je konačna ▲

3.3. KONSTRUKCIJA SLOBODNE DISTRIBUTIVNE POLUGRUPE PREKO KOMUTATIVNE POLUGRUPE IDEMPOTENTA

Neka je $(S,+)$ jedna komutativna polugrupa idempotenta i φ, ψ dva njena homomorfizma koji zadovoljavaju sledeće uslove

(1) $\varphi \;\; = \psi$, $\psi \;\; = \psi$, $\varphi\psi = \psi\varphi$ i $\varphi\psi(x) = \varphi\psi(y)$ za sve $x,y \in S$.

3.3.1. Lema: Neka je $(S,+)$ komutativna polugrupa idempotenta i φ, ψ dva njena homomorfizma koji zadovoljavaju uslove (1). *U S definišemo multiplikaciju na sledeći način:*

(2) $xy = \varphi(x)+\psi(y)$

Onda $(S,\cdot)$ je distributivna polugrupa.

Dokaz: Neka su $x,y,z \in S$, onda

$$\begin{aligned} xyz &= \varphi(x)+\psi(yz) = \varphi(x)+\psi(\varphi(y)+\psi(z)) \\ &= \varphi(x)+\psi(\varphi(y))+\psi(z) \\ &= \varphi(x)+\psi(\varphi(y))+\psi\varphi(x)+\psi(z) \\ &= \varphi(xy)+\psi(xz) \\ &= xyxz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} yz\cdot x &= \varphi(yz)+\psi(x) = \varphi(\varphi(y)+\psi(z))+\psi(x) \\ &= \varphi(y)+\varphi(\psi(z))+\psi(x) \\ &= \varphi(y)+\varphi\psi(x)+\varphi\psi(z)+\psi(x) \\ &= \varphi(yx)+\psi(zx) \\ &= yxzx \end{aligned}$$

na taj način *dokazali smo da* $(S,\cdot)$ je distributivna polugrupa ▲

Dalje ćemo konstruisati slobodnu distributivnu polugrupu sa slobodnim sistemom generatora $\{x_i\}, i \in I$.

Neka je $(F,+)$ slobodna komutativna polugrupa idempotenta sa slobodnim sistemom generatora

$$\{a_i\}\cup\{b_i\}\cup\{c_i\}\cup\{d\},\ i\in I$$

Neka $(F,+)$ definišemo homomorfizme φ i ψ na sledeći način

$$(3) \qquad \varphi = \begin{pmatrix} a_i & b_i & c_i & d \\ b_i & b_i & d & d \end{pmatrix} \quad i \quad \psi = \begin{pmatrix} a_i & b_i & c_i & d \\ c_i & d & c_i & d \end{pmatrix}$$

3.3.2. Lema: Homomorfizam φ i ψ slobodne komutativne polugrupe idempotenta $(F,+)$ definisani preko (3) zadovoljavaju uslove (1) i $(F,\cdot)$ gde „·" je definisana preko (2) je distributivna polugrupa.

Dokaz: Homomorfizmi φ i ψ zadovoljavaju uslove (1) za to što to zadovoljavaju u sistemu slobodnih generatora. Da je $(F,\cdot)$ distributivna polugrupa to sledi na osnovu leme 3.3.1▲

3.3.3. Lema: Neka je $\{a_i\}$, $i\in I$ jedan sistem slobodnih generatora. Onda $(F[a_i,i\in I],\cdot)$ gde „·" je definisana preko „·" je slobodna distributivna polugrupa sa slobodnim sistemom generatora $\{a_i\},i\in I$.

Elementi iz $F[a_i,i\in I]$ su oblika

$$(4a) \qquad w_1 = a_{i_1}^{n_1}\left(\prod_{k=2}^{r-1} a_{i_k}\right)a_{i_r}^{n_r},\ \text{gde } a_{i_\nu} \neq a_{i_\mu} \text{ za } \nu \neq \mu$$

$$\text{i } n_1, n_r \in \{1,2\}.$$

ili

$$(4b) \qquad w_1 = a_{i_1}\left(\prod_{k=2}^{r} a_{i_k}\right)a_{i_1},\ \text{gde } a_{i_\nu} \neq a_{i_\mu} \text{ za } \nu \neq \mu$$

Neka su

$$(5a) \qquad w_2 = a_{j_1}^{m_1}\left(\prod_{l=2}^{s-1} a_{j_l}\right)a_{j_s}^{m_s}$$

ili

(5b) $\qquad w_2 = a_{j_1}(\prod_{l=2}^{s} a_{j_l})a_{j_1}$

iz $w_1 = w_2$ sledi da $r = s$ i $a_{i_1} = a_{j_1}$, $n_1 = m_1$ tako da izrazi a) ili b) ostaju oblika

(6) $\qquad \prod_{k=2}^{r-1} a_{i_k}$ i $\prod_{l=2}^{s-1} a_{j_l}$

Kako za $w_1 \neq a_{i_1}$ i $w_2 \neq a_{j_1}$ imamo

$$w_1 = \varphi(a_{i_1})+d+\psi(a_{i_n}) = b_{i_1}+d+c_{i_r}$$

i

$$w_2 = \varphi(a_{j_1})+d+\psi(a_{j_s}) = b_{j_1}+d+c_{j_s}$$

iz $w_1 = w_2$ dobijamo da $i_1 = j_1$ i $i_r = j_s$, a to znači iz (6) dobijamo da $a_{i_k} = a_{j_k}$, i $r = s$, $n_1 = m_1$ i $n_r = m_s$

Očigledno je da za konstrukciju $(F[a_i, i \in I], \cdot)$ nismo uzeli *minimalnu komutativnu polugrupu idempotenta* $(F,+)$.

Neka je $(F,+)$ slobodna komutativna polugrupa idempotenta sa slobodnim sistemom generatora

$\{a\} \cup \{b\} \cup \{c\} \cup \{d\}$

Neka su φ i ψ homomorfizmi od $(F,+)$ definisani na sledeći način

$$\varphi = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & b & d & d \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \psi = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & c & d \end{pmatrix}$$

Očigledno je da φ i ψ zadovoljavaju uslove (1).

3.3.4. Lema: $(F[a,c], \cdot)$ je slobodna distributivna polugrupa sa slobodnim sistemom generatora $\{a\} \cup \{c\}$ gde multiplikacija je data preko (2).

Dokaz: Svi elementi od F[a,c] su oblika

$a^m, c^n, a^m c^n, c^n a^m, a^m c^n a$ i $c^n a^m c$ gde $1 \leqslant n,m \leqslant 3$

jer koristeći (2) dobijamo da su to različiti elementi u (F,+) pa time oni su različiti i u (F[a,b],·) ▲

3.3.5. Posledica. Konačno generisana distributivna polugrupa je konačna ▲

3.4. SPLEI DISTRIBUTIVNA POLUGRUPA

U paragrafu 3.1 videli smo da distributivna polugrupa je poddirektni proizvod jedne polugrupe idempotenta i jedne *A* polugrupe. Direktni proizvod jedne polugrupe idempotenta i jedne polugrupe nazvali smo je splei polugrupa. U ovom paragrafu razmatraćemo splei distributivne polugrupe. Naveščemo nekoliko tvrdjenja čiji dokaz je analogan sa splei levo distributivnim polugrupama tako da njihov dokaz nećemo izvesti sem što ćemo navesti sa kojom tvrdjenjem je analogan.

3.4.1. Konstrukcija. Neka je $S \in \mathcal{D}$ onda na osnovu 3.1.6.(iii) S je disjunktna unija *A* polugrupa A(a),a∈I.

Neka su a,b∈I = Id(S). Ako je c∈A(a),d∈A(b) onda f(cd) = f(c)f(d) = ab (gde $f: a \to a^3$) i c,d∈A(ab). To znači da imamo preslikavanje $g_{a,b}: A(a) X A(b) \to A(ab)$ definisanu sa

$$g_{a,b}(c,d) = cd$$

koja zadovoljava uslove (1), (2) i (3) navedeni u 2.2.8. Obratno, neka je $I \in \mathcal{D}$ i A(a),a∈I familija disjunktnih *A* polugrupa.

Za svaki $a,b\in I, a\neq b$ neka je dato preslikavanje $g_{a,b}:A(a)XA(b)\to$ $\to A(ab)$ koja zadovoljava uslove (1), (2) i (3) iz 2.2.8 za sve $a,b,c\in A, a\neq b$ $c\neq ab$ i neka je $S = \cup A(a)$. Definišemo operaciju $*$ na S na sledeči način:

$$x*y = xy \quad \text{ako} \quad x,y\in A(a), a\in I$$

i

$$x*y = g_{a,b}(x,y) \quad \text{ako} \quad x\in A(a), y\in A(b) \text{ i } a\neq b.$$

Lako je videti da $S\in \mathcal{D}$, $Id(S)\simeq I$ i za $x\in Id(S)$ $A_{S(*)}(x)$ je jednaka sa A(a), kada $x\in A(a)$.

3.4.2. Stav: Svaka $\mathcal{D}$ polugrupa konstruisana preko jedne $\mathcal{I}\cap\mathcal{D}$ polugrupe i familije disjunktnih $\mathcal{A}$ polugrupa opisana je postupkom 3.4.1. ▲

3.4.3. Lema: Neka je $S\in\mathcal{D}$. Onda S je splei polugrupa akko postoji jedna $\mathcal{A}$ polugrupa T i izomorfizam $g_a:A(a)\to T$, $a\in Id(S)$ tako da važi $g_a(c)g_b(d) = g_{a,b}(cd)$ za sve $c\in A(a)$, $d\in A(b)$; $a,b\in Id(S)$ i $a\neq b$.

Dokaz: Analogan sa dokazom 2.3.1. ▲

3.4.4. Lema: Ako je $S\in\mathcal{D}$ i $S\notin\mathcal{A}$ onda sledeći uslovi su ekvivalentni.

(i) S je splei polugrupa i A(a) je Z polgrupa, $a\in Id(s)$

(ii) S je splei polugrupa i $cd\in Id(S)$ za sve $c,d\in S$, $c\in A(a)$, $d\in A(b)$, $a\neq b$.

(iii) S je balansirana polugrupa i A(S) je z polugrupa.

Dokaz: Analogan sa dokazom 2.3.2. ▲

3.4.5. Stav: Neka je $S \in \mathcal{D}$ tako da $A(S)$ je Z polugrupa i $\mathrm{card}(A(a)) = \mathrm{card}(A(b))$ za sve $a,b \in \mathrm{Id}(S)$. Onda S je splei polugrupa.

Dokaz: Analogan sa dokazom 2.3.3 ▲

3.4.6. Stav: Neka je $S \in \mathcal{D}$, $\mathrm{Id}(S)$ kvazitrivalna polugrupa i $\mathrm{card}(A(a)) = 2$ za sve $a \in \mathrm{Id}(S)$. Onda S je splei polugrupa.

Dokaz: Analogan sa dokazom 2.3.4.▲

3.4.7. Stav: Neka je $I \in \mathcal{I} \cap \mathcal{D}$ i $T \in \mathcal{A}$. Pretpostavimo da najmanje jedan od sledećih uslova se zadovoljava:

(a) I je netrivialna i T nije Z polugrupa

(b) I nije kvazitrivialna i T je dvoelementna Z polugrupa.

(c) I je netrivialna i T je Z polugrupa koja sadrži najmanje tri elementa.

Onda postoji ne splei balansirana $\mathcal{D}$ polugrupa S tako da $\mathrm{Id}(S) \simeq I$ i $A(s) \simeq T$, $a \in \mathrm{Id}(S)$.

Dokaz: Anologan sa dokazom 2.3.5. ▲

3.4.8. Posledica: Neka je $I \in \mathcal{I} \cap \mathcal{D}$ i $T \in \mathcal{A}$. Onda svaka balansirana $\mathcal{D}$ polugrupa S gde $\mathrm{Id}(S) \simeq I$ i $A_S(a) \simeq T$, $a \in \mathrm{Id}(S)$, je splei polugrupa akko se zadovoljava najmanje jedan od sledećih uslova:

(i) I je trivialna

(ii) I je trivialna

(iii) I je kvazitrivialna i T je dvoelementna Z polugrupa. ▲

REZYME

Në këtë punim jan shqyrtuar gjysmëgrupet mediale dhe përgjitsimet e tyre. Eshtë dhënë përkufizimi i gjysmëgrupeve gjysmëmediale, karakterizimi i gjysmëgrupeve gjysmëmediale përmes gjysmëgrupeve të Archimedit. Më tutje janë shqyrtuar gjysmëgrupet e majta distributive, splei gjysmëgrupet e majta distributive, gjysmëgrupet e lira të majta distributive, gjysmëgrupet e majta distributive me gjenerator të fundëm, gjysmëgrupet distributive dhe splei gjysmëgrupet distributive.

ABSTRACT

In these thesis the medial semi-groups and their generalization are studied, it is given the definition of semi medial semi groups, semi medial semi groups characterization by means of Archimedi semi groups. The left distributiv semi groups, the splitting left distributiv semi groups, free left distributiv semi groups, the left distributiv semi groups with finite generators, the distrivutiv semi groups and splitting distributiv semi groups are also treated.

LITERATURA

[1] A.H. Clifford, G.B. Preston, *The algebraie theary of semigroups, Volume 1*, Americ. Math. Soc. 1964

[2] A.H. Clifford, G.B. Preston, *The algebric theary of semigroups, Volume 2*, Amer. Math. Soc. 7, 1967

[3] A. Zejnullahu, *Splitting left distributive semigroups*, (to apper in Acta Univ. Car. Math. Phys.)

[4] A. Zejnullahu, *Free left distributive semigroups*, (to apper in. Acta Univ. Car. Math. Phys.)

[5] C.F. Fennemore, *All varieties of bands*, Semigroup Forum 1 (1970), 172-179

[6] D. McLean, *Idempotent semigroups*, Amer. Math. Monthly 61 (1954), 110-113

[7] E. Hewit and H.S. Zuckerman, *The l-algebra of comutative semigroups*, Trans. Am. Math. Soc. 83(1956), 70-97

[8] J. Ježek, T. Kepka, P. Nemec, *Distributive grupoids*, Rozpravy ČSAV, Rada Mat. a Prir. Véd 91/3 (1981)

[9] J. Ježek, T. Kepka, *Tree comutative idempotent abelian groups*, Acta. Univ. Car. Math. Phys. Vol. 17, Nº 2 (1974), 13-19.

[10] J. Ježek, T. Kepka, *Tree entropic grupoids*, Comm. Math. Univ. Car. 22 (1981), 223-233.

[11] J. Ježek, T. Kepka, *Semigroup representations of medial grupoids*, Comm. Math. Univ. Car. 22(1981) 513-524

[12] J. Ježek, T. Kepka, *Quasitrivial and Nearly Quasitrivial distributive groupoids and semigroups,* Acta. Univ. Car. Math. Phys. Vol 19, N$^{\underline{o}}$ 2 (1978), 24-44.

[13] J.M. Howie, *An introduction to semigroups theary,* Acad. Press, London-New York-San Francisco, 1976.

[14] J.L. Chrislock, *On medial semigroups,* Journal of algebra 12(1969), 1-9.

[15] J. Ivan, *On the decomposition of simple semigroups into a direct product,* Mat-Fyz. časopis Sloven. Akad. Vied 4 (1954), 181-202.

[16] J.A. Gerhard, *Subdirecthy irreducible idempotent semigroups,* Pacif. J. of Math. 39(1971), 669-676

[17] M. Petrich, *Lectures in Semigroups,* Akad. Verlag-Berlin, 1977.

[18] M. Petrich, *Introduction to Semigroups,* Columbus, Obio 43216, 1973.

[19] M. Petrich, *On the structure of a class of comutative semigroups,* Czech. Math. J. 14(1964), 147-153

[20] M. Yamada, *Note on idempotent semigroups,* Proc. Jap. Acad. 34(1958), 668-671.

[21] M. Yamada and N. Kimura, *Note on idempotent semigroups II,* Proc. Jap. Acad. 34(1958), 110-112.

[22] N. Božović i Ž. Mijajlović, *Uvod u teoriju grupa,* Naučna knjiga, Beograd, 1983.

[23] P. Goralčik, A. Goralčikova, V. Koubek, *How much semigroups structure is needed to encode graphs,* Informatique theorique et Applications, Vol. 20, N$^{\underline{o}}$ 2(1986), 191-206.

[24] P. Goralčik and V. Koubek, *There are too many subdirecthy irreducible bands,* Algebra Universalis 15 (1982), 187-194.

[25] R. Strecker, *Konstruktion freier medialer Halbgrupen aus komutativen Halbgrupen,* Heft 2(1982), 265-270.

[26] R. Strecker, *Construction of medial semigroups,* Comm. Math. Univ. Car. 25, 4(1984), 689-697

[27] R. Strecker, *Uber entropische Grupoide,* Math. Nachr. 64 (1974), 361-371.

[28] S. Prešić i M. Prešić, *Uvod u matematičku logiku,* Matematički institut, Beograd, 1979.

[29] S. Markovski, *On distributive semigroups,* God. Zbor. Matem. Fak. 30, 1979, 15-27

[30] T. Kepka, *Varieties of left distributive semigroups,* Acta. Univ. Car. Math. Phys. 25/1(1984), 3-18.

[31] T. Kepka and A. Zejnullahu, *Finitely generaled left distributive semigroups* (to apper in Acta. Univ. Car. Math. Phys.)

[32] T. Tamura, *Notes on medial archimedean semigroups without idempotent,* Proc. Japan. Acad. 44(1968).

[33] T. Tamura and N. Kimura, *On decompositions of a commutative semigroups,* Kadai. Math. Sem. Rep. (1954), 109-112.

[34] T. Tamura, *Construction of trees and comutative Archimedean semigroups,* Math. Nach. 36(1966), 255-287.

[35] T. Tamura, *Decompositions of a completely simple semigroups,* Osaka Math. J. 12(1960), 219-275.

[36] V. Volenec, *Extension of Toyodas theorem on entropic groupoids,* Math. Nachr. 102(1981), 183-188.

B I O G R A F I A

Rodjen sam 14.06.1957. u Ramjane SO Vitina. Osnovnu školu sam završio u Ramjane, srednju u Prištini i studije u Beogradu. Godine 1983. magistrirao sam na temu "Odlučivost nekih formalnih teorija" na PMF u Beogradu. Sada radim na Gradjevinskom-Arhitektonskom fakultetu Univerziteta u Prištini kao predavač predmeta matematike.