DO AS. 7

UNIVERZITET U BEOGRADU

Matematički fakultet Prirodno-matematičkih fakulteta

Univerzitet u Beogradu
Prirodno-matematički fakulteti
MATEMATIČKI FAKULTET
BIBLIOTEKA
Broj Dokt. 15/1 Datum 13.07.1989.

Zoran I. Knežević

SOPSTVENI ELEMENTI MALIH PLANETA KAO PARAMETRI KLASIFIKACIJE U FAMILIJE

– doktorska disertacija –

Beograd, 1989

*

* *

Zahvaljujem se Prof. Dr. B. Popoviću, rukovodiocu teze, za razumevanje, savete i podršku, a brojnim kolegama i prijateljima za svesrdnu i nesebičnu pomoć pri njenom uobličavanju, izradi i tehničkoj pripremi.

* *

*

SADRŽAJ

1. UVOD 1

1.1 Poreklo i evolucija malih planeta 1

1.2 Identifikacija familija malih planeta - parametri, metode, problemi 5

1.3 Zadatak i sadržaj ove teze 11

2. HRONOLOGIJA 15

3. TEORIJE SEKULARNIH PROMENA ELEMENATA KRETANJA MALIH PLANETA 34

3.1 Diferencijalne jednačine promena elemenata kretanja i njihovo integraljenje 34

3.2 Linearna teorija 40

3.3 Teorija Williams-a 50

3.4 Teorija Yuasa-e 69

3.4.1 Metod kanoničkih transformacija 70

3.4.2 Definisanje polaznog Hamiltonijana 80

3.4.3 Eliminisanje kratko-periodičnih članova 87

3.4.4 Prelaz na Poincaré-ove promenljive. Eliminisanje dugo-periodičnih članova 103

3.5 Problem malih imenilaca 114

4. TEORIJE KRETANJA VELIKIH PLANETA 119

4.1 Pregled novijih doprinosa 119

4.2 Koordinatni sistemi, elementi i konstante planetskog kretanja 122

5. REZULTATI 127

5.1 Laplace-ovi, LeVerrier-ovi i Yuasa-ini koeficijenti 127

5.2 Kratko-periodični poremećaji 134

5.2.1 Slučaj tri tela 139

5.2.2 Slučaj četiri tela 144
5.2.3 Greške i njihovi izvori 152
5.3 Dugo-periodični poremećaji 161
5.3.1 Slučaj tri tela 166
5.3.2 Slučaj šest tela 174
5.3.2.1 *Koronis* 177
5.3.2.2 *Eos* 188
5.3.2.3 *Themis* 195
5.3.2.4 *Flora* 204
5.3.3 Sekularne rezonance 224
6. MOGUCNOSTI ZA BUDUCI RAD 237
7. ZAKLJUČCI 251
REFERENCE 259

Univerzitet u Beogradu
Prirodno-matematički fakultet
MATEMATIČKI FAKULTET
BIBLIOTEKA

Broj _____ ***Datum*** _____

1. UVOD

1.1 Poreklo i evolucija malih planeta

Način nastanka, prvobitne dinamičke i fizičke osobine i potonja evolucija malih planeta predstavljaju neka od najvažnijih pitanja savremene kosmogonije. Smatra se, naime, da su upravo male planete oni članovi Sunčevog sistema, koji su se u globalu relativno najmanje izmenili u odnosu na svoje prvobitne osobine i da, stoga, odgovori na pomenuta pitanja mogu značajno doprineti rešavanju mnogih drugih pitanja i problema vezanih za poreklo i evoluciju Sunčevog sistema u celini. Potpuniju i neposredniju informaciju o sastavu, stanju i kretanju materije u ranom Sunčevom sistemu mogle bi možda da obezbede još jedino tzv. "nove" komete; to su one komete koje prvi put prolaze kroz unutrašnji deo sistema i čije osobine još nisu bitno narušene pod uticajem Sunca i velikih planeta. Pojava ovih kometa je, međutim, sporadična, a sredstva koja stoje na raspolaganju za njihovo izučavanje još uvek nedovoljno efikasna, tako da je ovaj potencijalno najinteresantniji izvor informacija za sada nemoguće na odgovarajući način iskoristiti. Male planete, stoga, koje su nam permanentno dostupne, čije ispitivanje je moguće i sa relativno jednostavnim, postojećim sredstvima i koje zahvaljujući svojoj brojnosti i raznovrsnosti pružaju uvid u mnoge modalitete gornjih pitanja, predstavljaju gotovo idealan predmet za ovakva istraživanja.

Brojne, manje ili više egzotične hipoteze o načinu nastanka malih planeta iznesene su u ovih skoro dva veka od

njihovog otkrića. Već je *Olbers*, otkrivši tek drugu malu planetu - *Pallas*, pretpostavio da su male planete nastale raspadom neke ranije postojeće "normalne" planete, a istu ideju razrađivali su i neki savremeni autori (napr. Ovenden, 1972; Van Flandern, 1977), navodeći kao mogući uzrok raspada eksploziju hipotetičke planete izazvanu njenim ulaskom unutar Roche-ove granice Jupitera i smeštajući ovaj događaj u vreme od pre nekoliko miliona godina. Gaska (1974) u sličnom kontekstu čak sugeriše mogućnost da je planeta pra-roditelj malih planeta u stvari Mars. Značajni problemi, međutim, s kojima se sukobljavaju ove hipoteze i niz posmatračkih dokaza suprotnih teorijskim predviđanjima izvedenim na osnovu tih hipoteza (promene hemijskog sastava malih planeta sa porastom udaljenosti od Sunca, prostorni raspored njihovih putanja, i sl.) doveli su do toga da se poreklo malih planeta pokuša objasniti sa sasvim drugih stanovišta.

Danas se smatra da je čitav planetski sistem nastao putem akrecije manjih čvrstih tela i čestica u protoplanetskom oblaku, a razne varijante ove teorije, koju je u osnovi formulisao *Schmidt* još 1944. godine, na razne načine objašnjavaju u tom sklopu nastanak malih planeta. Tako napr., *Kuiper* (1950, 1953) vidi poreklo malih planeta upravo u takvom procesu akumulacije, u kojem se prvo formira stotinak tela - tzv. planetezimala, sa prečnicima većim od 50 km, čiji, zatim, međusobni sudari i fragmentacija menjaju originalnu populaciju i postepeno dovode do današnjeg sistema malih planeta. *Alfven* (1964, 1969), nasuprot tome, tvrdi da sudari nisu igrali neku značajniju ulogu u evoluciji populacije malih planeta i da

proces akumulacije i narastanja malih planeta u stvari još uvek traje. Ipak, prema najverovatnijem i danas uglavnom opšte prihvaćenom scenariju (Safronov, 1979), male planete nastaju kao posledica prekida u formiranju jedne velike, masivne planete, do kojeg dolazi zbog poremećajnog dejstva tela iz susedne, Jupiterove zone protoplanetarnog diska. Zahvaljujući većoj gustini čvrstog materijala u zoni Jupitera i gravitacionoj nestabilnosti u tom delu diska, tela u ovoj zoni su brže rasla i postala daleko veća od onih u zoni malih planeta. Međusobne gravitacione interakcije uvećavale su ekscentričnosti i nagibe njihovih putanja, i kada je najveće od njih, Jupiterov embrio, naraslo na oko 10^{24} kg, ova tela počela su da prodiru u zonu malih planeta. Tu su ona kupila i odnosila sa sobom mnogo materijala i već formiranih manjih tela, a preostalima su znatno uvećala brzine (tipične relativne brzine malih planeta su danas oko 5 km/sec). Uvećanje brzina tela u zoni malih planeta dovelo je, sa svoje strane, do prelaza sa procesa sudarne akumulacije malih planeta na upravo suprotan proces njihove fragmentacije. Ovaj prelaz označava ujedno i kraj faze formiranja i početak dugotrajne, postepene evolucije malih planeta, čiji rezultat je nama poznata, današnja populacija.

Kolika je i kakva bila ta prvobitna populacija malih planeta sa početka faze evolucije, ne može se sa sigurnošću tvrditi, ali je svakako interesantna podudarnost u tom smislu nađena u nekim najnovijim istraživanjima (Davis et al., 1985; Farinella et al., 1985). U jednom slučaju je, naime, pod određenim ograničavajućim uslovima, nekoliko pretpostavljenih

prvobitnih populacija podvrgnuto simuliranoj sudarnoj evoluciji i rezultujuća raspodela po veličini upoređivana sa posmatranom, dok je u drugom analizirana posmatrana statistika parametara rotacije malih planeta i rekonstruisana njihova hipotetička evolucija, da bi se u oba slučaja dobio praktično isti rezultat, tj. početna populacija samo nekoliko puta veća (brojnija) od sadašnje. Procenjeno je, inače, da ukupna masa nama poznatog današnjeg sistema malih planeta iznosi približno $3.0 \cdot 10^{21}$ kg (Kresák, 1977).

Međusobni sudari malih planeta, a posebno katastrofalni sudari koji dovode do raspada prvobitnih tela, igrali su, dakle, po svemu sudeći, ključnu ulogu u evoluciji sistema malih planeta, određujući i menjajući opšte osobine populacije, odnosno specifične osobine pojedinih objekata. Pored osnovne evolucione funkcije - fragmentacije većih i formiranja manjih malih planeta - sudari su verovatno odgovorni i za ubacivanje malih planeta Aten, Apollo i Amor tipa, kao i brojnih meteorita u unutrašnji deo Sunčevog sistema, oni, nadalje, menjaju revolucije i rotacije malih planeta, u velikoj meri utiču na njihov oblik, izbacuju na površinu materijal iz unutrašnjosti tela itd.

Male planete su dovoljno brojne i njihovi poprečni preseci dovoljno veliki da većina njih pretrpi katastrofalni sudar u periodu od njihova nastanka (Wetherill, 1967; Davis et al., 1979; Farinella et al., 1982). Nakon pionirskog rada Piotrowski-og (1953), koji je prvi pokazao da su katastrofalni sudari među malim planetama mogli biti česti u astronomskim vremenskim intervalima, sledio je niz analitičkih studija i

modela sudarne evolucije malih planeta (napr. Kuiper et al., 1958; Anders, 1965; Hartmann and Hartmann, 1968; Dohnanyi, 1969; Hellyer, 1970; Chapman and Davis, 1975; Davis et al., 1979; Farinella et al., 1982; Davis et al., 1985), koji su se zasnivali na raznim posmatranim fizičkim i dinamičkim osobinama malih planeta, a u novije vreme i na rezultatima sve brojnijih laboratorijskih eksperimenata (napr. Fujiwara et al., 1977; Fujiwara and Tsukamoto, 1980, 1981; Capaccioni et al., 1984).

Najozbiljnijim posmatračkim dokazima u prilog sudarne evolucije malih planeta smatraju se obično: karakterističan izgled raspodele malih planeta po veličini (masi), evidentne korelacije ugaone brzine (momenta) rotacije malih planeta i njihove veličine, odnosno veličine i oblika, postojanje familija malih planeta, itd.

1.2 Identifikacija familija malih planeta - parametri, metode, problemi

Koncept nastanka familija malih planeta putem sudara i raspada "roditeljskih" tela obezbeđuje familijama izuzetno važnu ulogu jednog od ključnih argumenata i posmatračkih dokaza u prilog teorije trajne sudarne evolucije sistema malih planeta. One, međutim, na taj način postaju i prirodni test-uzorak, čiji nastanak i fizičke i dinamičke osobine moraju predvideti i rekonstruisati sve sudarne teorije i svi modeli sudarnih događaja, odnosno laboratorijski eksperimenti, koji pretenduju da realno predstave stvarne događaje. S druge strane, ovako shvaćene familije omogućuju izučavanje hemijskog sastava i strukture unutrašnjosti malih planeta, značaja

samogravitacione reakumulacije fragmenata i uticaja na oblik i rotacije naročito najvećih članova familija, fizike sudara na hiperbrzinama itd.

Klasifikacija malih planeta u familije zasniva se na podudarnosti heliocentričnih putanja jednog broja malih planeta, pri čemu se, u praksi, familije definišu kao koncentracije malih planeta u trodimenzionom faznom prostoru tzv. <u>sopstvenih elemenata kretanja</u> - sopstvene velike poluose a_p, sopstvene ekscentričnosti e_p, i sopstvenog nagiba i_p. Poznata je činjenica, međutim, da je klasifikacija malih planeta u familije nepouzdana, na šta ukazuje niz podataka i rezultata proisteklih kako iz ranijih, tako i iz najnovijih istraživanja. Tako se napr. klasifikacije raznih autora međusobno znatno razlikuju (Carusi and Valsecchi, 1982), pa je, stoga, pripadnost pojedinih malih planeta određenim familijama pod velikim znakom pitanja, a i samo postojanje mnogih "familija", naročito među onima sa svega nekoliko članova, krajnje je problematično. Nadalje, rezultati istraživanja fizičkih osobina malih planeta - članova familija često su kontradiktorni; dok kod nekih familija praktično svi članovi pripadaju istom taksonomskom tipu, implicirajući zajedničko poreklo i homogeno, nediferencirano roditeljsko telo, kod drugih, opet uglavnom manjih familija, ponekad nailazimo na tako širok dijapazon raznih tipova, da je teško i zamisliti, a pogotovo objasniti postojanje eventualnog roditeljskog tela tako komplikovane unutrašnje građe (Gradie et al., 1979; Zellner et al., 1985; Chapman, 1985). Zatim, polja relativnih brzina članova familija u odnosu na najveće telo u familiji

pokazuju izrazitu statističku anizotropiju (Zappalá et al., 1984), itd.

Dva su osnovna uzroka ovakve situacije: nedovoljna tačnost sopstvenih elemenata - parametara klasifikacije (obično se smatra da je za pouzdanu klasifikaciju kod sva tri sopstvena elementa potrebno obezbediti tačnost na nivou jednog hiljaditog) i nesavršenost klasifikacionih metoda (subjektivnost procedura i kriterijuma selekcije, nekompletnost razmatranih uzoraka, itd.).

Nedovoljna tačnost sopstvenih elemenata kretanja malih planeta do sada korišćenih u funkciji parametara klasifikacije u familije posledica je, naravno, nesavršenosti teorija sekularnih poremećaja upotrebljavanih za njihovo izračunavanje. Uglavnom su, naime, u te svrhe korišćene samo dve različite teorije sekularnih poremećaja malih planeta i to: klasična, linearna teorija *Lagrange*-ovog tipa (Brouwer and Clemence, 1961) i semianalitička teorija višeg stepena *Williams*-a (1969). *Kozai* (1979a, 1979b, 1979c) je, doduše, pokušao sa primenom jedne znatno uprošćene varijante teorije sekularnih poremećaja višeg reda i stepena, ali je umesto sopstvenih elemenata u funkciji parametara klasifikacije primenio pored srednje velike poluose i minimalni nagib i_m, koji odgovara argumentu perihela $\omega_p = 90^\circ, 270^\circ$, i invarijantu prvog reda $\Theta = (1 - e^2)^{1/2} \cos i$, s nagibom i izraženim u odnosu na putanjsku ravan Jupitera.

Osnovni nedostaci linearne teorije dobro su poznati:

- u razvoju funkcije poremećaja uzimaju se u obzir samo članovi prvog reda u odnosu na poremećajnu masu i drugog stepena u ekscentričnosti i nagibu;

- u potpunosti se zanemaruju kratko-periodični poremećaji, koji kod malih planeta bliskih komenzurabilitetima napr. mogu biti značajni;

- u praksi je, povrh toga, u svim dosadašnjim određivanjima sopstvenih elemenata malih planeta pomoću ove teorije, za izračunavanje prinudnih oscilacija korišćena sada već zastarela i prevaziđena teorija sekularnih poremećaja velikih planeta *Brouwer*-a i *Van Woerkom*-a (1950).

Što se *Williams*-ove teorije tiče, njene najvažnije slabosti mogu se svesti na sledeće:

- teorija je prvog reda u odnosu na poremećajnu masu, s tim što su u cilju razdvajanja slobodnih i prinudnih oscilacija odbačeni svi članovi drugog i višeg stepena po ekscentričnosti i nagibu poremećajne planete, dok je u preostalim planetskim članovima uveden niz manje ili više značajnih aproksimacija (napr. $\cos i' \simeq 1$; $r' \simeq a'(1 - e'\cos f')$ i sl.);

- sopstveni elementi su definisani kao funkcije vremena i određeni tako da odgovaraju sopstvenom argumentu perihela $\omega_p = 0^\circ$, što predstavlja, u stvari, njihove ekstremne vrednosti (minimalnu za ekscentričnost i maksimalnu za nagib) i čini ih nepodesnim napr. za izučavanje načina nastanka familija malih planeta;

- velika poluosa se u svim računima u okviru ove teorije smatra konstantnom i zanemaruju se njeni kratko-periodični poremećaji; takođe, pri eliminisanju kratko-periodičnih poremećaja ostalih elemenata uzima se u obzir samo nekoliko najvećih članova;

- kod praktičnog određivanja sopstvenih elemenata malih

planeta *Williams* (1979) je takođe koristio pomenutu prevazidenu teoriju velikih planeta *Brouwer*-a i *Van Woerkom*-a, itd.

Nije na odmet pomenuti i činjenicu da je postupak izračunavanja sopstvenih elemenata po ovoj teoriji izuzetno glomazan i komplikovan i da zahteva upotrebu velikih, brzih računara (tako napr. za potpuno opisivanje sekularnih poremećaja jedne male planete treba odrediti 156 promenljivih, a za svaku od njih je neophodno analitički izračunati jedan eliptički integral i izvršiti dve numeričke integracije). Sama teorija, inače, i detalji izračunavanja nisu nikad objavljeni u dostupnoj astronomskoj literaturi (jedini izvor informacija je *Williams*-ova doktorska disertacija iz 1969. godine, u kojoj su, međutim, sva ta pitanja tretirana uglavnom načelno). To praktično znači da se rezultati ove teorije za sada ne mogu reprodukovati, niti im se može ispitati tačnost, a ne mogu se u tom smislu ni direktno porediti sa rezultatima drugih procedura.

Najzad, bitne nedostatke *Kozai*-jevog pristupa ilustruju sledeće činjenice:

- uvedena je pretpostavka da se sve poremećajne planete kreću po kružnim putanjama u ravni Jupiterove putanje (čime se postiže da, nakon osrednjavanja jednačina kretanja po srednjim anomalijama male planete i poremećajnih planeta, komponenta ugaonog momenta $(\tilde{\mu} a)^{1/2} \theta$ postaje konstantna);

- za izračunavanje sekularnih poremećaja prvog reda u odnosu na poremećajnu masu, u razvoju funkcije poremećaja se koristi svega nekoliko najvažnijih članova drugog i četvrtog stepena u ekscentričnosti i nagibu;

- parametri koji se koriste za klasifikaciju nisu međusobno sasvim nezavisni.

Pomenimo, konačno, i pomalo iznenađujući podatak da, u stvari, nikad do sada nije napravljena ni jedna ozbiljnija analiza tačnosti sopstvenih elemenata malih planeta. Uglavnom su se autori zadovoljavali uopštenim konstatacijama tipa: "greška iznosi nekoliko jedinica treće decimale", ili "može se očekivati da će objekti u blizini rezonanci, kao i oni čije se putanje seku sa putanjama unutrašnjih planeta, imati sopstvene elemente manje tačnosti", i sl.

Daleko veće šarenilo metoda i postupaka nego što ga imamo kod izbora i izračunavanja parametara klasifikacije malih planeta u familije, prisutno je kod druge faze u procesu definisanja familija - utvrđivanja pripadnosti malih planeta familijama. Tu je, naime, praktično svaki autor koristio neku svoju varijantu ili proceduru selekcije, manje ili više različitu od ostalih. Tako sada paleta ovih postupaka obuhvata, s jedne strane, one sasvim "primitivne", kao napr. obično grafičko predstavljanje parametara klasifikacije u odgovarajućim ravnima i izdvajanje koncentracija "od oka" (Brouwer, 1951; Kozai, 1979b), zatim neke čak pomalo bizarne, kao kod *Williams*-a (1979) napr., koji je pravio parove stereo projekcija sopstvenih elemenata za pojedine delove prstena malih planeta, na taj način preliminarno identifikovao familije i na kraju primenjivao test na bazi *Poisson*-ove verovatnoće, do, konačno, onih koji se zasnivaju na raznim statističkim (Arnold, 1969; Carusi and Massaro, 1978), ili statističko - dinamičkim (Lindblad and Southworth, 1971) kompjuterskim

tehnikama (particle-in-the-box, *D*-criterion, *G*-mode i sl.). Potpunoj konfuziji na ovom planu doprinose i najčešće sasvim subjektivno odabrani kriterijumi za odlučivanje o pripadnosti konkretnih objekata familijama, tj. razni nivoi odbacivanja, razne *Poisson*-ove verovatnoće, kritični pragovi rastojanja u faznom prostoru parametara klasifikacije, itd. Na žalost, time se lista problema ne iscrpljuje i treba joj dodati i one u vezi raslojavanja familija i gubitka izvesnog broja članova originalnih familija usled uticaja i rasporeda bliskih rezonanci, nejednake gustine polja malih planeta u raznim oblastima prstena, eventualnih višestrukih sekundarnih sudara među fragmentima nastalim u primarnim katastrofalnim događajima (čime se napr. pokušalo objasniti kompleksnu strukturu familije *Flora*) itd.

1.3 Zadatak i sadržaj ove teze

Jasno je, na osnovu svega napred izloženog, da još postoje mnogobrojni problemi i poteškoće koje treba rešiti da bi se dobila produbljenija i sveobuhvatnija predstava o familijama malih planeta, načinu njihovog nastanka i dinamičkoj evoluciji, fizičkim osobinama članova i sl. Preduslov za rešavanje svih tih pitanja je jednoznačna i precizna definicija familija, i to kako sa aspekta realnosti svake pojedine familije, tako i u pogledu pouzdanog identifikovanja njihovog članstva, a preduslov za dobijanje takvih definicija je raspolaganje sa dovoljno tačnim parametrima i procedurama za klasifikaciju malih planeta u familije. Sopstveni elementi kretanja, koji se

koriste kao parametri u klasifikaciji, nisu dovoljno tačni i o tome postoji niz, doduše, indirektnih indicija i dokaza, a iz istog razloga se ni za do sada korišćene procedure identifikacije familija ne bi moglo reći da ulevaju mnogo poverenja.

Očigledna je, otud, potreba da se opisana situacija popravi i unapredi, pa je prevashodni zadatak i ove teze bio da se to pokuša bar u pogledu jednog od pomenuta dva suštinska problema vezana za identifikaciju familija - problema nedovoljne tačnosti sopstvenih elemenata. Naravno, reč je o složenom i obimnom zadatku, koji se sastoji od više zasebnih celina i faza, ali koje tek sve zajedno, zaokružene i kompletirane, obezbeđuje da se postavljeni cilj eventualno i ostvari.

Prvo je, bez sumnje, neophodno odabrati najbolju savremenu teoriju sekularnih poremećaja kretanja malih planeta, kod koje bi nedostaci uočeni kod ranije korišćenih teorija bili izbegnuti, ili bar svedeni na najmanju meru, odnosno koja će obezbediti sopstvene elemente bitno bolje tačnosti od one koju imaju do sada raspoloživi rezultati. S tim u vezi, treba na isti način odabrati i najbolju savremenu teoriju kretanja velikih planeta i na odgovarajući način prilagoditi njene parametre koji se, kao poznate veličine, koriste u računu poremećaja malih planeta.

Naredna faza sastoji se u razradi i pripremi konkretnih procedura za izvođenje sopstvenih elemenata i njihovoj praktičnoj primeni, iza čega prirodno sledi utvrđivanje tačnosti tako dobijenih rezultata. Pri tom treba obuhvatiti što

više raznih aspekata i iskoristiti što više raznih mogućnosti za ispitivanje tačnosti i pouzdanosti rezultata, odnosno za testiranje na sve one specifične uslove i zahteve u vezi sa njihovom namenom i daljom primenom (napr. postizanje određenog nivou tačnosti uslovljenog potrebama klasifikacije, dugo-periodična stabilnost rezultata, poređenje sa do sada raspoloživim rezultatima, zavisnost tačnosti od usvojenog modela Sunčevog sistema i sl.).

Nakon toga, posebnu pažnju treba posvetiti identifikaciji i analizi uzroka koji dovode do pojave grešaka u računu poremećaja i izvođenja sopstvenih elemenata malih planeta, njihovim pojedinačnim uticajima i ukupnim efektima, odnosno načinima za njihovo otklanjanje ili neutralisanje. Jasno da se tu, pre svega, mora povesti računa o uticajima ograničavanja razvoja funkcije poremećaja na članove određenog reda i stepena, o sekularnim rezonancama i rezonancama u srednjem kretanju, (ne)tačnosti parametara kretanja velikih planeta i sl.

Konačno, u diskusiji rezultata i zaključcima, treba se osvrnuti na pitanja u vezi njihove dalje primene, u klasifikaciji malih planeta u familije, implikacije na istraživanja fizičkih osobina i sudarne evolucije familija itd., da bi se na kraju ponudila neka viđenja i ideje za budući rad na svim ovim problemima.

Konkretno i sveobuhvatno razrađene, navedene faze, a u tom sklopu i svi relevantni modaliteti pojedinih pitanja, odnosno zadatka u celini, čine sadržaj ove teze: u glavi 2. hronolo- su izneseni neki najvažniji dosadašnji rezultati istraživ

vezi familija malih planeta; u glavi 3. su detaljno opisane sve analitičke teorije sekularnih poremećaja kretanja malih planeta i objašnjene osnove ovde primenjene procedure za izvođenje sopstvenih elemenata; glava 4. posvećena je teorijama kretanja velikih planeta i izboru one koja najbolje odgovara potrebama našeg projekta; u glavi 5. izloženi su rezultati do kojih smo došli, analiza njihove tačnosti i diskusija uzroka koji dovode do grešaka; glava 6. bavi se mogućnostima za budući rad u smislu daljeg razvoja teorije i unapređenja tačnosti rezultata, da bi, konačno, u glavi 7. bili sumirani rezultati teze i ponuđeni odgovarajući zaključci.

2. HRONOLOGIJA

Familije malih planeta otkrio je japanski astronom *K. Hirayama*. U svom pionirskom radu iz 1918. godine (Hirayama, 1918) on je ukazao na činjenicu da u raspodelama malih planeta po oskulatornom srednjem kretanju n, ekscentričnosti e, i nagibu i postoje tu i tamo izvesne koncentracije, a zatim je pokazao da prema kriterijumu proporcionalnosti neke od njih ne mogu da se smatraju slučajnim. Štaviše, nanoseći na grafik položaje polova putanjskih ravni malih planeta koje su pripadale ovim koncentracijama, našao je da su ti položaji u pravouglom koordinatnom sistemu sa osama $tg\ i\ sin\ \Omega$ i $tg\ i\ cos\ \Omega$ raspoređeni po kružnici čije se središte praktično poklapa sa položajem pola Jupiterove putanje. Sličan rezultat dobio je i na grafiku sa osama $e\ sin\ \tilde{\omega}$ i $e\ cos\ \tilde{\omega}$, s tim što se ovde središte kružnice i položaj Jupiterovog pola nisu poklopili, ali su ležali na istom potegu u odnosu na koordinatni početak. Polazeći od pretpostavke da je neka mala planeta bila razbijena na nekoliko komada i da su fragmenti u početnom trenutku imali relativno male priraštaje brzine, *Hirayama* je, koristeći linearnu teoriju sekularnih promena elemenata kretanja, potom pokazao da se posle izvesnog vremena dobijaju upravo onakve raspodele putanjskih elemenata fragmenata, kakve je on našao kod svojih koncentracija. Zato je ove koncentracije i nazvao familijama, implicirajući zajedničko poreklo članova, i označio ih prema prvootkrivenim malim planetama koje im pripadaju. U ovom svom prvom radu *Hirayama* je ukazao na postojanje ukupno tri najprominentnije familije -

Koronis, *Eos* i *Themis*.

U nizu radova koji su nakon toga usledili *Hirayama* (1919; 1920; 1923; 1928; 1933) je svoje prvobitne nalaze dalje razradivao, otkrivajući nove familije i dopunjavajući već poznate familije novim članovima. U radu iz 1919. godine je i na osnovu teorije verovatnoće potvrdio postojanje pomenutih najznačajnijih familija, a dalje bitno unapređenje uveo je u svojim glavnim radovima iz 1923. i 1928. godine, kada je kao parametre klasifikacije počeo koristiti sopstvene elemente izvedene pomoću *Stockwell*-ove (1872) metode.

Hirayama je u svojim radovima pominjao desetak manje ili više pouzdano definisanih familija, ali je sasvim sigurnim smatrao samo pet - tri već pomenute: *Koronis*, *Eos* i *Themis*, te *Maria* i *Flora*.

Sledeći važan doprinos na ovom planu bio je rad *Brouwer*-a i *Van Woerkom*-a (1950) posvećen sekularnim promenama putanjskih elemenata kretanja velikih planeta. Rezultati ovog rada, kao što je već rečeno, korišćeni su u svim kasnijim određivanjima sopstvenih elemenata malih planeta, a i danas se povremeno koriste u svrhu izučavanja kretanja malih tela Sunčevog sistema (Shoemaker et al., 1984; Dermott et al., 1984), iako su se u međuvremenu pojavile daleko tačnije teorije kretanja velikih planeta. *Brouwer* i *Van Woerkom* su pošli od činjenice, na koju je još mnogo ranije ukazao *Hill* (1889; 1897), da članovi poremećajne funkcije R_{ss} za Jupiter i Saturn, proporcionalni kvadratima i proizvodu njihovih masa, a proizašli iz tzv. "velike nejednakosti" srednjih kretanja Jupitera i Saturna $(2n'_5 - 5n'_6)$, imaju znatan uticaj na sekularne promene njihovih

ekscentričnosti i longituda perihela. Uzimajući u obzir ove, kao i još neke dugo-periodične članove funkcije poremećaja, oni su razvili do tada najkompletnije i najtačnije rešenje za sistem velikih planeta bez Plutona. Unapređenje koje su uvели najbolje ilustruje primer frekvencije longitude perihela Saturna $\dot{\tilde{\omega}}_6$, koja je sa ranije vrednosti od +23.0858 "/god. u novom rešenju skočila čak na +27.7741 "/god.

U istom radu *Brouwer* i *Van Woerkom* su opisali i metodu za izračunavanje sekularnih promena putanjskih elemenata malih planeta i dali tabele njihovih prinudnih oscilacija za standardnu epohu 1950.0 u funkciji velike poluose a.

Na žalost, u računima *Brouwer*-a i *Van Woerkom*-a potkrale su se neke greške, a ni oni nisu do kraja konzistentno izveli vrednosti nekih važnih koeficijenata sistema diferencijalnih jednačina varijacije elemenata (Knežević, 1986), tako da su neki od krajnjih rezultata opterećeni izvesnim razlikama (napr. $\delta\dot{\tilde{\omega}}_6$ = 0.08 "/god.; $\delta\dot{\tilde{\omega}}_6$ = 0.41 "/god.) u odnosu na one vrednosti koje je trebalo da proizađu iz ove teorije i koje su se iz nje realno mogle izvesti.

Koristeći rezultate prethodnog rada *Brouwer* (1951) je odmah zatim objavio novi rad u kojem je dao sopstvene elemente za 1537 tada numerisanih malih planeta, te novu tabelu frekvencija sekularnih argumenata ($\dot{\tilde{\omega}}_P = -\dot{\Omega}_P$) u funkciji velike poluose a, kojom je zamenio poznate tabele *Noren*-a i *Raab*-a (1900). Identifikaciju familija proveo je na najjednostavniji, grafički način, a proveru pouzdanosti klasifikacije izvršio je putem poređenja standardnih devijacija sopstvenih elemenata. Tako je spisku *Hirayama*-inih pet sigurnih familija priključio i

šestu, familiju *Phocaea*, smatrajući je definitivno i pouzdano potvrđenom, dok je, s druge strane, na osnovu dosta labavih i proizvoljnih kriterijuma, podelio originalnu *Hirayama*-inu familiju *Flora* na četiri manje, zasebne familije. Nadalje je, polazeći od činjenice da je zbir sopstvenih longituda perihela i čvora ($\tilde{\omega}_p + \Omega_p$) invarijanta prvog reda u linearnoj teoriji sekularnih poremećaja, identifikovao i ukupno 19 grupa malih planeta sa 5 i više članova, koje su se pored podudarnosti sopstvenih elemenata odlikovale i izvesnom podudarnošću ovih zbirova (primenom teorija sekularnih poremećaja višeg reda, međutim, ubrzo je pokazano da ovaj zbir longituda nije konstantan; štaviše, tipično vreme relaksacije od identičnih vrednosti uglovnih promenljivih do njihovog slučajnog rasporeda po svih 2Π razmerno je kratko, reda veličine 10^5 - 10^6 godina, što, s druge strane, znači da bi se grupa objekata sa sličnim vrednostima ($\tilde{\omega}_p + \Omega_p$) raspršila nakon najviše 10^7 - 10^8 godina). *Brouwer* se, sem toga, pozabavio i analizom simetrije polja relativnih brzina fragmenata u odnosu na roditeljsko telo, izvedenih iz odgovarajućih razlika njihovih sopstvenih elemenata. Polazeći, kao i *Hirayama*, od hipoteze o nastanku familija putem sudara, on je, upoređujući standardne devijacije komponenata relativne brzine, našao znatne razlike među njima i pripisao ih neadekvatnosti linearne teorije sekularnih poremećaja i znatno većim uticajem zanemarenih članova funkcije poremećaja višeg reda i stepena na ekscentričnost i longitudu perihela, nego na nagib i longitudu čvora.

Sledeći značajan rad u vezi familija malih planeta je onaj *Arnold*-a (1969). Ovaj autor je prvi uveo objektivne,

kompjuterske metode identifikacije familija, ali je još uvek kao parametre klasifikacije upotrebljavao sopstvene elemente iz linearne teorije, izvedene uz korišćenje već pomenutih tabela prinudnih oscilacija *Brouwer*-a i *Van Woerkom*-a. U procesu selekcije *Arnold* je, usvajajući u prvoj aproksimaciji pretpostavku o uniformnoj raspodeli malih planeta glavnog prstena u faznom prostoru $a - e_p - sin\ i_p$, odredio gustinu pozadine i zatim nalazio koncentracije značajno veće gustine od ove osnovne. *Arnold*-ov kompjuterski program postavlja kvadar određenih dimenzija tako da mu se središte poklapa sa položajem u faznom prostoru svake male planete redom i traži unutar tog kvadra eventualno prisutne druge objekte ("particle - in - the - box" metod); ukoliko je broj nađenih objekata dovoljno velik, što *Poisson*-ovu verovatnoću čini, naravno, malom, koncentracija se smatra značajnom. U drugoj fazi *Arnold* je, preklapajući sadržaje dva ili više susednih kvadara, formirao preliminarne familije, na koje je zatim primenjivao statistički test radi konačnog definisanja familija sa maksimalnom pouzdanošću. Na kraju je rezultate podvrgao nizu provera i poređenja, između ostalog i sa rezultatima primene identične procedure selekcije na sintetičke slučajne raspodele itd.

Treba, međutim, reći da je i *Arnold* u nekim fazama selekcije, kao i u nekim konkretnim slučajevima, obradu podataka vršio "ručno", koristeći se, kako sam kaže, intuicijom i dozvoljavajući izvestan stepen proizvoljnosti takvih rezultata.

Rezimirajući *Arnold*-ove rezultate možemo reći da je i on potvrdio verodostojnost prvobitnih *Hirayama*-inih familija

(premda u *Brouwer*-ovoj verziji sa podeljenom familijom *Flora*), kao i manjeg dela *Brouwer*-ovih grupa, ali je zato veći deo *Brouwer*-ovih grupa, kao i dve *Anders*-ove (1964), u znatnoj meri izmenio, kombinovao i delio, neke čak u potpunosti odbacio, tako da je umesto originalnih definicija ovih grupa predložio potpuno nove definicije. Dodajući ovom konglomeratu i desetak svojih novootkrivenih familija, *Arnold* je ukupan broj familija povećao na 37.

Što se tiče "strujnih potoka", koje je *Alfven* (1969) nešto ranije definisao kao grupe malih planeta koje pored koncentracije u a, e_p, $\sin i_p$ pokazuju i podudarnost u $\tilde{\omega}_p$ i Ω_p, *Arnold* ih je doduše nekoliko identifikovao, ali je u diskusiji skrenuo pažnju na to da su i njihov broj i statistička značajnost daleko manji od onih za familije i da se njihovo postojanje ne uklapa u hipotezu o nastanku familija putem sudara, koju inače smatra najverodostojnijom.

Iste, 1969. godine pojavila se i *Williams*-ova nova teorija sekularnih poremećaja višeg stepena (Williams, 1969), koja je na originalan način povezala analitičke i numeričke tehnike i omogućila novo određivanje sopstvenih elemenata malih planeta (Williams, 1979). Kako će, međutim, o ovoj teoriji biti više reči nešto kasnije, ovde ćemo se ograničiti samo na pominjanje *Williams*-ovog zaključka da su male planete, za koje se smatralo da čine ponešto raspršenu familiju *Phocaea*, u stvari locirane u oblasti koja je, kao i susedni *Hungaria* region, od ostalog dela glavnog prstena izolovana sekularnim rezonancama, te da, prema tome, ove male planete ne predstavljaju familiju objekata zajedničkog porekla.

Sledeći značajan doprinos u vezi familija predstavljaju rezultati poznatog *Palomar - Leiden*-skog pregleda malih planeta slabog sjaja (*Palomar - Leiden Survey - PLS*), objavljenog naredne, 1970. godine (Van Houten et al., 1970). *PLS* je, naime, bio pokušaj da se jednim potezom, iz jedne razmerno kratke posmatračke seanse na velikom 120-cm *Schmidt* teleskopu opservatorije *Mount Palomar*, upotpuni statistika malih planeta do prividne veličine od nekih 20.0 mag. Ne ulazeći u detalje mnogih interesantnih saznanja i podataka do kojih se došlo u okviru ove zamašne akcije, niti opet u probleme sa statističkom obradom jednog dela materijala usled izražene posmatračke selekcije uzrokovane programskim ograničenjima, pomenućemo ovde samo najvažnije nalaze koji se tiču familija i njihove identifikacije među *PLS* malim planetama.

Za izračunavanje sopstvenih elemenata novootkrivenih malih planeta korišćena je i ovde linearna teorija, a identifikacija članova familija vršena je na najjednostavniji način: materijal, kojim su bile obuhvaćene samo *PLS* male planete sa precizno određenim putanjama, podeljen je po velikoj poluosi na intervale od po 0.05 AJ, za svaki od intervala pravljeni su grafici $tg\ i_p$ u funkciji e_p i na graficima su tražene koncentracije tačaka; koncentracija je smatrana značajnom ukoliko je koincidirala sa položajem već poznate familije, ili ako se mogla prepoznati i u susednim intervalima. Na taj način, među slabim malim planetama otkriveni su članovi svih pet *Hirayama*-inih familija, kao i nekih *Brouwer*-ovih grupa. Nađeno je, takođe, pet novih familija, od kojih su neke obuhvatile i odgovarajuće *Brouwer*-ove grupe, ali zato nije potvrđena ni

jedna od Arnold-ovih malih familija. Na osnovu toga, izveden je zaključak da neke familije praktično uopšte nemaju u svom sastavu sjajnih (većih) malih planeta, dok je kod drugih raspon veličina članova familije znatan. Koncentracije po zbiru longituda ($\tilde{\omega}_p + \Omega_p$), naslućene ranije kod nekih familija, nisu nađene, niti je potvrđeno postojanje strujnih potoka (premda je pomenuto da ima izvesnih indicija o postojanju jednog od njih u novootkrivenoj familiji *Nysa*). Konačno, ukazano je na interesantnu mogućnost da se neke familije, u stvari, pojavljuju u parovima (*Nysa* i *Michele*; *Themis* i *Medea*, itd.), ali su fizičke implikacije ovakve mogućnosti samo površno komentarisane, uz konstataciju da bi izvođenje bilo kakvih zaključaka bilo preuranjeno.

1971. godine održana je u *Tucson*-u (*SAD*) prva velika međunarodna konferencija posvećena isključivo malim planetama, pri čemu je naročita pažnja bila posvećena istraživanjima njihovih fizičkih osobina. Među brojnim radovima koji su saopšteni na tom skupu bilo je i nekoliko radova koji su se bavili upravo problematikom familija i strujnih potoka malih planeta (Van Houten, 1971; Williams, 1971; Trulsen, 1971; itd.). Mi ćemo se ovde, međutim, detaljnije pozabaviti samo radom *Lindblad*-a i *Southworth*-a (1971), u kojem je predložena nova klasifikacija malih planeta u familije, zasnovana na novom kriterijumu za klasifikaciju, tzv. D - kriterijumu podudarnosti putanja, preuzetom iz meteorske astronomije (Southworth and Hawkins, 1963). Veličina $D(M,N)$ predstavlja, u stvari, rastojanje dve meteorske putanje M i N u 5-dimenzionom faznom prostoru elemenata $(q, e, i, \omega, \Omega)$, gde je $q = a(1 - e)$

rastojanje perihela. Ukoliko je vrednost $D(M,N)$ za dati par putanja manja od neke kritične vrednosti D_c, smatra se da ta dva meteora pripadaju roju.

U primeni ove procedure selekcije na male planete, međutim, javlja se jedna bitna poteškoća, a to je kako odabrati kriterijum za odbacivanje, odnosno kako odrediti kritičnu vrednost D_c. *Lindblad* i *Southworth* ovu poteškoću prevazilaze jednim empirijskim postupkom, usvajajući za D_c onu vrednost koja je u nizu pokušaja za tri najveće *Hirayama*-ine familije dala najbolje slaganje nove klasifikacije sa klasifikacijom *Brouwer*-a. Kako vrednost D_c zavisi od veličine statističkog uzorka koji se pretražuje, a i od nagiba putanja koje se upoređuju, u radu su dati rezultati dobijeni iz više pokušaja sa raznim uzorcima (numerisane male planete, *PLS* male planete, numerisane plus *PLS*, itd.), dok se za familije locirane na većim nagibima dopušta da je pouzdanost klasifikacije umanjena. Postupak je, inače, programiran za kompjuter, a kao parametri klasifikacije poslužili su sopstveni elementi koje su u svojim radovima koristili *Arnold*, odnosno *Van Houten* et al.

Rezultati *Lindblad*-a i *Southworth*-a ponovo su potvrdili realnost postojanja svih *Hirayama*-inih familija, mada nije potvrđena i podela familije *Flora* koju je predložio *Brouwer*. Takođe, identifikovana je i većina *Brouwer*-ovih grupa, kao i *Arnold*-ovih familija, iako su ove pretrpele prilične izmene. Ukupno je nađeno 10 novih familija sa 6 i više članova i 10 novih strujnih potoka sa 7 ili više članova. Interesantno je da su kod strujnih potoka razlike između nove i ranijih

klasifikacija još veće nego kod familija, tako da su se od članova *Arnold*-ovih strujnih potoka, napr., samo tri našla i u nekom od strujnih potoka detektovanih u ovoj klasifikaciji.

Od ostalih radova sa konferencije u *Tucson*-u osvrnućemo se još samo na rad *Kresák*-a (1971), u kojem je na ubedljiv način pokazano da je strujni potok otkriven unutar familije *Nysa* u *PLS* podacima produkt posmatračke selekcije i da u stvari uopšte ne postoji. *Kresák* je, štaviše, sugerisao da su i ostali, ranije registrovani strujni potoci nađeni među numerisanim malim planetama, takođe puki artefakti posmatračke selekcije.

1973. godine objavljen je rad *M. Yuasa*-e (Yuasa, 1973) sa novom teorijom sekularnih poremećaja malih planeta, koja i čini okosnicu ove teze. Kako će, stoga, ova teorija biti detaljno razmotrena u narednim odeljcima, ovde je pominjemo samo radi kompletnosti hronologije.

Carusi i *Massaro* (1978) su za svoju klasifikaciju malih planeta u familije koristili jednu novu, dosta složenu statističku proceduru selekcije (*G - mode*), zasnovanu na svođenju originalne višeparametarske raspodele putanjskih elemenata na jednoparametarsku kvazi-*Gauss*-ovu raspodelu putem sukcesivnih tranformacija. Najizrazitija koncentracija putanja izdvaja se u prvoj aproksimaciji putem testiranja pripadnosti elemenata uzorka pogodno definisanoj normalnoj raspodeli (koncentracija prve klase). Čitava procedura se zatim ponovo primenjuje na preostale elemente uzorka i dobija se koncentracija druge klase, itd. Pripadnost pojedinog elementa datoj klasi određuje se statističkim testiranjem hipoteze, gde kritična vrednost zavisi od usvojenog nivoa značajnosti.

U praktičnoj primeni *Carusi* i *Massaro* su čitav prsten malih planeta podelili na 5 intervala po velikoj poluosi, tako da se ovi međusobno preklapaju i time omoguće proveru da li se potencijalna familija, identifikovana u jednom intervalu, može pronaći i u susednim intervalima ili ne (familije tipa 1, odnosno 2). Kao parametre originalne raspodele koristili su sopstvene elemente izvedene iz linearne teorije, a za nivo značajnosti su usvojili vrednost 91.8 % dobijenu kalibrisanjem metode po *Hirayama*-inim familijama *Themis*, *Eos* i *Koronis*. Kao ilustraciju svojih nalaza *Carusi* i *Massaro* su dali nekoliko tipičnih kompjuterskih izosterskih mapa prstena malih planeta u (a,i_p) i (a,e_p) ravnima.

Rezultati ove analize, međutim, pomalo su iznenađujući i svedoče o izrazitoj restriktivnosti procedure - identifikovano je, naime, ukupno samo 10 familija, pri čemu su praktično sve manje familije detektovane u ranijim klasifikacijama ocenjene kao statistički nedovoljno pouzdane. Interesantno je da ni *Hirayama*-ina familija *Maria* nije mogla biti identifikovana, ali zato *Phocaea* jeste, dok je za podelu familije *Flora* na manje familije konstatovano da nije jednoznačno određena, već da se može provesti na niz raznih, podjednako (ne)verovatnih načina, zavisno od usvojenog nivoa značajnosti, pa je zaključeno da se tu ipak radi o jednoj velikoj, nešto složenijoj familiji. Pomenimo da autori takođe sugerišu da se ceo prsten malih planeta može podeliti na tri pod-prstena čije granice su određene najprominentnijim komenzurabilitetima (1:4, 1:3, 2:5, 1:2) i koji se jasno razlikuju po svojoj strukturi (prisustvu, odnosno odsustvu velikih familija, pa stoga i manjoj, odnosno

većoj uniformnosti raspodele gustine malih planeta, odsustvu, odnosno gomilanju rezonanci višeg reda, i sl.).

1979. godine održana je u *Tucson*-u druga konferencija posvećena malim planetama, na kojoj je opet predstavljeno mnogo vrednih radova. Naravno, nekoliko se saopštenih radova odnosilo i na probleme familija. Možda od najveće važnosti, međutim, u vezi ove konferencije je to da je u zborniku radova konferencije konačno objavljena datoteka *TRIAD* (*Tucson Revised Index of Asteroid Data*), koja je obuhvatila sve do tada poznate podatke o malim planetama, počev od oskulatornih i sopstvenih elemenata kretanja, preko raznih parametara važnih za opisivanje njihovih fizičkih osobina (spektralnih refleksivnosti, polarimetrijskih i radiometrijskih podataka, parametara krivih promene sjaja, magnituda, indeksa boje, taksonomskih tipova i prečnika), pa do podataka o njihovim otkrićima.

Za nas je ovde od posebnog interesa, naravno, činjenica da su u *TRIAD* uključeni sopstveni elementi koje je izračunao *Williams* na osnovu svoje već pomenute teorije sekularnih poremećaja (Williams, 1969). Pored sopstvenih elemenata, data su i najkraća rastojanja putanja malih planeta i putanje Marsa, odnosno Jupitera, pri čemu su uzete u obzir sekularne promene i jednih i drugih.

Williams je u svojoj klasifikaciji malih planeta u familije, zasnovanoj na proceduri selekcije opisanoj u opštim crtama u odeljku 1.2, našao ukupno 104 familije, ali je i sam odmah izrazio sumnju u pouzdanost definicije malih familija sa svega nekoliko članova, kao i jednoznačnost definicije kod onih

koje imaju veliki broj članova i složenu strukturu, ili se pak preklapaju sa susednim familijama. Najznačajnije poznate familije nađene su i u ovoj klasifikaciji i to u sastavu "razumno bliskom" onome iz ranijih klasifikacija. Ipak, familija *Flora* je dosta proizvoljno podeljena čak na 10 manjih familija, familija *Themis* je razdvojena na kompaktno jezgro većih objekata i ponešto raspršeni halo manjih objekata, itd.

Kako su upravo u vreme objavljivanja *Williams*-ove klasifikacije istraživanja fizičkih osobina i sudarne evolucije malih planeta dobila pun zamah, ona je korišćena u praktično svim kasnijim radovima posvećenim ovim problemima, a i danas se koristi, iako su u međuvremenu razne analize ukazale na njenu ipak nedovoljnu pouzdanost (napr. Zappalá et al., 1984; Chapman, 1985).

I *Kozai* (1979c) je odabrao upravo konferenciju u *Tucson*-u da predstavi svoju klasifikaciju malih planeta u familije. O sekularnoj teoriji koja mu je poslužila kao osnov za izračunavanje parametara klasifikacije (podsetimo se da su to a, i_m, θ) već smo nešto rekli, pa ćemo se ovde pozabaviti uglavnom rezultatima.

Kozai se pri selekciji članova familija nije služio nikakvim definisanim kriterijumom, pa i sam konstatuje da je grupisanje izvršio na prilično proizvoljan način, te da je, stoga, teško njegove familije upoređivati sa familijama drugih autora. Ipak, među ukupno 72 familije identifikovane u njegovoj analizi nalaze se sve *Hirayama*-ine glavne familije, pa i sporne *Phocaea* i *Pallas*. O stepenu kompaktnosti familije *Kozai* sudi na osnovu jednostavnog pokazatelja - frekvencije malih planeta u

kvadru sa stranicama 0.1 AJ po a, 2° po i_m i 0.01 po Θ, da bi i o realnosti nekih malih familija sa svega 3 - 4 člana odlučivao na osnovu istog pokazatelja. Nije teško zaključiti da je ovo krajnje pojednostavljen i jednostran pristup (čak i ne uzimajući u obzir način nastanka familija), pa ako se tome doda i činjenica da je, zahvaljujući *Kozai*-jevoj "širokoj ruci", u familije svrstano čak tri četvrtine svih malih planeta, nije čudo da ova klasifikacija nije naišla na ozbiljnije uvažavanje i prihvatanje.

Treći rad sa konferencije u *Tucson*-u, na koji ćemo se ovde detaljnije osvrnuti (Gradie et al., 1979), bavi se uglavnom fizičkim osobinama malih planeta - članova familija i poreklom familija, ali sadrži i provizornu komparativnu analizu raznih klasifikacija, diskutuje neka značajna otvorena pitanja u vezi s tim i ukazuje na neke interesantne osobine raspodela članova pojedinih familija po sopstvenim ekscentričnostima i nagibima. Tako se napr., između ostalog, tretira i pitanje strujnih potoka i navode se novi argumenti koji dovode u pitanje njihovo postojanje. Naime, pored već pomenutog skoro potpunog neslaganja raznih autora oko sastava strujnih potoka i *Kresák*-ove demonstracije udela posmatračkih selektivnih efekata u stvaranju utiska o njihovom postojanju, iznose se i rezultati *Brahic*-a (1975) i *Ip*-a (1977), koji su koristeći *Monte Carlo* simulaciju našli da sudarna evolucija produkuje pre spljoštene prstenove, nego kompaktne samo-sažimajuće potoke. Iz ovoga, naravno, *Gradie* et al. izvlače zaključak da je kako samo postojanje, tako i eventualna uloga strujnih potoka u evoluciji prstena malih planeta pod veoma velikim znakom pitanja.

Najveći deo rada *Gradie*-a et al., međutim, odnosi se na rezultate istraživanja fizičkih osobina članova familija i interpretaciju ovih rezultata u svetlu teorije o nastanku familija putem sudara. Iako raspoloživi posmatrački podaci nisu uvek bili kompletni, pa ponekad ni dovoljni, ipak se za ukupno 48 *Williams*-ovih familija našlo dovoljno materijala za barem preliminarnu analizu. Za 26 familija tako je pokazano da imaju članove uglavnom sličnih spektralnih karakteristika (tu su ušle i sve *Hirayama*-ine velike familije), što je objašnjeno nastankom ovih familija putem sudara od jednog, u globalu homogenog roditeljskog tela. Drugih 9 analiziranih familija karakteriše značajna dominacija članova jednog taksonomskog tipa, ali je obavezno bar jedan od ispitanih članova različit po tipu, što može da se protumači kao zapravo slučajno prisustvo datog tela unutar granica familije. Konačno, 13 familija (*Eunomia*, *Ceres*, *Phocaea*, itd.) pokazalo se bitno heterogenim, jer uključuju male planete dva ili više tipova, od kojih ni jedan nije značajnije zastupljen od ostalih.

Za neke od većih familija nađeno je takođe da imaju dosta neobične spektre, bitno različite od tipičnih spektara okolnih objekata u datom delu prstena malih planeta.Tako se napr. familija *Eos*, koja se nalazi u spoljašnjem delu prstena gde inače dominiraju objekti *C* - tipa, odlikuje relativno visokim *S* albedom, familija *Koronis S* - tipa nalazi se u srednjem delu prstena, a familija *Nysa E* - tipa opet u spoljašnjem delu, itd. Kod manjih familija nisu registrovana ovakva odstupanja i njihovi taksonomski tipovi uglavnom odgovaraju njihovom položaju u prstenu.

Polazeći, konačno, od raspodele malih planeta - članova familija po veličini, napravljena je za nekoliko familija volumetrijska rekonstrukcija hipotetičkih roditeljskih tela, pa je tako nađeno da je roditeljsko telo familije *Themis* napr. moralo imati najmanje 300 km u prečniku, familije *Eos* oko 190 km, *Koronis* i *Maria* po 90 km, itd.

Iste, 1979. godine, *Duriez* je objavio novu opštu teoriju kretanja četiri spoljašnje velike planete (Duriez, 1979), kojom je znatno unapredio tačnost rešenja u odnosu na do tada postojeće teorije. Ne ulazeći u detalje, pomenimo samo da su sa aspekta teorije kretanja malih planeta od naročitog značaja razlike frekvencija slobodnih oscilacija Jupitera i Saturna iz novog rešenja i onih iz teorije *Brouwer-a* i *Van Woerkom-a* (1950), koje su ranije korišćene u svrhe određivanja kretanja malih planeta u dugim vremenskim intervalima. Kod Saturnovih frekvencija, naime, ove razlike dostižu čitavih 0.5 "/god., dok je kod Jupitera razlika frekvencija za sistem ekscentričnost - longituda perihela 0.013 "/god., što, primera radi, već nakon 10^6 god. daje grešku od nekoliko stepeni u longitudi perihela.

Premda se jugoslovenski astronomi uglavnom nisu bavili problemima familija malih planeta, vredno je na ovom mestu pomenuti rad *B. Popovića* (1981), u kojem je ispitano kretanje centra dve mase i tih masa oko centra (dvojne male planete), sa naglaskom na analizi proksimiteta. Nađeno je da u specijalnim slučajevima može doći do pretvaranja privremenog u trajni proksimitet, iako je verovatnoća za to izuzetno mala. Još manja je, međutim, verovatnoća da u tim okolnostima dođe do sudara tela, koji bi eventualno doveo do formiranja familije.

Poslednji rad kojim ćemo se detaljnije pozabaviti u ovom odeljku je rad *Zappalá*-e et al. (1984), u kojem je na osnovu *Williams*-ove (1979) klasifikacije malih planeta u familije pokušana jedna generalna interpretacija dinamičkih i fizičkih osobina familija u svetlu teorije o nastanku familija putem sudara. Ukupno su 73 *Williams*-ove familije sa 3 ili više članova uzete u obzir u ovoj analizi.

Najpre su, na osnovu podataka iz *TRIAD* datoteke, izvedene za svaku familiju raspodele mase i relativne brzine u odnosu na najveću malu planetu u familiji. Bilo je neizbežno u ovom izvođenju primeniti određene aproksimacije i ekstrapolacije, ali autori su pokazali da su bar za statističke namene njihovi rezultati dovoljno pouzdani. Zatim su dobijene raspodele upoređene sa odgovarajućim raspodelama produkata katastrofalnih sudara, očekivanim na osnovu teorijskih analiza i posmatranim u laboratorijskim eksperimentima. Sledeći u ovim razmatranjima postupak koji je razradio *Kresák* (1977) i koristeći se delimično i njegovim rezultatima, *Zappalá* et al. su pokazali da se raspodele mase unutar familija mogu tumačiti u svetlu teorije o nastanku familija putem sudara nakon kojeg dolazi do delimične samo-gravitacione reakumulacije fragmenata. U prilog koncepcije značajne uloge reakumulacije najvećeg ostatka roditeljskog tela u formiranju familija navode se podaci o jasno izraženoj korelaciji između odnosa mase najvećeg člana familije i ukupne mase familije i veličine (ekvivalentnog prečnika) najvećeg člana i to u smislu znatnog "viška" najvećih članova koji "nose" znatan deo ukupne mase familije upravo kod familija sa velikim najvećim članom, te o bimodalnoj raspodeli

odnosa masa u oblasti srednjih veličina najvećih članova. Istovremeno, kod zavisnosti odnosa mase drugog najvećeg člana familije i ukupne mase familije od ekvivalentnog prečnika ovakva korelacija ne postoji. Pomenuta bimodalna raspodela javlja se, inače, upravo kod najvećih članova prečnika oko 100 km, što se slaže i sa teorijskim predviđanjima i sa rezultatima analize parametara rotacije malih planeta.

Raspodele relativnih brzina članova familija u odnosu na najveći objekat u familiji izvedene su na dva načina: korišćenjem uprošćenog, jednodimenzionog postupka (Ip, 1979), gde se razlika brzina računa samo na osnovu razlike velikih poluosa putanja, odnosno korišćenjem trodimenzione rekonstrukcije relativne brzine, gde se ova izvodi pomoću linearizovanih Gauss-ovih jednačina iz razlika sopstvenih elemenata. U okviru prvog, jednostavnijeg pristupa Zappalá et al. su definisali jedan pogodan parametar za određivanje stepena simetrije polja brzina i primenjujući ga na familije uveli njihovu morfološku podelu na asimetrične, raspršene i prelazne. Takođe u vezi sa jednodimenzionim pristupom ukazano je i na neobičnu činjenicu da, po svemu sudeći, uopšte ne postoje familije sa najvećim članom prečnika ispod 40 km i srednjom relativnom brzinom manjom od 60 m/sec, ali nije nađeno nikakvo prihvatljivo objašnjenje ovog nalaza. U okviru trodimenzionog pristupa, s druge strane, problem asimetrije polja relativnih brzina pokazao se u svoj svojoj složenosti. Teorijski bi, naime, srednji koeficijent anizotropije polja u uzorku svih obuhvaćenih familija, definisan kao odnos normalizovane tangencijalne komponente relativne brzine i

rezultantne ukupne brzine, trebalo da bude blizak jedinici, a u stvari je dobijena vrednost jedva premašala 0.2 (za familiju *Themis* koeficijent anizotropije je bio 0.328, za *Koronis* 0.424, a za *Eos* 0.131).

Konačno, ovde ćemo samo registrovati seriju radova *Laskar*-a (1984; 1985; 1986; 1988) u kojima on, nadovezujući se na *Duriez*-ove radove, objavljuje za sada najobuhvatniju i verovatno najtačniju opštu teoriju kretanja svih velikih planeta sem Plutona, a koja je korišćena i u ovoj tezi kao osnov za izračunavanje sopstvenih elemenata malih planeta.

U zaključku ovog odeljka recimo još samo da je cilj ovog malog izleta u istoriju problema kojim ćemo se baviti u ovoj tezi bio, pre svega, sagledavanje stanja stvari u konkretnoj oblasti istraživanja, i to kako sa aspekta sinteze već dostignutih znanja, tako i bližeg sagledavanja najvažnijih otvorenih pitanja. Zato su u gornjem pregledu radova izostali detaljniji osvrti na neke inače bitne doprinose istraživanjima dinamičkih i fizičkih osobina malih planeta, bilo zato što se radi o već dobro poznatim stvarima, pa bi svako detaljnije raspravljanje bilo naprosto suvišno (napr. klasični radovi *Lagrange*-a ili *LeVerrier*-a u vezi teorije sekularnih poremećaja tela Sunčevog sistema), ili pak zato što nisu u onoj najneposrednijoj vezi sa problemima o kojima je ovde reč (recimo, taksonomska klasifikacija malih planeta predstavljena u radu *Bowell*-a et al., 1978 i kasnije revidirana i doradivana od strane raznih autora).

3. TEORIJE SEKULARNIH PROMENA ELEMENATA KRETANJA MALIH PLANETA

3.1 Diferencijalne jednačine promena elemenata kretanja i njihovo integraljenje

Poznato je da se diferencijalne jednačine promena elementa kretanja tela Sunčevog sistema ne mogu rešiti u konačnom obliku i da se zato u praksi pribegava raznim uprošćenjima i aproksimacijama, koje omogućuju da se to kretanje barem približno odredi. U jednoj od standardnih varijanti, ove jednačine mogu se napisati u obliku:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}}$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}+\frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}}\right) - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial \Omega}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\sqrt{1-e^2}-(1-e^2)}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i}$$

$$\frac{d\tilde{\omega}}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i}$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial l} \qquad (3.1)$$

gde R označava funkciju poremećaja koja, u ovom slučaju, ima oblik:

$$R = \sum_{j=1}^{n} G_o m'_j \left(\frac{1}{\Delta_j} - \frac{r \cos S_j}{r'^2_j} \right) \qquad (3.2)$$

Prvi član na desnoj strani jednačine (3.2):

$$\frac{1}{\Delta_j} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2_j - 2rr'_j \cos S_j}} \qquad (3.3)$$

zove se glavni deo funkcije poremećaja, dok se drugi naziva indirektni deo i izražava uticaj poremećajne planete na Sunce; indirektni deo se javlja kao posledica korišćenja heliocentričnih koordinata i gubi se iz izraza (3.2) ukoliko se za koordinatni početak usvoji težište sistema.

Kako su poremećajne mase m'_j, koje se javljaju kao faktori u jednačinama (3.1), veoma male u poređenju sa masom centralnog tela sistema - Sunca, uobičajeni način rešavanja jednačina (3.1) uključuje razvoj funkcije poremećaja (3.2) u red po stepenima poremećajne mase m'_j, a zatim integraciju dobijenih razvoja metodom sukcesivnih aproksimacija. Razvoj funkcije poremećaja u red može se izvesti na više načina: primenom numeričkih metoda, napr. dvostruke harmonijske analize, ili numeričkim razvojem uz korišćenje Laplace-ovih koeficijenata, odnosno primenom analitičkih metoda, uz usvajanje srednje, ekscentrične ili prave anomalije (longitude) u svojstvu nezavisno promenljive, itd.

Ovde ćemo se detaljnije pozabaviti samo onim analitičkim razvojem funkcije poremećaja, kod kojeg se u svojstvu nezavisno promenljive javlja srednja longituda, jer se taj razvoj najčešće koristio u ranijim teorijama kretanja velikih planeta koje su služile kao osnov za izučavanje kretanja malih planeta

i izvođenje njihovih sopstvenih elemenata. Pomenimo odmah da je najpoznatiji i najčešće korišćen razvoj ove vrste napravio još LeVerrier (1855), koji je glavni deo funkcije poremećaja razvio čak do članova sedmog stepena u ekscentričnosti i nagibu, a indirektni do trećeg.

Kod primene ovakvog razvoja, dakle, funkcija poremećaja se predstavlja u vidu trigonometrijskog reda kosinusnih članova oblika:

$$R = G_o \sum m' C(a,e,i,a',e',i') \cdot \cos (j_1\lambda + j_2\tilde{\omega} + j_3\Omega + j_4\lambda' + j_5\tilde{\omega}' + j_6\Omega') \qquad (3.4)$$

gde se podrazumeva sumiranje po svim poremećajnim telima koja se u datom slučaju uzimaju u obzir. Veličine $j_1, j_2, \ldots$ su celi brojevi za koje važi relacija $j_1 + j_2 + j_3 + j_4 + j_5 + j_6 = 0$.

Poremećaji prvog reda u odnosu na poremećajnu masu određuju se sada tako da se na desne strane jednačina (3.1) unesu početne vrednosti elemenata kretanja a_i, e_i, i_i, $\tilde{\omega}_i$, Ω_i i tretiraju kao konstante. Srednja longituda se dobija iz:

$$\lambda = n_i t + \epsilon_i \qquad (3.5)$$

gde je:

$$n_i = \frac{\sqrt{G_o(1 + m)}}{a_i^{3/2}} \qquad (3.6)$$

Na taj način, desne strane jednačina (3.1) postaju poznate funkcije vremena i mogu se jednostavno integraliti kvadraturama. Kako se i srednja longituda poremećajnog tela λ' predstavlja izrazom analognim jednačini (3.5), to je frekvencija (srednje kretanje) argumenta bilo kojeg člana

razvoja (3.4) naravno: $j_1 n_i + j_4 n'$. Parcijalni izvodi funkcije poremećaja (3.4) po elementima kretanja, koji se nalaze na desnim stranama jednačina (3.1), daće očigledno sinusne redove za prve tri, odnosno kosinusne za druge tri diferencijalne jednačine varijacije elemenata, da bi integracija zatim dala kosinusne redove za varijacije a, e, i, odnosno sinusne za ϵ, $\tilde{\omega}$, Ω.

Razmotrimo prvo članove funkcije poremećaja za koje važi $j_1 = j_4 = 0$. Ovi članovi funkcije poremećaja ne sadrže, dakle, srednju longitudu, pa su im i frekvencije argumenata jednake nuli. Kako se, sem toga, sve ostale veličine na desnim stranama jednačina (3.1) smatraju konstantnim, integracijom se dobijaju članovi proporcionalni vremenu t. Ovi članovi razvoja nazivaju se sekularni članovi, pa se i deo funkcije poremećaja R koji se sastoji isključivo od ovih članova naziva sekularnim delom.

Iz jednačine za da/dt, koja sadrži samo parcijalni izvod $\partial R/\partial \epsilon$, a imajući u vidu (3.5), odmah sledi da poremećaji prvog reda u velikoj poluosi nemaju sekularnih članova. Ostalih pet elemenata, međutim, imaju sekularne članove u poremećajima prvog reda. Tako napr. sekularne poremećaje u ekscentričnosti e dobijamo iz:

$$\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{1 - e_i^2}}{n_i a_i^2 e_i} \sum C j_2 \sin (j_2 \tilde{\omega}_i + j_3 \Omega_i + j_5 \tilde{\omega}' + j_6 \Omega') \qquad (3.7)$$

gde je $G_0 m'$ izostavljeno radi jednostavnosti i odakle, označavajući desnu stranu sa e_1, imamo:

$$e = e_i + e_1 t \qquad (3.8)$$

Za longitudu perihela $\tilde{\omega}$ na sličan način nalazimo:

$$\frac{d\tilde{\omega}}{dt} = \sum \left(\frac{\sqrt{1 - e_i^2}}{n_i a_i^2 e_i} \frac{\partial C}{\partial e} + \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} i_i}{n_i a_i^2 \sqrt{1 - e_i^2}} \frac{\partial C}{\partial i} \right) \cdot$$

$$\cdot \cos (j_2 \tilde{\omega}_i + j_3 \Omega_i + j_5 \tilde{\omega}' + j_6 \Omega') \qquad (3.9)$$

a zatim, označavajući desnu stranu sa $\tilde{\omega}_1$:

$$\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_i + \tilde{\omega}_1 t \qquad (3.10)$$

Periodični poremećaji prvog reda dobijaju se identičnim postupkom. Kod velike poluose a, napr., imamo:

$$\frac{da}{dt} = - \frac{2}{n_i a_i} \sum C j_1 \sin [j_1 (n_i t + \varepsilon_i) + j_2 \tilde{\omega}_i + j_3 \Omega_i +$$

$$+ j_4 (n' t + \varepsilon') + j_5 \tilde{\omega}' + j_6 \Omega')] \qquad (3.11)$$

što nakon integracije daje:

$$a = a_i + \delta_1 a =$$

$$= a_i + \frac{2}{n_i a_i} \sum C \frac{j_1}{j_1 n_i + j_4 n'} \cos [j_1 (n_i t + \varepsilon_i) + j_2 \tilde{\omega}_i + j_3 \Omega_i +$$

$$+ j_4 (n' t + \varepsilon') + j_5 \tilde{\omega}' + j_6 \Omega')] \qquad (3.12)$$

Uzimajući, konačno, u obzir i sekularne i periodične članove, rezultati prvog reda dobijaju se u obliku:

$$a = a_i + \delta_1 a = a_i + \Delta_1 a$$

$$e = e_i + e_1 t + \delta_1 e = e_i + \Delta_1 e$$

.....

$$\Omega = \Omega_i + \Omega_1 t + \delta_1 \Omega = \Omega_i + \Delta_1 \Omega \qquad (3.13)$$

Naravno, poremećaji prvog reda predstavljaju samo prve aproksimacije stvarnih poremećaja, jer su izvedeni pod pretpostavkom o konstantnosti elemenata kretanja koji figurišu

na desnim stranama diferencijalnih jednačina (3.1). U mnogim realnim slučajevima, međutim, oni su nedovoljni za izračunavanje elemenata, odnosno određivanje položaja čija tačnost bi bila uporedljiva sa tačnošću posmatranja. Zato se pribegava izračunavanju poremećaja viših redova, koji, naravno, kao zajednički faktor imaju odgovarajući stepen mase m'_j.

Da bi se odredili poremećaji drugog reda, funkcija poremećaja (3.4) razvija se u *Taylor*-ov red, te tako, uzimajući u obzir samo članove prvog reda ovog razvoja, postaje:

$$R = R(a_i, e_i, i_i, \lambda_i, \tilde{\omega}_i, \Omega_i) + \left[\frac{\partial R}{\partial a}\right]_i \Delta_1 a + \left[\frac{\partial R}{\partial e}\right]_i \Delta_1 e + \ldots \qquad (3.14)$$

Naravno, sada se na desnim stranama jednačina (3.1), u koje uvrstimo funkciju poremećaja (3.14), javljaju parcijalni izvodi drugog reda po elementima $\left[\frac{\partial R}{\partial c \partial a}, \frac{\partial R}{\partial c \partial e}, \ldots\right]$. Kada se izračunaju vrednosti 21 ovako definisanog drugog izvoda, poremećaji drugog reda dobijaju se množenjem ovih rezultata sa rezultatima prvog reda i sa odgovarajućim razvojem faktora koji takođe figurišu u jednačinama (3.1).

Iz jednačina (3.13) i (3.14) proizilazi da će desne strane novih diferencijalnih jednačina biti date u opštem obliku: $A_i + A_1 t$ + red periodičnih članova, od kojih neki imaju vreme t kao faktor uz koeficijente ; A_i i A_1 predstavljaju doprinose sekularnog dela funkcije poremećaja. Integracija će očigledno dati ukupne doprinose drugog reda u obliku: $A_i t + \frac{1}{2} A_1 t^2$ + red periodičnih članova, od kojih su neki pomnoženi sa t. Periodični članovi drugog reda čiji koeficijenti sadrže vreme kao faktor nazivaju se ponekad mešoviti sekularni članovi.

Očigledno, postupak izvođenja poremećaja drugog reda može se jednostavno ponoviti, pa će se dobiti poremećaji trećeg reda itd.

3.2 Linearna teorija

Već je konstatovano u prethodnom odeljku da se jednačine (3.1) ne mogu rešiti u konačnom obliku. Ipak, još *Lagrange* je pokazao da se, ukoliko drastično pojednostavimo problem, može naći analitičko rešenje, te na taj način steći barem orijentacioni uvid u karakter kretanja i evoluciju planetskih putanja u dalekoj prošlosti i budućnosti. Rečeno pojednostavljenje sastoji se u tome da se u razvoju funkcije poremećaja uzme u obzir samo njen sekularni deo (periodični članovi, koji sadrže srednje longitude u argumentima, naprosto se zanemare) i to samo do članova prvog reda u odnosu na poremećajnu masu i drugog stepena po ekscentričnosti i nagibu. Pošto uvođenje ovako skraćenog i uprošćenog razvoja u diferencijalne jednačine (3.1) daje zatim u ovim jednačinama ekscentričnost i nagib na prvom stepenu, ova teorija se naziva još i linearna teorija sekularnih poremećaja. Kako, međutim, putanja evoluira približno 10^4 puta sporije nego što se menja položaj tela na putanji i kako sekularni poremećaji ne zavise od srednje longitude (koju je i inače u praksi nemoguće tačno računati u dužim vremenskim intervalima), to sledi da se samo evolucija putanje može na duže staze izučavati sa izvesnom pouzdanošću. Ako se još prisetimo da je u ovoj aproksimaciji velika poluosa konstantna, to ćemo, dakle, u daljem, u sistemu (3.1) umesto 6 razmatrati samo 4 diferencijalne jednačine.

Lako se može pokazati da u prvom redu po masi indirektni deo funkcije poremećaja ne sadrži sekularne članove, pa se u ovom slučaju funkcija poremećaja svodi na sekularni deo recipročne vrednosti međusobnog rastojanja poremećenog i poremećajnog(ih) tela. Ako najpre, radi jednostavnosti, razmotrimo slučaj uzajamnog poremećajnog dejstva dva tela masa m_1 i m_2, usvajajući $\alpha = (a_1/a_2) < 1$, možemo sekularne članove razvoja glavnog dela funkcije poremećaja do drugog stepena po ekscentričnosti i međusobnom nagibu napisati u obliku (Brouwer and Clemence, 1961, p. 508):

$$\frac{a_2}{\Delta_{12}} = \frac{1}{2} b^{(0)}_{1/2} + \frac{1}{4}(e_1^2 + e_2^2)\left[\alpha \frac{db^{(0)}_{1/2}}{d\alpha} + \frac{1}{2}\alpha^2 \frac{d^2 b^{(0)}_{1/2}}{d\alpha^2}\right] -$$

$$- \frac{1}{2}\alpha b^{(1)}_{3/2} \sin^2 \frac{J}{2} + \qquad (3.15)$$

$$+ \frac{1}{2} e_1 e_2 \cos(\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2)\left[b^{(1)}_{1/2} - \alpha \frac{db^{(1)}_{1/2}}{d\alpha} - \frac{1}{2}\alpha^2 \frac{d^2 b^{(1)}_{1/2}}{d\alpha^2}\right].$$

Ovde J predstavlja međusobni nagib putanjskih ravni m_1 i m_2, a izvodi se iz:

$$\cos J = \cos i_1 \cos i_2 + \sin i_1 \sin i_2 \cos(\Omega_1 - \Omega_2) \qquad (3.16)$$

odakle, opet samo do članova drugog stepena, nalazimo:

$$\sin^2 \frac{J}{2} = \frac{1}{4}\sin^2 i_1 + \frac{1}{4}\sin^2 i_2 -$$

$$- \frac{1}{2}\sin i_1 \sin i_2 \cos(\Omega_1 - \Omega_2) \qquad (3.17)$$

Jasno, i_1, i_2, Ω_1, Ω_2 predstavljaju nagibe i čvorove putanja u

proizvoljnom fiksnom koordinatnom sistemu (recimo, ekliptičkom za neku standardnu epohu). Veličine $b_{1/2}^{(0)}$, $b_{1/2}^{(1)}$, $b_{s/2}^{(1)}$ su tzv. *Laplace*-ovi koeficijenti, koji se javljaju u razvoju:

$$(1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2)^{-s} = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty} b_s^{(j)}\cos j\theta \; ; \; s = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots \qquad (3.18)$$

Ovi koeficijenti zavise samo od odnosa velikih poluosa α i izvode se, kada je α malo, iz:

$$\frac{1}{2} b_s^{(j)} = \frac{(s+j-1)!}{j!}\alpha^j\left[1 + \frac{s(s+j)}{1!(j+1)}\alpha^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{s(s+1)(s+j)(s+j+1)}{2!(j+1)(j+2)}\alpha^4 + \ldots\right] \qquad (3.19)$$

odnosno iz:

$$b_s^{(j)} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2)^{-s}\cos j\theta\, d\theta \qquad (3.20)$$

kada je α veliko i kada zbog toga red (3.19) veoma sporo konvergira. Kako je $b_s^{(j)} = b_s^{(-j)}$ i kako su i sami *Laplace*-ovi koeficijenti i njihovi izvodi, koji se takođe pojavljuju u (3.15), međusobno povezani nizom raznih rekurentnih relacija, to se iz takvih relacija jednostavno izvodi:

$$\alpha\frac{db_{1/2}^{(0)}}{d\alpha} + \frac{1}{2}\alpha^2\frac{d^2b_{1/2}^{(0)}}{d\alpha^2} = \frac{1}{2}\alpha\, b_{3/2}^{(1)}$$

$$b_{1/2}^{(1)} - \alpha\frac{db_{1/2}^{(1)}}{d\alpha} - \frac{1}{2}\alpha^2\frac{d^2b_{1/2}^{(1)}}{d\alpha^2} = -\frac{1}{2}\alpha\, b_{3/2}^{(2)} \qquad (3.21)$$

Tako sada (3.15) možemo napisati u sledećem obliku:

$$\frac{1}{\Delta_{12}} = \frac{1}{2a_2} b^{(0)}_{1/2} + N_{12}[e_1^2 + e_2^2 - \sin^2 i_1 - \sin^2 i_2 + 2 \sin i_1 \sin i_2 \cos(\Omega_1 - \Omega_2)] - 2P_{12} e_1 e_2 \cos(\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2) \qquad (3.22)$$

gde je, očigledno:

$$N_{12} = \frac{1}{8} \frac{a_1}{a_2^2} b^{(1)}_{3/2} \quad ; \quad P_{12} = \frac{1}{8} \frac{a_1}{a_2^2} b^{(2)}_{3/2} \qquad (3.23)$$

Uvedemo li, nadalje, tzv. nesingularne elemente:

$h = e \sin \tilde{\omega}$; $P = \sin i \sin \Omega$

$k = e \cos \tilde{\omega}$; $Q = \sin i \cos \Omega$

da bismo izbegli neodređenost perihela i čvorova, do koje dolazi ako odgovarajuće ekscentričnosti ili nagibi u nekom trenutku postanu jednaki nuli, funkcija poremećaja konačno postaje:

$$R_1 = G_o m_2 \left\{ \frac{1}{2a_2} b^{(0)}_{1/2} + N_{12}[h_1^2 + k_1^2 + h_2^2 + k_2^2 - P_1^2 - Q_1^2 - P_2^2 - Q_2^2 + 2(P_1 P_2 + Q_1 Q_2)] - 2P_{12}(h_1 h_2 + k_1 k_2) \right\} \qquad (3.24)$$

Diferencijalne jednačine za nesingularne elemente mogu se, zanemarujući opet stepene e i $\sin i$ više od drugog, predstaviti u obliku:

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{1}{n_1 a_1^2} \frac{\partial R_1}{\partial k_1} \quad ; \quad \frac{dP_1}{dt} = \frac{1}{n_1 a_1^2} \frac{\partial R_1}{\partial Q_1}$$

$$\frac{dk_1}{dt} = -\frac{1}{n_1 a_1^2} \frac{\partial R_1}{\partial h_1} \quad ; \quad \frac{dQ_1}{dt} = -\frac{1}{n_1 a_1^2} \frac{\partial R_1}{\partial P_1} \qquad (3.25)$$

Iz jednačina (3.24) i (3.25) neposredno sledi:

$$\frac{dh_1}{dt} = (1,1)\, k_1 - [1,2]\, k_2 \; ; \; \frac{dk_1}{dt} = -(1,1)\, h_1 + [1,2]\, h_2$$

$$\frac{dP_1}{dt} = -(1,1)\, Q_1 + (1,2)\, Q_2 \; ; \; \frac{dQ_1}{dt} = (1,1)\, P_1 - (1,2)\, P_2 \qquad (3.26)$$

gde se veličine (1,1), (1,2), i [1,2] nazivaju *Lagrange*-ove zagrade i očigledno označavaju:

$$(1,1) = (1,2) = \frac{2G_o m_2 N_{12}}{n_1 a_1^2} \; ; \; [1,2] = \frac{2G_o m_2 P_{12}}{n_1 a_1^2} \qquad (3.27)$$

Analogne relacije dobijaju se, naravno, i za varijacije elemenata kretanja mase m_2, s tim što je:

$$R_2 = \frac{m_1}{m_2} R_1 \qquad (3.28)$$

Jednačine (3.24) i (3.26) mogu se jednostavno uopštiti za slučaj uzajamnog poremećajnog dejstva *n*-tela. U tom ćemo slučaju imati $\frac{1}{2}n(n-1)$ međusobnih rastojanja, čije recipročne vrednosti daju razvoje:

$$\frac{1}{\Delta_{sr}} = \frac{1}{2a_r} b_{1/2}^{(0)} + N_{sr}[h_s^2 + k_s^2 + h_r^2 + k_r^2 - P_s^2 - Q_s^2 -$$

$$- P_r^2 - Q_r^2 + 2(P_s P_r + Q_s Q_r)] - 2P_{sr}(h_s h_r + k_s k_r) \qquad (3.29)$$

gde se podrazumeva $\alpha = (a_s/a_r) < 1$, pa se diferencijalne jednačine (3.26) dobijaju u obliku:

$$\frac{dh_s}{dt} = (s,s)\, k_s - \sum_{r=1}^{n} [s,r]\, k_r \; ; \; \frac{dk_s}{dt} = -(s,s)\, h_s + \sum_{r=1}^{n} [s,r]\, h_r$$

$$\frac{dP_\bullet}{dt} = -(s,s)\ Q_\bullet + \sum_{r=1}^{n}(s,r)\ Q_r \ ; \quad \frac{dQ_\bullet}{dt} = (s,s)\ P_\bullet - \sum_{r=1}^{n}(s,r)\ P_r \qquad (3.30)$$

gde je $r \neq s$, a *Lagrange*-ove zagrade:

$$(s,s) = \sum_r \frac{2G_o m_r}{n_\bullet a_\bullet^2} N_{\bullet r} \ ; \quad (s,r) = \frac{2G_o m_r}{n_\bullet a_\bullet^2} N_{\bullet r}$$

$$[s,r] = \frac{2G_o m_r}{n_\bullet a_\bullet^2} P_{\bullet r} \qquad (3.31)$$

Na taj se način dobijaju dva nezavisna sistema linearnih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima, koji se mogu integraliti dobro poznatom metodom smene eksponencijalne funkcije u svojstvu partikularnog rešenja. Ne upuštajući se dalje u detalje procedure integraljenja ovih jednačina (o čemu se više može naći u svakom udžbeniku Nebeske mehanike), navešćemo samo konačno rešenje:

$$h_\bullet = \sum_r M_{\bullet r} \sin(g_r t + \beta_r) \ ; \quad k_\bullet = \sum_r M_{\bullet r} \cos(g_r t + \beta_r)$$

$$P_\bullet = \sum_r L_{\bullet r} \sin(f_r t + \gamma_r) \ ; \quad Q_\bullet = \sum_r L_{\bullet r} \cos(f_r t + \gamma_r) \qquad (3.32)$$

Rešenja ovog tipa za sve planete Sunčevog sistema sem Plutona dalo je do sada više autora (Stockwell, 1872; Harzer, 1895; Brouwer and Van Woerkom, 1950; Sharaf and Boudnikova, 1967; Knežević, 1986); o njihovim rezultatima, kao i o rezultatima drugih autora dobijenim iz savremenijih i tačnijih teorija planetskog kretanja biće, međutim, više reči u narednoj glavi.

Jednačine (3.30) i (3.31) su, naravno, opšteg karaktera i mogu se primeniti i na poseban slučaj kretanja malih planeta. Klasični metod za određivanje sekularnih poremećaja putanjskih elemenata male planete polazi zato od jednačina (3.30), koje se, obzirom na zanemarljive mase malih planeta, mogu napisati u obliku:

$$\frac{dh}{dt} = k\sum_{j=1}^{\bullet}(0,j) - \sum_{j=1}^{\bullet}[0,j]\,k'_j \;;\quad \frac{dk}{dt} = -h\sum_{j=1}^{\bullet}(0,j) + \sum_{j=1}^{\bullet}[0,j]\,h'_j$$

$$\frac{dP}{dt} = -Q\sum_{j=1}^{\bullet}(0,j) + \sum_{j=1}^{\bullet}(0,j)\,Q'_j \;;\quad \frac{dQ}{dt} = P\sum_{j=1}^{\bullet}(0,j) - \sum_{j=1}^{\bullet}(0,j)\,P'_j \qquad (3.33)$$

gde su sada *Lagrange*-ove zagrade date sa:

$$(0,j) = \frac{2G_o m'_j N_j}{na^2} \quad ; \quad [0,j] = \frac{2G_o m'_j P_j}{na^2} \qquad (3.34)$$

i gde se veličine bez indeksa odnose na malu planetu. Kako su, međutim, sekularne promene elemenata kretanja poremećajnih planeta poznate iz (3.32), to proizilazi da je:

$$\sum_{j=1}^{\bullet}[0,j]\,k'_j = \sum_{j=1}^{\bullet}\sum_{l=1}^{\bullet} M_{jl}\,[0,j]\cos(g_l t + \beta_l)$$

$$\sum_{j=1}^{\bullet}[0,j]\,h'_j = \sum_{j=1}^{\bullet}\sum_{l=1}^{\bullet} M_{jl}\,[0,j]\sin(g_l t + \beta_l)$$

$$\sum_{j=1}^{\bullet}(0,j)\,Q'_j = \sum_{j=1}^{\bullet}\sum_{l=1}^{\bullet} L_{jl}\,(0,j)\cos(f_l t + \gamma_l)$$

$$\sum_{j=1}^{8} (0,j)\ P'_j = \sum_{j=1}^{8} \sum_{l=1}^{8} L_{jl}\ (0,j)\ \sin\ (f_l t + \gamma_l) \qquad (3.35)$$

Ako, radi uprošćenja, uvedemo:

$$q_o = \sum_{j=1}^{8} (0,j) \quad ; \quad G_l = \sum_{j=1}^{8} M_{jl}[0,j] \quad ; \quad F_l = \sum_{j=1}^{8} L_{jl}(0,j)$$

diferencijalne jednačine (3.33) postaju:

$$\frac{dh}{dt} = g_o k - \sum_{l=1}^{8} G_l \cos\ (g_l t + \beta_l)$$

$$\frac{dk}{dt} = - g_o h + \sum_{l=1}^{8} G_l \sin\ (g_l t + \beta_l)$$

$$\frac{dP}{dt} = - g_o Q + \sum_{l=1}^{8} F_l \cos\ (f_l t + \gamma_l)$$

$$\frac{dQ}{dt} = g_o P - \sum_{l=1}^{8} F_l \sin\ (f_l t + \gamma_l) \qquad (3.36)$$

Ove jednačine se lako rešavaju i na kraju se dobija:

$$h = e_p \sin\ (g_o t + \beta) + \sum_{l=1}^{8} \left(\frac{G_l}{g_o - g_l} \right) \sin\ (g_l t + \beta_l)$$

$$k = e_p \cos\ (g_o t + \beta) + \sum_{l=1}^{8} \left(\frac{G_l}{g_o - g_l} \right) \cos\ (g_l t + \beta_l)$$

$$P = \sin i_p \sin\ (-g_o t + \gamma) + \sum_{l=1}^{8} \left(\frac{F_l}{g_o + f_l} \right) \sin\ (f_l t + \gamma_l)$$

$$Q = \sin i_P \cos(-g_o t + \gamma) + \sum_{l=1}^{\bullet} \left(\frac{F_l}{g_o + f_l} \right) \cos(f_l t + \gamma_l) \qquad (3.37)$$

Konstante integracije u jednačinama (3.37) - e_P, β, i_P, γ - nazivaju se <u>sopstvena ekscentričnost</u>, <u>sopstvena longituda perihela</u>, <u>sopstveni nagib</u> i <u>sopstvena longituda čvora</u>. Inače, pošto se jednačine ovakvog oblika često javljaju i u teoriji malih oscilacija, to se po toj analogiji prvi članovi na desnim stranama nazivaju <u>slobodne oscilacije</u>, a drugi <u>prinudne oscilacije</u>. Slobodne oscilacije odgovaraju eliptičnoj putanji konstantne ekscentričnosti i nagiba, koja rotira konstantnom brzinom (perihel se, pri tom, kreće u direktnom smeru brzinom $\dot{\omega} = g_o$, a uzlazni čvor u retrogradnom, brzinom $\dot{\Omega} = -g_o$, pri čemu je $g_o > 0$). Prinudne oscilacije predstavljaju poremećaje elemenata kretanja male planete prouzrokovane ekscentričnošću i nagibom putanja velikih planeta.

Ako sume prinudnih oscilacija u jednačinama (3.37) označimo sa h'_F, k'_F, P'_F, Q'_F, ove se svode na konačan oblik:

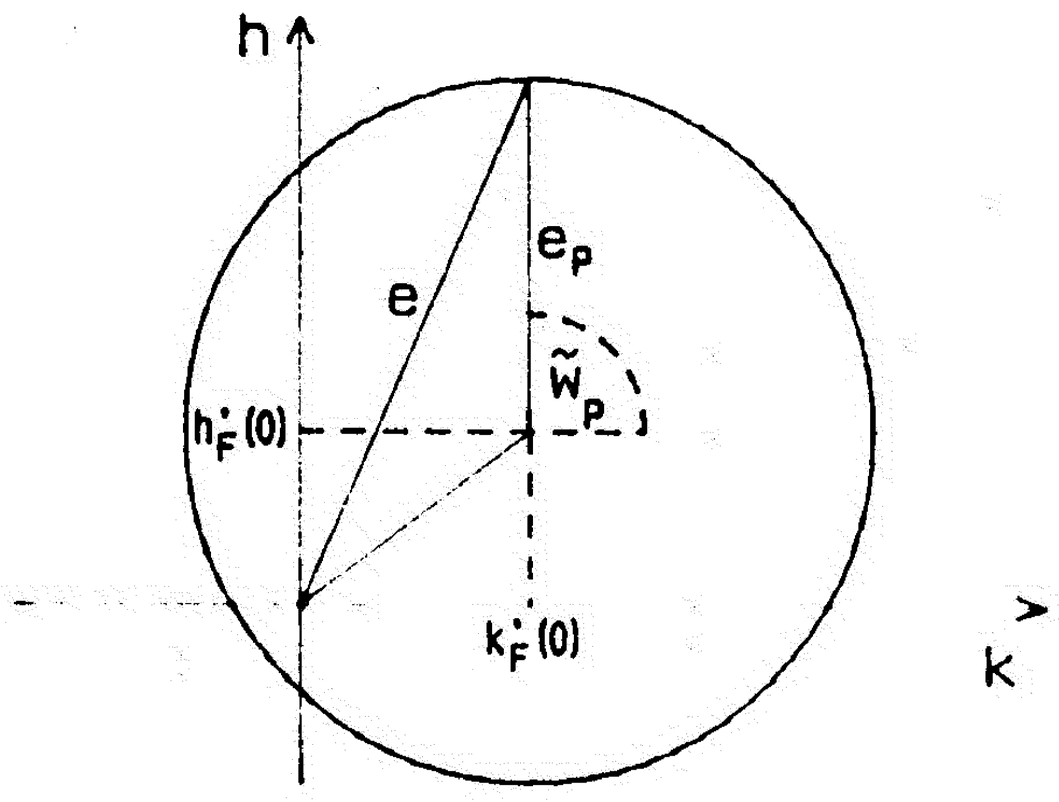
$$h = e_P \sin(g_o t + \beta) + h'_F(t)$$

$$k = e_P \cos(g_o t + \beta) + k'_F(t)$$

$$P = \sin i_P \sin(-g_o t + \gamma) + P'_F(t)$$

$$Q = \sin i_P \cos(-g_o t + \gamma) + Q'_F(t) \qquad (3.38)$$

Prve dve jednačine (3.38) geometrijski su predstavljene na Slici 1., koja odgovara trenutku $t = 0$:



Slika 1. Geometrijska interpretacija jednačina sekularnih promena nesingularnih elemenata kretanja malih planeta.

U toku vremena, dakle, slobodne oscilacije opisuju kružnicu poluprečnika e_p, oko središta $h'_F(t)$, $k'_F(t)$, koje se i samo kreće. Slično se mogu predstaviti i druge dve jednačine (3.38).

Lagrange-ove zagrade (0,j), [0,j] i frekvencije g_o utabličili su još *Noren* i *Raab* (1900) u funkciji velike poluose, dok *Brouwer* i *Van Woerkom* (1950) daju slične tabele, ali za $\left(\frac{G_l}{g_o - g_l} \right)$ i $\left(\frac{F_l}{g_o + f_l} \right)$, te za prinudne oscilacije h'_F, k'_F, P'_F , Q'_F, sve za epohu 1950.0.

Zaključimo, konačno, ovaj odeljak konstatacijom da poznavanje prinudnih oscilacija za neku epohu omogućuje da, polazeći od jednačina (3.38), jednostavno izračunamo sopstvene elemente malih planeta iz njihovih oskulatornih elemenata za istu epohu (za koju usvajamo $t = 0$):

$$e_p = \sqrt{(h - h'_F)^2 + (k - k'_F)^2} \; ; \qquad \beta = \operatorname{arctg} \frac{h - h'_F}{k - k'_F}$$

$$\sin i_p = \sqrt{(P - P'_F)^2 + (Q - Q'_F)^2} \; ; \qquad \gamma = \operatorname{arctg} \frac{P - P'_F}{Q - Q'_F} \tag{3.39}$$

3.3 Teorija Williams-a

Imajući u vidu sve nedostatke klasičnog rešenja za sekularne poremećaje malih tela Sunčevog sistema, *Williams* je u svojoj doktorskoj tezi (Williams, 1969) predložio jednu kombinaciju analitičkih i numeričkih tehnika, koja u izvesnoj meri otklanja probleme s kojima su se sukobljavale ranije čisto analitičke ili numeričke procedure. Pošao je, pri tom, od poznate *Gauss*-ove (1876) numeričke metode za određivanje sekularnih poremećaja, koju je ovaj predložio još 1818. god. i koja se uspešno može primeniti na putanje bilo koje ekscentričnosti i nagiba. Nedostatak ove metode je, međutim, što u njenim jednačinama razni oscilatorni članovi nisu eksplicitno razdvojeni, pa se, zbog toga, sopstveni elementi malih planeta napr. ne mogu iz dobijenih rešenja neposredno izračunati. Primenjujući klasičnu teoriju poremećaja da bi u diferencijalnim jednačinama promena elemenata kretanja, koje se javljaju u *Gauss*-ovoj metodi, izolovao svaki periodični član ponaosob, *Williams* zatim tako razdvojene diferencijalne jednačine integrali numerički i dobija odgovarajuća rešenja. Koristeći, dalje, osobine simetrije i periodičnosti rezultujućih funkcija on pokazuje da se primena numeričkog postupka može ograničiti samo na jedan tipični interval vrednosti nezavisno promenljive (napr. 0 - Π/2 po argumentu perihela) i da se onda ovi rezultati mogu koristiti kao i bilo koje drugo analitičko rešenje za izučavanje evolucije putanje u proizvoljnom vremenskom intervalu. Od naročitog značaja u vezi *Williams*-ove teorije je činjenica da je on tu ukazao i na značaj tzv. sekularnih rezonanci koje se javljaju kada razlika

frekvencije longitude perihela ili longitude čvora male planete i odgovarajuće frekvencije sekularnih promena istih elemenata poremećajne planete postane veoma mala. Kada, naime, neka od ovih razlika teži nuli, razlika samih elemenata osciluje oko 0 ili Π, a amplitude promena ekscentričnosti i nagiba male planete postaju izuzetno velike. *Williams* je pokazao da u raspodelama putanjskih elemenata malih planeta postoje praznine (naravno, različite od poznatih *Kirkwood*-ovih praznina), koje se poklapaju sa položajima tri najvažnije sekularne rezonance.

Kao što je već pomenuto, sopstvene elemente malih planeta izvedene na osnovu ove teorije *Williams* je definisao tako da odgovaraju vrednosti 0° sopstvenog argumenta perihela. Same rezultate, međutim, objavio je nešto kasnije (Williams, 1979).

Sekularni deo funkcije poremećaja (3.2) se kod primene *Gauss*-ove metode izdvaja putem osrednjavanja R po srednjim anomalijama poremećenog i poremećajnog tela M i M' (npr. male i velike planete). Ako tako osrednjenu funkciju označimo sa $\langle R \rangle$, imamo:

$$\langle R \rangle = \frac{1}{4\Pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R(M,M')\, dM\, dM' \qquad (3.40)$$

gde se opet podrazumeva sumiranje po svim poremećajnim planetama koje se u datom slučaju uzimaju u obzir. Dvostruki integral, koji se ovde javlja, izračunava se bilo čisto numerički ili kombinacijom numeričkog integraljenja po M i određivanja kompletnog eliptičkog integrala po M' (Musen, 1963), pri čemu se svi elementi, sem naravno, M i M', smatraju konstantnim. I parcijalni izvodi funkcije poremećaja, koji figurišu u jednačinama (3.1), mogu se na isti način osrednjiti,

tj. osloboditi kratko-periodičnih poremećaja, da bi se zatim rezultujuće diferencijalne jednačine numerički integralile i odredili sekularni poremećaji elemenata e, i, ω, Ω. Dvostruki integral (3.40) u stvari predstavlja srednju vrednost po vremenu svih mogućih relativnih položaja dva tela.

Gauss-ov metod se ne može uspešno primeniti u dva specijalna slučaja - kod bliskog prolaza male planete pored velike, odnosno kada su njihova srednja kretanja samerljiva. Metod, naime, pretpostavlja konstantnost velike poluose putanje male planete i slučajne promene relativnih položaja dva tela, što u ovim slučajevima očigledno nije ispunjeno.

Sa praktične tačke gledišta, u jednačini (3.40) zgodnije je koristiti prave anomalije f i f' umesto srednjih. Iz izraza za održanje ugaonog momenta u problemu dva tela:

$$r^2 df = \sqrt{G_o a(1 + m)(1 - e^2)}\, dt$$

zatim, veze vremena i srednje anomalije:

$$dM = n\, dt$$

i trećeg *Kepler*-ovog zakona u obliku (3.6) dobija se konačno:

$$\langle R \rangle = \frac{1}{4\Pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R(f,f') \frac{r^2}{a^2\sqrt{1 - e^2}} \frac{r'^2}{a'^2\sqrt{1 - e'^2}}\, df\, df' \qquad (3.41)$$

Proceduru izvođenja diferencijalnih jednačina sekularnih promena elemenata kretanja *Williams* je podelio na nekoliko faza. Prvo je izveo izraze za parcijalne izvode sekularne funkcije poremećaja (3.41) po elementima i formirao

diferencijalne jednačine u osnovnom obliku. Zatim je ove jednačine razvio po ekscentričnosti i nagibu poremećajne planete, da bi, prihvatajući određeni stepen aproksimacije, razdvojio slobodne i prinudne oscilacije. Elemente male planete podelio je na dva poremećena dela - nultog i prvog reda, da bi, konačno, na isti način razdvojio i odgovarajuće članove u diferencijalnim jednačinama.

Heliocentrični koordinatni sistem koji koristi, Williams je definisao tako da je jedna osa uperena ka uzlaznom čvoru putanje male planete, druga je u invarijabilnoj ravni pomerena za 90° u direktnom smeru, a treća s ovima formira desni, ortogonalni sistem. Izraz za ugao među heliocentričnim vektorima položaja male i velike planete se onda odmah može napisati u obliku:

$$\begin{aligned}\cos S = {} & \cos u \,[\sin u' \cos i' \sin(\Omega - \Omega') + \cos u' \cos(\Omega - \Omega')] \\ & + \sin u \cos i \,[\sin u' \cos i' \cos(\Omega - \Omega') - \cos u' \sin(\Omega - \Omega')] \\ & + \sin u \sin i \sin u' \sin i' \end{aligned} \qquad (3.42)$$

gde je nova uglovna promenljiva, argument latitude, definisana sa:

$$u = f + \omega \;\; ; \;\; u' = f' + \omega' \qquad (3.43)$$

Izvod funkcije poremećaja po bilo kom od elemenata $x \in \{ a, e, i, M_o, \omega, \Omega \}$ koje Williams koristi, sledi neposredno iz jednačina (3.2) i (3.3):

$$\frac{\partial R}{\partial x} = -G_o m' \left[\left(\frac{r - r' \cos S}{\Delta^3} + \frac{\cos S}{r'^2} \right) \frac{\partial r}{\partial x} - \left(\frac{r r'}{\Delta^3} - \frac{r}{r'^2} \right) \frac{\partial \cos S}{\partial x} \right] \qquad (3.44)$$

(i dalje se, naravno, podrazumeva sumiranje po svim poremećajnim planetama). Lako se sada iz jednačina keplerovskog kretanja može izvesti:

$$\frac{\partial r}{\partial a} = \frac{r}{a} \quad ; \quad \frac{\partial r}{\partial e} = - a \cos f \quad ; \quad \frac{\partial r}{\partial M_o} = \frac{ae \sin f}{\sqrt{1 - e^2}}$$

$$\frac{\partial r}{\partial i} = \frac{\partial r}{\partial \omega} = \frac{\partial r}{\partial \Omega} = 0$$

$$\frac{\partial \cos S}{\partial a} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \cos S}{\partial e} = \left(\frac{a}{r} + \frac{1}{1 - e^2} \right) \sin f \frac{\partial \cos S}{\partial \omega}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \cos S}{\partial i} = & - \sin u \sin i \, [- \cos u' \sin(\Omega - \Omega') + \\ & + \sin u' \cos i' \cos(\Omega - \Omega')] \\ & + \cos i \sin i' \sin u \sin u' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \cos S}{\partial \omega} = & - \sin u \, [\cos u' \cos(\Omega - \Omega') + \\ & + \sin u' \cos i' \sin(\Omega - \Omega')] \\ & + \cos u \cos i \, [- \cos u' \sin(\Omega - \Omega') + \\ & + \sin u' \cos i' \cos(\Omega - \Omega')] \\ & + \sin i \sin i' \cos u \sin u' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \cos S}{\partial \Omega} = & \cos u \, [- \cos u' \sin(\Omega - \Omega') + \\ & + \sin u' \cos i' \cos(\Omega - \Omega')] \\ & + \sin u \cos i \, [- \cos u' \cos(\Omega - \Omega') - \\ & - \sin u' \cos i' \sin(\Omega - \Omega')] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \cos S}{\partial M_o} = \frac{a^2}{r^2} \sqrt{1 - e^2} \frac{\partial \cos S}{\partial \omega} \qquad (3.45)$$

Očigledno, jednačine (3.1), (3.2), (3.3), (3.44) i (3.45) u potpunosti opisuju promene elemenata u vremenu, dok se

sekularne promene izvode iz ovih jednačina primenom dvostrukog integrala (3.41).

Williams sada uvodi pojednostavljenja koja su već opisana u vezi sa linearnom teorijom, a odnose se na pretpostavljenu konstantnost velike poluose i na svođenje teorije u okvire izučavanja samo dugo-periodičnih promena putanje, ostavljanjem po strani problema određivanja položaja tela na putanji. On zatim demonstrira takođe već pomenuto svojstvo funkcije poremećaja da njen indirektni deo u prvom redu po masi ne sadrži sekularne članove, izvodeći iz (3.2) i (3.41):

$$- G_o m' \left\langle \frac{r \cos S}{r'^2} \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{4\Pi^2} \int_o^{2\pi} \int_o^{2\pi} \left(- G_o m' \frac{r \cos S}{r'^2} \right) \frac{r'^2}{a'^2 \sqrt{1 - e^2}} \frac{r^2}{a^2 \sqrt{1 - e^2}} du' du$$

$$= - \frac{G_o m'}{4\Pi^2 a'^2 \sqrt{1 - e'^2}\ a^2 \sqrt{1 - e^2}} \int_o^{2\pi} r^3 \int_o^{2\pi} \cos S \, du' du = 0 \qquad (3.46)$$

pošto je, naravno,:

$$\int_o^{2\pi} \cos S \, du' = 0$$

(diferencijali df i df' zamenjeni su ovde sa du i du' u skladu sa 3.43). Koristeći, nadalje, formu totalnog diferencijala izraza za kvadrat rastojanja male i velike planete Δ^2, on primenom niza algebarskih transformacija izvodi osnovne izraze za sekularne promene elemenata kretanja, koji proizilaze iz

Gauss-ove metode:

$$\left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle = \frac{G_o m'}{4\Pi^2 a^{7/2}(1-e^2)a'^2\sqrt{1-e'^2}} \cdot$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r^3 r'^2}{\Delta^3} \sin f\left[r^2 + 2r'^2 - 3rr'\cos S\right] du'du$$

$$\left\langle \frac{di}{dt} \right\rangle = \frac{G_o m'}{4\Pi^2 a^{5/2}(1-e^2)a'^2\sqrt{1-e'^2}} \cdot$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r^3 r'^3}{\Delta^3} \{\cos i \sin i' \cos u \sin u' -$$

$$- \sin i \cos u [- \cos u' \sin(\Omega - \Omega') +$$

$$+ \cos i' \sin u' \cos(\Omega - \Omega')]\} du'du$$

$$\left\langle \frac{d\omega}{dt} \right\rangle = \frac{G_o m'}{4\Pi^2 a^{5/2}(1-e^2)a'^2\sqrt{1-e'^2}} \cdot$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r^2 r'^2}{\Delta^3} \left\{-\frac{r}{p}\left[1 + \frac{\cos f}{e}\right][r^2 + 2r'^2 - 3rr'\cos S] -\right.$$

$$- [r'^2 - rr'\cos S] - rr'\cos i [\operatorname{ctg} i \sin i' \sin u \sin u'$$

$$+ \sin u \cos u' \sin(\Omega - \Omega')$$

$$\left. - \sin u \cos i' \sin u' \cos(\Omega - \Omega')]\right\} du'du$$

$$\left\langle \frac{d\Omega}{dt} \right\rangle = \frac{G_o m'}{4\Pi^2 a^{5/2}(1-e^2)a'^2\sqrt{1-e'^2}} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r^3 r'^3}{\Delta^3} \cdot$$

$$\cdot \{\operatorname{ctg} i \sin i' \sin u \sin u' - \sin u [- \cos u' \sin(\Omega - \Omega')$$

$$+ \cos i' \sin u' \cos(\Omega - \Omega')]\} du'du \qquad (3.47)$$

gde je $P = a(1 - e^2)$ parametar elipse.

U narednoj fazi *Williams* ove jednačine razvija po ekscentričnosti i nagibu poremećajne planete, odbacujući sve članove koji sadrže drugi i više stepene e', odnosno $\sin i'$. U toj aproksimaciji, usvajajući i $\cos i' \simeq 1$, jednačina (3.42) postaje:

$$\cos S = \cos u \cos v' + \cos i \sin u \sin v' + \sin i \sin i' \sin u \sin u' \quad (3.48)$$

gde je uvedena nova promenljiva:

$$v' = u' - \Omega + \Omega' \quad (3.49)$$

koja predstavlja približno ugaono rastojanje poremećajne planete od čvora male planete i za koju važi: $dv' = du' = df'$. Usvajajući, nadalje, $r' \simeq a'(1 - e'\cos f')$, kvadrat rastojanja između dva tela postaje:

$$\Delta^2 = r^2 + a'^2(1 - 2e'\cos f') - 2ra'(1 - e'\cos f')(\cos u \cos v' + \cos i \sin u \sin v') - 2ra'\sin i \sin i' \sin u \sin u' \quad (3.50)$$

Iz (3.48) i (3.50) sada neposredno sledi:

$$\cos S = \cos S_o + \sin i \sin i' \sin u \sin u' \quad (3.51)$$

odnosno:

$$\frac{1}{\Delta^3} = \frac{1}{\Delta_o^3} + \frac{3}{\Delta_o^5}\left[e'\cos f'(a'^2 - ra'\cos S_o) + ra'\sin i \sin i' \sin u \sin u'\right] \quad (3.52)$$

gde je, očigledno,:

$$\cos S_o = \cos u \cos v' + \cos i \sin u \sin v'$$

$$\Delta_o = (r^2 + a'^2 - 2ra'\cos S_o)^{1/2} \quad (3.53)$$

Indeks 0 označava ovde veličine nultog reda, tj. one veličine koje ne sadrže faktore e', odnosno $\sin i'$. Smenom (3.51) i (3.52) u (3.47), nakon sređivanja, dobija se:

$$\left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle = \frac{G_o m'}{4\Pi^2 a^{7/2}(1-e^2)} \int_o^{2\pi}\int_o^{2\pi} \frac{r^3 \sin f}{\Delta_o^3} \Big\{ [r^2 + 2a'^2 - 3ra'\cos S_o]$$

$$- e'\cos f' \,[2r^2 + 5a'^2 - 6ra'\cos S_o] +$$

$$+ \frac{3a'^2}{\Delta_o^2}\left[a' - r\cos S_o\right]\left[e'\cos f'(a' - r\cos S_o) + \right.$$

$$\left. + r \sin i \sin i' \sin u \sin u' \right]\Big\}\, du'du$$

$$\left\langle \frac{di}{dt} \right\rangle = \frac{G_o m' a'}{4\Pi^2 a^{5/2}(1-e^2)} \int_o^{2\pi}\int_o^{2\pi} \frac{r^3}{\Delta_o^3} \Big\{ - \sin i \cos u \sin v' \cdot$$

$$\cdot \left[1 + \frac{3}{\Delta^2}\left\{ - e'r^2\cos f' + re'a'\cos f' \cos S_o + \right.\right.$$

$$\left. + ra'\sin i \sin i' \sin u \sin u' \right)\Big]$$

$$\left. + \cos i \sin i' \cos u \sin u' \right\}\, du'du$$

$$\left\langle \frac{d\omega}{dt} \right\rangle = \frac{G_o m'}{4\Pi^2 a^{5/2}(1-e^2)} \int_o^{2\pi}\int_o^{2\pi} \frac{r^2}{\Delta_o^3} \Big\{ -\Big[\frac{r}{p}\left(1 + \frac{\cos f}{e}\right)\Big(r^2 +$$

$$+ 2a'^2 - 3ra'\cos S_o\Big) + \Big(a'^2 - ra'\cos S_o\Big)\Big]\Big[1 + \frac{3}{\Delta_o^2} \cdot$$

$$\cdot \Big(e'a'^2\cos f' - re'a'\cos f'\cos S_o +$$

$$+ ra'\sin i \sin i' \sin u \sin u'\Big)\Big] + e'\cos f'\Big[\frac{r}{p}\left(1 + \frac{\cos f}{e}\right) \cdot$$

$$\cdot \Big(2r^2 + 8a'^2 - 9ra'\cos S_o\Big) + 4a'^2 - 3ra'\cos S_o\Big] +$$

$$+ ra'\sin i \sin i' \sin u \sin u' \left[1 + 3\frac{r}{p}\left(1 + \frac{\cos f}{e}\right)\right] +$$

$$+ ra'\cos i \sin u \sin v' - ra'\cos i \operatorname{ctg} i \sin i' \sin u \sin u'$$

$$+ \frac{3ra'}{\Delta_o^2}\cos i \sin u \sin v' \left[e'\cos f'\left(r^2 + 2a'^2 - 3ra'\cos S_o\right)\right.$$

$$\left. + ra'\sin i \sin i' \sin u \sin u'\right]\Big\} du'du$$

$$\left\langle \frac{d\Omega}{dt} \right\rangle = \frac{G_o m' a'}{4\pi^2 a^{5/2}(1 - e^2)} \int_o^{2\pi}\int_o^{2\pi} \frac{r^3}{\Delta_o^3}\Big\{- \sin u \sin v' +$$

$$+ \operatorname{ctg} i \sin i' \sin u \sin u' - \frac{3}{\Delta_o^2}\sin u \sin v' \left[e'\cos f' \cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(- r^2 + ra'\cos S_o\right) + ra'\sin i \sin i' \sin u \sin u'\right]\Big\} du'du \qquad (3.54)$$

U ovim su sada jednačinama eksplicitno razdvojeni članovi funkcije poremećaja koji proizvode slobodne i prinudne oscilacije elemenata kretanja, pri čemu prinudnu komponentu čine oni članovi koji sadrže faktore $e'\cos f'$ i $\sin i' \sin u'$. Članovi koji ostaju različiti od nule i kada se e', odnosno i' izjednače s nulom predstavljaju članove nultog reda, a elementi koji se dobijaju numeričkim integraljenjem samo tih članova predstavljaju rešenja nultog reda. Promene elemenata nultog reda *Williams* naziva slobodnim oscilacijama.

Ekscentričnost i nagib poremećajne planete u kombinacijama $e'\cos f'$, odnosno $\sin i' \sin u'$ lako se mogu povezati sa već opisanim rezultatima linearne teorije (3.32):

$$e'\cos f' = e'\cos(v' + \Omega - \tilde{\omega}') = k'\cos(v' + \Omega) + h'\sin(v' + \Omega) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} M_{ji}[\cos v' \cos(\Omega - q_i t - \beta_i) - \sin v' \sin(\Omega - q_i t - \beta_i)]$$

$$\sin i' \sin u' = \sin i' \sin(v' + \Omega - \Omega') =$$

$$= Q'\sin(v' + \Omega) - P'\cos(v' + \Omega) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} N_{ji}[\sin v' \cos(\Omega - f_i t - \gamma_i) + \cos v' \sin(\Omega - f_i t - \gamma_i)] \qquad (3.55)$$

Sledeći korak u *Williams*-ovom postupku izvođenja konačnog oblika diferencijalnih jednačina sekularnih promena elemenata kretanja je uvođenje nesingularnih elemenata h, k, P, Q, i odgovarajuća transformacija jednačina (3.54). Kako se ovde radi uglavnom o prostoj algebarskoj manipulaciji prosledićemo u svojstvu primera odgovarajući postupak samo za jednu od novih promenljivih. Tako, napr., iz (3.23) imamo:

$$\left\langle \frac{dP}{dt} \right\rangle = \cos i \sin\Omega \left\langle \frac{di}{dt} \right\rangle + \sin i \cos\Omega \left\langle \frac{d\Omega}{dt} \right\rangle \qquad (3.56)$$

i:

$$\left\langle \frac{dP}{dt} \right\rangle = \frac{G_o m' a'}{4\pi^2 a^{5/2}(1 - e^2)} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r^3}{\Delta_o^3} \Big\{ - \sin v' \Big[Q \sin u + P \cos u \cos i \Big] \Big[1 + \frac{3}{\Delta_o^2} \Big(- r^2 e'\cos f' + ra'e'\cos f' \cos S_o + ra'\sin i \sin i' \sin u \sin u' \Big) \Big] + \cos i \sin i' \sin u' \cdot \Big[\cos\Omega \sin u + \cos i \sin\Omega \cos u \Big] \Big\} du'du \qquad (3.57)$$

Primetimo da u svim daljim jednačinama *Williams* radi kratkoće pisanja koristi i stare i nove promenljive.

Do ovog trenutka, inače, jednačine sa eksplicitno razdvojenim slobodnim i prinudnim oscilacijama nemaju nikakvu posebnu prednost u odnosu na polazne jednačine. Zato *Williams* po ugledu na klasičnu teoriju poremećaja razdvaja promenljive na njihove poremećene delove nultog i prvog reda:

$$h = h_o + \delta h \quad ; \quad a = a_o + \delta a$$
$$k = k_o + \delta k \quad ; \quad e = e_o + \delta e$$
$$P = P_o + \delta P \quad ; \quad \sin i = \sin i_o + \delta \sin i$$
$$Q = Q_o + \delta Q \quad ; \quad \tilde{\omega} = \tilde{\omega}_o + \delta\tilde{\omega}$$
$$\Omega = \Omega_o + \delta\Omega \qquad (3.58)$$

Promenljive prvog reda opisuju u stvari oscilacije promenljivih nultog reda koje se javljaju usled malih inicijalnih pomaka u a_o, e_o, i $\sin i_o$. Ove slobodne oscilacije prvog reda omogućuju, naime, da se slobodne oscilacije nultog reda izračunaju za bilo koje vrednosti a, e, $\sin i$, u oblasti oko a_o, e_o, $\sin i_o$. Inače, promenljivima prvog reda *Williams* takođe pridružuje i prinudne oscilacije.

Tako se sada uz promenljivu $P_o(t)$, napr., pojavljuju nove tri promenljive prvog reda koje odgovaraju parcijalnim izvodima $a_o \dfrac{\partial P_o}{\partial a}$, $\dfrac{\partial P_o}{\partial e(0)}$, $\dfrac{\partial P_o}{\partial \sin i(0)}$, gde $e(0)$ i $\sin i(0)$ predstavljaju početne vrednosti, pa imamo:

$$P_o(a_o + \delta a, e_o(0) + \delta e(0), \sin i_o(0) + \delta \sin i(0), t) =$$

$$= P_o(a_o,\ e_o(0),\ \sin i_o(0),\ t) +$$

$$+ a_o \frac{\partial P_o(a_o,\ e_o(0),\ \sin i_o(0),\ t)}{\partial a} \frac{\delta a}{a_o} +$$

$$+ \frac{\partial P_o(a_o,\ e_o(0),\ \sin i_o(0),\ t)}{\partial e(0)} \delta e(0) +$$

$$+ \frac{\partial P_o(a_o,\ e_o(0),\ \sin i_o(0),\ t)}{\partial \sin i(0)} \delta \sin i(0) \qquad (3.59)$$

gde su $\delta e(0)$ i $\delta \sin i(0)$ početna mala pomeranja. Kako i za h_o, k_o, i Q_o važe slične jednačine, imaćemo sada ukupno 12 promenljivih prvog reda za slobodne oscilacije. Pošto se a smatra konstantnim u okviru ove teorije, to će i δa biti konstantno, a odnos $(\delta a/a_o)$ se uvodi u ovim jednačinama pošto približno jednaki priraštaji brzine odgovaraju priraštajima $(\delta a/a_o)$, (δe), i $(\delta \sin i)$.

Pored toga, dakle, što se zasebno izražava svaka od promenljivih prvog reda δh, δk, δP, δQ, za svaki početni pomak $\delta e(0)$, $\delta \sin i(0)$, i $\delta a/a_o$, vrednosti ovih promenljivih zasebno se određuju i za svaku prinudnu frekvenciju g_l i f_l. Označavajući sa λ u ovom slučaju pravu longitudu $\lambda = f + \tilde{\omega}$, izrazi za $\cos S_o$ i r mogu se napisati u obliku:

$$\cos S_o = \cos(\lambda - \lambda') - (1 - \cos i) \sin(\lambda - \Omega) \sin(\lambda' - \Omega)$$

$$r = \frac{a\ (1 - e^2)}{1 + k \cos \lambda + h \sin \lambda} \qquad (3.60)$$

odakle sledi:

$$\delta \cos S_o = \sin u \sin v' \, \delta \cos i + (\cos u \sin v' + \sin u \cos v') \frac{\sin^2 i_o}{1 + \cos i_o} \delta\Omega$$

$$\delta r = - r \frac{\delta e^2}{1 - e_o^2} - \frac{r^2}{p} (\cos \lambda_o \, \delta k + \sin \lambda_o \, \delta h) + \frac{r}{a_o} \delta a$$

$$\delta\left(\frac{1}{\Delta^3_o}\right) = \frac{3}{\Delta^5_o} [(r - a' \cos S_o)\delta r - r a' \, \delta \cos S_o] \qquad (3.61)$$

gde je:

$$\cos S_o = \cos u \cos v' + \cos i_o \sin u \sin v'$$

$$\delta e^2 = 2 h_o \delta h + 2 k_o \delta k$$

$$\delta \cos i = - \frac{P_o \delta P + Q_o \delta Q}{\cos i_o} \; ; \quad \delta\Omega = \frac{Q_o \delta P - P_o \delta Q}{\sin^2 i_o} \qquad (3.62)$$

Koristeći ove izraze može se jednačina (3.57) i njoj odgovarajuće jednačine za ostala tri nesingularna elementa kretanja razviti po promenljivima prvog reda (napomenimo da se kod ovog razvoja položaj na putanji smatra konstantnim), pa se dobija:

$$< \frac{dP}{dt}^o + \delta\left(\frac{dP}{dt}\right) > = \frac{G_o m' a'}{4\Pi^2 a^{5/2} (1 - e_o^2)} \int_o^{2\pi} \int_o^{2\pi} \frac{r^3}{\Delta^3_o} \{- \sin u \sin v' \cdot$$

$$\left[Q_o + Q_o \frac{\delta e^2}{1 - e_o^2} + P_o \cos i_o \delta\Omega + \frac{1}{2} Q_o \frac{\delta a}{a_o} + \delta Q\right] -$$

$$- \cos u \sin v' \left[P_o \cos i_o \left(1 + \frac{\delta e^2}{1 - e_o^2} + \frac{1}{2} \frac{\delta a}{a_o} \right) + P_o \delta \cos i - \right.$$

$$\left. - Q_o \delta\Omega + \cos i_o \delta p \right] + \sin u \cos v' Q_o \delta\Omega + P_o \cos i_o \cos u \cos v' \delta\Omega$$

$$+ \frac{3}{\Delta_o^2} \left[Q_o \sin u \sin v' + P_o \cos i_o \cos u \sin v' \right] \cdot$$

$$\cdot \left[\left(r^2 - ra' \cos S_o \right) \frac{\delta a}{a_o} + \left(a'^2 - ra' \cos S_o \right) \left(\frac{\delta e^2}{1 - e_o^2} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{r}{p} \cos \lambda_o \delta k + \frac{r}{p} \sin \lambda_o \delta h \right) + ra' \sin u \sin v' \frac{\delta \sin^2 i}{2 \cos i_o} - \right.$$

$$- \frac{ra'}{1 + \cos i_o} \left(\cos u \sin v' + \sin u \cos v' \right) \sin^2 i_o \delta\Omega +$$

$$\left. + e' \cos f' \left(r^2 - ra' \cos S_o \right) - ra' \sin i_o \sin i' \sin u \sin u' \right] +$$

$$+ \cos i_o \sin i' \sin u' \left\{ \cos \Omega_o \sin u + \right.$$

$$\left. \left. + \cos i_o \sin \Omega_o \cos u \right) \right\} dv' du \qquad (3.63)$$

Ova se jednačina može nešto pojednostaviti i preurediti tako da se kombinuju članovi uz $\sin v'$, odnosno $\cos v'$, pa se, napokon, izdvajanjem članova nultog reda, dobija:

$$\left\langle \frac{dP_o}{dt} \right\rangle = \frac{G_o m' a'}{4\pi^2 a_o^{5/2} (1 - e_o^2)} \int_o^{2\pi} \int_o^{2\pi} \frac{r^3}{\Delta_o^3} \left\{ - Q_o \sin u \sin v' - \right.$$

$$\left. - P_o \cos u \sin v' \cos i_o \right\} dv' du \qquad (3.64)$$

odnosno:

$$< \delta\left(\frac{dp}{dt}\right) > = \frac{G_o m' a'}{4\Pi^2 a^{5/2}(1 - e_o^2)} \int_o^{2\pi} \int_o^{2\pi} \frac{r^3}{\Delta_o^3} \left\{ - \sin u \sin v' \left[\delta Q + \right.\right.$$

$$+ \frac{2Q_o}{1 - e_o^2} \left(h_o \delta h + k_o \delta k\right) + \frac{Q_o}{2} \frac{\delta a}{a_o} + \cos i_o \sin \Omega_o \left[\cos \Omega_o \delta P - \right.$$

$$\left.\left. - \sin \Omega_o \delta Q\right)\right] - \cos u \sin v' \left[\cos i_o \delta P - \frac{P_o}{\cos i_o} \left(P_o \delta P + Q_o \delta Q\right) + \right.$$

$$+ \frac{2P_o \cos i_o}{1 - e_o^2} \left(h_o \delta h + k_o \delta k\right) + \frac{P_o \cos i_o}{2} \frac{\delta a}{a_o} -$$

$$\left. - \left(1 + \frac{1}{\cos^2 i_o}\right) \cos \Omega_o \left(\cos \Omega_o \delta P - \sin \Omega_o \delta Q\right)\right] +$$

$$+ \cos u \cos v' \sin \Omega_o \left(\cos \Omega_o \delta P - \sin \Omega_o \delta Q\right) + \frac{3 \sin v'}{\Delta_o^2} \cdot$$

$$\cdot \left[Q_o \sin u + P_o \cos i_o \cos u\right] \cdot \left[\left(r^2 - ra' \cos S_o\right) \frac{\delta a}{a_o} \left(a^2 - \right.\right.$$

$$\left. - ra' \cos S_o\right) \cdot \left(\frac{2}{1 - e_o^2} h_o \delta h + \frac{2}{1 - e_o^2} k_o \delta k + \frac{r}{p} \cos \lambda_o \delta k + \right.$$

$$\left. + \frac{r}{p} \sin \lambda_o \delta h\right) + \frac{ra' \sin u \sin v'}{\cos i_o} \left(P_o \delta P + Q_o \delta Q\right) -$$

$$- \frac{ra' \cos u \sin v'}{\cos i_o} \left(Q_o \delta P - P_o \delta Q\right) + e' \cos f' \left(r^2 - ra' \cos S_o\right) -$$

$$\left. - ra' \sin i_o \sin i' \sin u \sin u'\right] + \cos i_o \sin i' \sin u' \cdot$$

$$\left. \cdot \left(\cos \Omega_o \sin u + \cos i_o \sin \Omega_o \cos u\right)\right\} dv' du \qquad (3.65)$$

Ovo je konačan oblik diferencijalnih jednačina sekularnih promena elemenata kretanja koje se dobijaju u Williams-ovoj teoriji i koje se koriste za izračunavanje tih promena. U praksi se prvo analitički određuju integrali po v', zatim se izvrši sumiranje po svim poremećajnim planetama, integrali po u se izračunaju numerički i konačno se, isto tako numeričkim postupkom, reše rezultujuće diferencijalne jednačine.

Kao što je već rečeno i kao što se može zaključiti iz napomena i komentara uz jednačine (3.59) i (3.65), integracija izvedenih diferencijalnih jednačina je glomazan i komplikovan zadatak. Ne zalazeći mnogo u detalje pokušaćemo ovde najkraće skicirati postupak i naznačiti neke bitne momente, koji su od značaja, između ostalog, i za određivanje sopstvenih elemenata malih planeta.

Pre svega, treba reći da Williams u postupku integracije u svojstvu nezavisno promenljive koristi argument perihela nultog reda ω_o. Razlog tome je što se, po njegovom mišljenju, slobodne oscilacije prvog reda najbolje i najpreciznije mogu predstaviti upravo u funkciji argumenta perihela. U tom je slučaju, dakle, $\delta\omega = 0$ i $\omega = \omega_o$, ali zato vreme T postaje $T(\omega) = T_o(\omega_o) + \delta T$. Kako je u praksi pogodno diferencijalne jednačine rešavati tako da u početnom trenutku T_i bude:

$$\omega_o = \Omega_o(0) = \tilde{\omega}_o(0) = T_o(0) = h_o(0) = P_o(0) = 0$$

$$k_o(0) = e_o(0) \quad ; \quad Q_o(0) = \sin i_o(0) \qquad (3.66)$$

Stvarne vrednosti promenljivih h, k, P, Q, T za početne vrednosti longitude čvora Ω_i i longitude perihela $\tilde{\omega}_i$ biće:

$$h_T = \cos \tilde{\omega}_i \, [h_o(\omega_o) + \delta h(\omega_o)] + \sin \tilde{\omega}_i \, [k_o(\omega_o) + \delta k(\omega_o)]$$

$$k_T = \cos \tilde{\omega}_i \, [k_o(\omega_o) + \delta k(\omega_o)] - \sin \tilde{\omega}_i \, [h_o(\omega_o) + \delta h(\omega_o)]$$

$$P_T = \cos \Omega_i \, [P_o(\omega_o) + \delta P(\omega_o)] + \sin \Omega_i \, [Q_o(\omega_o) + \delta Q(\omega_o)]$$

$$Q_T = \cos \Omega_i \, [Q_o(\omega_o) + \delta Q(\omega_o)] - \sin \Omega_i \, [P_o(\omega_o) + \delta P(\omega_o)]$$

$$T_T = T_i + T_o(\omega_o) + \delta T(\omega_o) \qquad (3.67)$$

Radi jednostavnosti ovde je ispuštena oznaka < > , ali se podrazumeva da se radi o srednjim elementima oslobođenim kratko-periodičnih poremećaja.

Da bi se, dakle, u potpunosti opisali sekularni poremećaji jedne male planete potrebno je u okviru ove teorije odrediti 5 promenljivih nultog reda, 15 promenljivih prvog reda za slobodne oscilacije i 144 promenljive prvog reda za prinudne oscilacije (136 ukoliko se elementi izraze u odnosu na invarijabilnu ravan, jer se tada ne uzimaju u obzir promenljive koje odgovaraju planetskoj frekvenciji f_5).

Koristeći osobine simetrije i periodičnosti svojih rešenja *Williams* zatim pokazuje da se integracija diferencijalnih jednačina može svesti na jedan osnovni interval argumenta perihela, napr. $[0, \Pi/2]$, i da se sve ostale vrednosti mogu lako dobiti iz ovih rezultata.

Konačna se rešenja diferencijalne jednačine (3.65) i njoj odgovarajućih za ostale elemente dobijaju u obliku:

$$h(\eta\Pi + \omega_o) = e_o(\omega_o) \sin [\tilde{\omega}_i + 2\eta\tilde{\omega}_o(\Pi/2) + \tilde{\omega}_o(\omega_o)] +$$

$$+\sum_{l=1}^{10} M_l(\omega_o)\sin\{\beta_{ol} + [2\eta T_o(\Pi/2) + T_o(\omega_o)]\cdot g_l\} +$$

$$+\sum_{l=1}^{8} M_l(\omega_o)\sin\{\gamma_{ol} + [2\eta T_o(\Pi/2) + T_o(\omega_o)]\cdot f_l + \omega_i + \eta\Pi+\omega_o\}$$

$$P(\eta\Pi + \omega_o)= \sin i_o(\omega_o)\ \sin[\Omega_i + 2\eta\Omega_o(\Pi/2) + \Omega_o(\omega_o)] +$$

$$+\sum_{l=1}^{10} L_l(\omega_o)\sin\{\beta_{ol} + [2\eta T_o(\Pi/2) + T_o(\omega_o)]\cdot g_l - \omega_i - \eta\Pi-\omega_o\}$$

$$+\sum_{l=1}^{8} L_l(\omega_o)\sin\{\gamma_{ol} + [2\eta T_o(\Pi/2) + T_o(\omega_o)]\cdot f_l\} \qquad (3.68)$$

dok se odgovarajuće jednačine za k i Q dobijaju prostom smenom sinusa argumenata kosinusima.

Očigledno su jednačine (3.68) analogne jednačinama (3.38), koje se dobijaju iz linearne teorije. Sopstveni elementi, koji predstavljaju konstante integracije, biće ovde a_o, $e_o(0)$, $\sin i_o(0)$, zajedno sa $\tilde{\omega}_i$ i Ω_i za neki početni trenutak T_i. Pošto su za datu malu planetu $h(\omega_o)$, $k(\omega_o)$, $P(\omega_o)$, $Q(\omega_o)$ poznate veličine, sopstveni elementi se dobijaju iz (3.68) numeričkom inverzijom tih jednačina. Inače, konačni sopstveni elementi razlikuju se od vrednosti a_o, $e_o(0)$, $\sin i_o(0)$, koje se koriste u toku numeričkog integraljenja diferencijalnih jednačina za doprinos slobodnih oscilacija prvog reda $\delta a/a_o$, $\delta e(0)$, i $\delta \sin i(0)$. Ako, naime, ove promenljive prvog reda unesemo na desne strane jednačina (3.68) i izvršimo numeričku inverziju za $\delta e(0)$ i $\delta \sin i(0)$, vrednosti koje se dobijaju predstavljaju tada razlike pravih sopstvenih elemenata i

početnih vrednosti promenljivih nultog reda.

Pomenimo na kraju, da je još *Kozai* (1962) pokazao da vrednosti $\omega_o = 0, \Pi$ odgovaraju maksimumima za i_o i minimumima za e_o, dok $\omega_o = \Pi/2, 3\Pi/2$ odgovaraju minimumima za i_o i maksimumima za e_o.

3.4 Teorija Yuasa-e

Novu, čisto analitičku teoriju sekularnih poremećaja malih planeta predložio je *M. Yuasa* (1973). Ova teorija ima niz značajnih prednosti u odnosu na klasičnu, linearnu teoriju, a uspeva da izbegne i neke slabosti *Williams*-ovog pristupa. Ukratko rečeno, osnovne karakteristike *Yuasa*-ine teorije su:

- kratko-periodični poremećaji elemenata kretanja se ne zanemaruju, niti se eliminišu putem numeričkog osrednjavanja, već se eksplicitno analitički određuju i oduzimaju od polaznih, oskulatornih elemenata;

- u funkciji poremećaja, koja se dobija nakon eliminisanja kratko-periodičnih članova, uzimaju se u obzir članovi do četvrtog stepena ekscentričnosti i nagiba u prvom redu po poremećajnoj masi, te članovi drugog stepena ekscentričnosti i nagiba u drugom redu u odnosu na masu, i to kako za malu, tako i za poremećajnu, veliku planetu;

- funkcija poremećaja je izražena u odnosu na fiksnu (invarijabilnu) ravan;

- kretanja velikih, poremećajnih planeta smatraju se poznatim;

- sistem diferencijalnih jednačina promena elemenata u kanoničkom obliku rešava se putem sukcesivnih kanoničkih

transformacija i rešenje se dobija u eksplicitnoj formi;

- sistem jedinica odabran je, radi jednostavnosti, tako da je zbir masa Sunca i Jupitera $m_\odot + m'_5 = 1$, velika poluosa Jupiterove putanje $a'_5 = 1$, srednje kretanje Jupitera $n'_5 = 1$ i Gauss-ova konstanta $G_\odot = 1$ (u tom sistemu jedinica vremena iznosi približno 1.88778 god.).

Kao i svaka analitička teorija zasnovana na razvoju funkcije poremećaja u red i Yuasa-ina teorija ima svoje mane i ograničenja. Najozbiljniji problemi koji se susreću u primeni ove teorije vezani su za pojavu malih imenilaca u nekim članovima razvoja, odnosno za znatno smanjenu tačnost rezultata kod malih planeta velike ekscentričnosti i/ili nagiba. Obzirom da su Yuasa-ine jednačine date u odnosu na invarijabilnu ravan, ako se ona želi koristiti na jednostavniji i komforniji način koji omogućava i neposredno poređenje sa rezultatima drugih autora, dakle, u helicentričnom, ekliptičkom sistemu fiksiranom za neku standardnu epohu, neophodno je odgovarajući Hamiltonijan upotpuniti indirektnim delom funkcije poremećaja. Povrh toga, teorija se ne može upotrebiti u praktične svrhe u svom izvornom obliku, pošto su se autoru u izvođenju nekih važnih jednačina potkrale izvesne greške, a u objavljenom radu, inače, ima i dosta štamparskih grešaka.

3.4.1 Metod kanoničkih transformacija

Kanonički oblik diferencijalnih jednačina promena elemenata kretanja lako se izvodi iz standardnog oblika (3.1). Uvođenjem novog seta elemenata (tzv. *Delaunay*-evih promenljivih):

$$L = \sqrt{\tilde{\mu} a} \quad ; \quad l = M$$

$$G = L\sqrt{1 - e^2} \quad ; \quad g = \omega$$

$$H = G \cos i \quad ; \quad h = \Omega \qquad (3.69)$$

i prostim dopunjavanjem funkcije poremećaja R, čime se ona transformiše u Hamiltonijan:

$$F = \frac{\tilde{\mu}}{2L^2} - K + R \qquad (3.70)$$

gde je K momenat konjugovan vremenu t $(= k)$, dobija se izuzetno jednostavan kanonički sistem diferencijalnih jednačina:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial F}{\partial l} \quad ; \quad \frac{dl}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial L} \quad ; \quad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial F}{\partial h} \quad ; \quad \frac{dh}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial H}$$

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial F}{\partial g} \quad ; \quad \frac{dg}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial G} \quad ; \quad \frac{dK}{dt} = \frac{\partial F}{\partial k} \quad ; \quad \frac{dk}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial K} \qquad (3.71)$$

Bitna osobina ovog sistema je da svoju prostu strukturu zadržava i u slučaju daljih transformacija, pod uslovom da su ove transformacije kanoničke. Značaj kanoničkog oblika diferencijalnih jednačina u tretiranju problema u dinamici ogleda se u tome, što taj oblik omogućuje uspostavljanje opštih pravila za prelaz sa jednog skupa promenljivih na drugi pri čemu se čuva kanonička priroda jednačina, a što, uz pogodno odabranu transformaciju, može ponekad da dovede do znatnog pojednostavljenja datog polaznog problema.

Poznate su, naravno, mnoge metode za rešavanje sistema (3.71), od kojih ćemo ovde pomenuti samo neke, često i široko primenjivane u problemima Nebeske mehanike. Tako je, napr., *Delaunay* predložio metod kod kojeg se nizom uzastopnih, tzv.

kontaktnih transformacija, članovi Hamiltonijana eliminišu jedan po jedan i primenio ga u svojoj poznatoj teoriji Mesečevog kretanja (Delaunay, 1860; 1867). *Von Zeipel* (1916) je bitno unapredio *Delaunay*-ev metod uvođenjem tzv. generatrise, funkcije koja omogućuje da se eliminacija svih članova Hamiltonijana određenog tipa izvrši istovremeno, pomoću samo jedne transformacije. *Von Zeipel*-ova generatrisa je, međutim, izražena u funkciji pola starih (netransformisanih, polaznih) promenljivih i pola novih (transformisanih) promenljivih, tako da je i cela transformacija implicitna. Opšte teorije poremećaja, zasnovane na kanoničkim transformacijama jednačina kretanja, ali uz upotrebu eksplicitne generatrise izražene u funkciji samo jednih promenljivih, razvili su *Hori* (1966), odnosno *Message* (1982). *Hori*-jevu teoriju opštih poremećaja za proizvoljne kanoničke promenljive iskoristio je zatim *Yuasa* da bi formulisao svoju teoriju sekularnih poremećaja kretanja malih planeta.

Matematički aparat, koji čini osnovu *Hori*-jeve, pa prema tome i *Yuasa*-ine teorije, najpotpunije i najjasnije je izložen u radu A. *Milani*-ja (1988), u kojem se tretiraju sekularni poremećaji velikih poluosa putanja velikih planeta. *Milani*, doduše, *Hori*-jev formalizam ne sledi u potpunosti, ali su osnovne ideje i primenjeni metod isti. Radi jednostavnosti, dakle, ovde ćemo se u izlaganju polaznih principa i matematičkih osnova *Yuasa*-ine teorije držati *Milani*-jevog pristupa.

Metod kanoničkih transformacija, koji se zasniva na redovima *Lie*-a (1888), čini osnov teorija poremećenog kretanja

ovog tipa. Da bi se definisala kanonička transformacija pomoću redova Lie-a, potrebna su samo tri jednostavna koraka:

- neka je dat kanonički koordinatni sistem $(q,p) = (q_1, \ldots, q_s, p_1, \ldots, p_s)$ i Hamiltonova funkcija $S(q,p)$. Izvod bilo koje druge proizvoljne funkcije $F(q,p)$ po implicitnom parametru τ može se izračunati pomoću Poisson-ove zagrade:

$$\frac{dF}{d\tau} = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial S}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial S}{\partial q_i} \right) = \{ F, S \} \qquad (3.72)$$

Drugi izvod se može odrediti kao dvostruka Poisson-ova zagrada:

$$\frac{d^2F}{d\tau^2} = \{ \{ F, S \}, S \} \qquad (3.73)$$

itd.;

- drugi korak sastoji se u tome da se rešenja Hamiltonove jednačine definisane po S proslede od početnih uslova $(q^\bullet, p^\bullet)$ za $\tau = 0$, do stanja (q,p) za $\tau = 1$; ovaj tok funkcije S određuje kanoničku mapu:

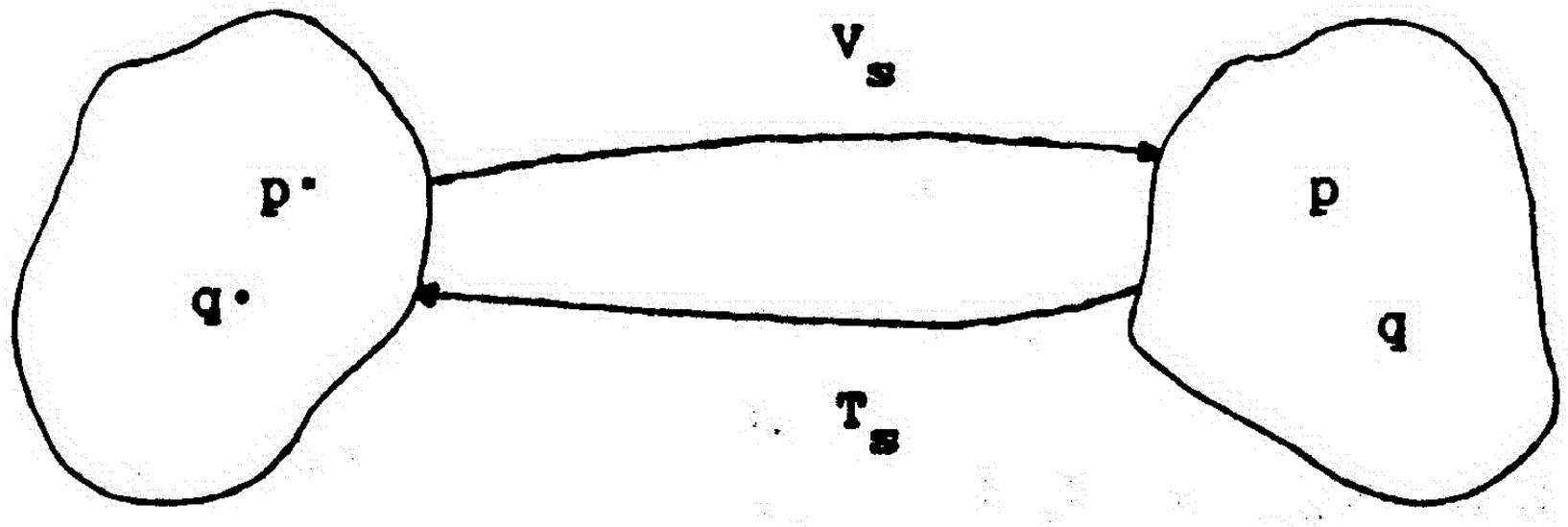
$$V_s : (q^\bullet, p^\bullet) \longrightarrow (q,p) \qquad (3.74)$$

Svaka funkcija definisana na (q,p) prostoru može se kompozicijom sa V_s transformisati u funkciju na $(q^\bullet, p^\bullet)$ prostoru:

$$F(q,p) = F[V_s(q^\bullet, p^\bullet)] = T_s F(q^\bullet, p^\bullet) \qquad (3.75)$$

sa operatorom T_s koji dejstvuje kontravarijantno na prostore funkcija, tj. u suprotnom smeru od V_s (vidi Sliku 2.). Tako se, napr., koordinata q_i transformiše u $T_s q_i = q_i[V_s(q^\bullet, p^\bullet)]$,

dajući izraz za q_i u funkciji $(q^\cdot, p^\cdot)$, a ne koordinatu $q_i^\cdot$. Pošto je mapa V_s kanonička, ako imamo neku dinamiku u (q,p) prostoru opisanu Hamiltonijanom F, ista dinamika će u prostoru $(q^\cdot, p^\cdot)$ biti definisana transformisanim Hamiltonijanom $T_s F$.



Slika 2. Dejstva operatora T_s i V_s na prostore funkcija.

- konačno, treći korak je primena uobičajenog *Taylor*-ovog razvoja, kojim se transformisani Hamiltonijan $T_s F$ predstavlja u obliku stepenog reda po fiktivnom vremenu τ, a za koje se zatim usvaja $\tau = 1$. Izvodi se zamenjuju *Poisson*-ovim zagradama (3.72), (3.73), itd., tako da se konačno dobija:

$$F(p,q) = T_s F(q^\cdot,p^\cdot) = F(q^\cdot,p^\cdot) + \left\{ F(q^\cdot,p^\cdot),\ S\ (q^\cdot,p^\cdot) \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2} \left\{ \left\{ F,S \right\},S \right\} + \ \ldots \ = F^\cdot(q^\cdot,p^\cdot) \qquad (3.76)$$

Ideja čitave ove procedure je da se S, koje možemo po volji odabrati, odredi tako da transformisani Hamiltonijan

$F^{\bullet}(q^{\bullet},p^{\bullet})$ bude jednostavniji od originalnog $F(q,p)$. Ako pri tom još obezbedimo da se odgovarajuća rešenja $q^{\bullet}(t)$, $p^{\bullet}(t)$ mogu izraziti u $(q^{\bullet},p^{\bullet})$ promenljivima, tada je rešenje originalnog problema u (q,p) prostoru eksplicitno dato istom transformacijom:

$$q_i = T_S q_i = q_i^{\bullet} + \left\{ q_i^{\bullet}, S \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \left\{ q_i^{\bullet}, S \right\}, S \right\} + \ldots =$$

$$= q_i^{\bullet} + \frac{\partial S}{\partial p_i^{\bullet}} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial S}{\partial p_i^{\bullet}}, S \right\} + \ldots$$

$$p_i = T_S p_i = p_i^{\bullet} - \left\{ p_i^{\bullet}, S \right\} - \frac{1}{2} \left\{ \left\{ p_i^{\bullet}, S \right\}, S \right\} + \ldots =$$

$$= p_i^{\bullet} - \frac{\partial S}{\partial q_i^{\bullet}} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial S}{\partial q_i^{\bullet}}, S \right\} + \ldots \qquad (3.77)$$

Primenićemo sada opisani metod na problem N - tela i pokazati kako se jednostavno i neposredno dolazi do rešenja jednačina promena elemenata kretanja. Hamiltonijan ovog problema je oblika $F = F_o + \epsilon F_1$, gde je ϵ mali parametar (obično je to masa poremećajnog tela izražena u jedinicama mase Sunca), a F_o je integrabilni deo Hamiltonijana, koji opisuje neporemećeno kretanje. Neka je $p = (\Lambda,\Theta)$, gde je Λ N-dimenzioni vektor koji sadrži promenljive zavisne od velike poluose, a Θ je $2N$-dimenzioni vektor sa promenljivima zavisnim od ekscentričnosti i nagiba (vidi 3.69) i neka je $q = (\lambda,\Theta)$, gde su λ i Θ odgovarajući vektori konjugovanih ugaonih promenljivih. Tada je:

$$F = F_o(\Lambda) + \epsilon F_1(\Lambda,\Theta,\lambda,\Theta) \qquad (3.78)$$

Generatrisu S ovog kanoničkog sistema predstavićemo u obliku razvoja po stepenima malog parametra ϵ:

$$S = \epsilon S_1 + \epsilon^2 S_2 + \ldots \qquad (3.79)$$

Transformisani Hamiltonijan biće, prema (3.76), dat sa:

$$F^* = T_S F = F + \left\{ F,S \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \left\{ F,S \right\},S \right\} + \ldots =$$

$$= F_0 + \epsilon F_1 + \left\{ F_0 + \epsilon F_1 \, , \, \epsilon S_1 + \epsilon^2 S_2 + \ldots \right\} + \ldots . \qquad (3.80)$$

odakle se sređivanjem po stepenima ϵ dobija:

$$F^* = F_0 + \epsilon \left(\left\{ F_0, S_1 \right\} + F_1 \right) + \epsilon^2 \left(\left\{ F_0, S_2 \right\} + \left\{ F_1, S_1 \right\} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \left\{ \left\{ F_0, S_1 \right\}, S_1 \right\} \right) + \ldots . \qquad (3.81)$$

Već smo pomenuli da je generatrisa proizvoljna funkcija koju biramo tako da transformisani Hamiltonijan što više uprostimo. S_1 ćemo, dakle, odabrati tako da izraz $\left\{ F_0, S_1 \right\} + F_1$, koji stoji uz ϵ bude što jednostavniji, S_2 tako da uprostimo izraz uz ϵ^2, itd.

Kako se F_1 , kao što je dobro poznato, može predstaviti u obliku Fourier-ovog reda:

$$F_1 = \sum_{j,k} F_{1_{jk}} (\Lambda, \Theta) \cos (j\lambda + k\theta) \qquad (3.82)$$

gde su j, k vektori celobrojnih koeficijenata, to ćemo na sličan način odrediti i S_1 :

$$S_1 = \sum_{j,k} S_{1_{jk}} (\Lambda^*, \Theta^*) \sin (j\lambda^* + k\theta^*) \qquad (3.83)$$

gde su $\Lambda^{\bullet}$, $\Theta^{\bullet}$, $\lambda^{\bullet}$, $\theta^{\bullet}$ početne (oskulatorne) promenljive. Rešenja neporemećenog problema (u našoj notaciji - reda nula), data su sa:

$$\lambda_i = n_i t + \text{const.} \qquad (3.84)$$

gde se srednja kretanja n_i dobijaju iz:

$$n_i = \frac{\partial F_o(\Lambda)}{\partial \Lambda_i} \qquad (3.85)$$

Ovo za deo (3.81) prvog reda po ε, a prema (3.72), daje:

$$\left\{ F_o, S_1 \right\} + F_1 = - n \frac{\partial S_1}{\partial \lambda} + F_1 \qquad (3.86)$$

Odaberemo li, dakle, koeficijente u (3.83) tako da bude zadovoljeno:

$$(n \cdot j) S_{1_{jk}} = F_{1_{jk}} \qquad (3.87)$$

biće, zbog (3.86), iz Hamiltonijana (3.81) eliminisani svi članovi prvog reda po ε sa argumentima za koje je $j \neq 0$ (tj. svi koji u argumentima imaju brzu promenljivu - srednju longitudu, napr.). Iz (3.87) sledi da članovi oblika $F_{1_{ok}} \cos(k\Theta)$ u (3.82) za sada ne mogu da se eliminišu, ma kako da odaberemo S_1. To su, naime, dugo-periodični članovi kod kojih se u argumentima pojavljuju samo spore promenljive - longitude čvora i perihela, napr. Zato se i odgovarajući koeficijenti $S_{1_{ok}}$ biraju tako da naprosto budu jednaki nuli. Time je i funkcija S_1 u potpunosti određena i (3.81) se, zaključno do prvog reda po ε, može napisati kao:

$$F^{\circ} = T_s F = F_o + \varepsilon \bar{F}_1 \qquad (3.88)$$

gde je $\bar{F}_1$ deo F_1 koji ne sadrži λ.

Na isti način može se i S_2 u izrazu koji u (3.81) stoji uz ε^2 odrediti tako da bude:

$$\left\{ F_1, S_1 \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \left\{ F_o, S_1 \right\}, S_1 \right\} = F_{1.1}$$

$$\left\{ F_o, S_2 \right\} + F_{1.1} = \bar{F}_{1.1} \qquad (3.89)$$

gde je opet $\bar{F}_{1.1}$ dugo-periodični deo $F_{1.1}$, pa (3.81) postaje:

$$F^{\circ} = T_s F = F_o + \varepsilon \bar{F}_1 + \varepsilon^2 \bar{F}_{1.1} + \ldots . \qquad (3.90)$$

Imajući u vidu (3.83) konačno dobijamo:

$$T_s F = F^{\circ}(\Lambda^{\circ}, \Theta^{\circ}, -, \theta^{\circ}) \qquad (3.91)$$

tj. F je svedeno na eksplicitnu funkciju početnih uslova u kojoj se brze promenljive λ° ne pojavljuju.

Iz (3.77) zatim sledi:

$$p_i = p_i^{\circ} - \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial q_i^{\circ}} - \varepsilon^2 \frac{\partial S_2}{\partial q_i^{\circ}} - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left\{ \frac{\partial S_1}{\partial q_i^{\circ}}, S_1 \right\} - \ldots .$$

$$q_i = q_i^{\circ} + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial p_i^{\circ}} + \varepsilon^2 \frac{\partial S_2}{\partial p_i^{\circ}} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left\{ \frac{\partial S_1}{\partial p_i^{\circ}}, S_1 \right\} - \ldots . \qquad (3.92)$$

Ovo su konačne jednačine za izračunavanje <u>srednjih elemenata</u> kretanja, tj. elemenata oslobođenih kratko-periodičnih poremećaja.

Dugo-periodični poremećaji se iz napred izvedenih izraza eliminišu na principijelno potpuno isti način, pomoću nove kanoničke transformacije, da bi se dobile odgovarajuće promenljive, koje se onda mogu predstaviti u obliku zbira slobodnih i prinudnih oscilacija i gde se u funkciji konstanata integracije pojavljuju sopstveni elementi.

Ukoliko nađemo načina da se izborimo sa tehničkim problemima zbog brzog rasta broja članova sa porastom reda i stepena razvoja, moguće je bez ikakvih načelnih problema u polazni Hamiltonijan uključiti članove do proizvoljnog reda po malom parametru ε i stepena po ekscentričnosti i nagibu, što nesumnjivo svedoči o kapitalnom značaju ove metode i njenoj primenjivosti u Nebeskoj mehanici. Na žalost, poznato je da su redovi koji se koriste u teorijama poremećaja uvek divergentni, jer ne mogu da istovremeno ispune tri osnovna uslova - da budu uvek konvergentni, da daju rešenja koja zadovoljavaju početne uslove i da se rešenja dobijaju pomoću rekurzivnih procedura, odnosno sukcesivnih aproksimacija. Premda za sada ne postoji siguran način da se u datom slučaju pokaže kada redovi počinju da divergiraju, ima izvesnih indicija da se to u nekim slučajevima dešava dosta rano, tako da tada nastavljanje razvoja do nekog veoma visokog reda i stepena očigledno nema smisla. Ako se ovome dodaju i već pomenuti problemi sa rezonancama u srednjem kretanju i sekularnim rezonancama, postaje jasno kako su duboki koreni problema sa kojima se suočavamo u pokušaju da konstruišemo analitičke teorije poremećenog kretanja, koje bi bile dovoljno tačne i pouzdane u astronomskim intervalima vremena.

3.4.2 Definisanje polaznog Hamiltonijana

Vratićemo se sada Yuasa-inoj teoriji i izložićemo u svim pojedinostima kompletnu šemu njenog izvođenja. Kako su jednačine koje se javljaju u nekim fazama izvođenja zaista izuzetno glomazne, to ćemo ovde reprodukovati u celini samo one koje su neophodne za razumevanje primenjenih procedura, ili su u originalnoj formi bitno manjkave, bilo zbog grešaka učinjenih pri njihovom izvođenju ili zbog prelaza na novi koordinatni sistem. Sve ostale ćemo samo naznačiti, uglavnom pomoću nekoliko prvih članova, eventualno navođenjem odgovarajućeg broja jednačine u Yuasa-inom radu, ili na neki drugi način, vodeći računa da to ne ide na uštrb jasnoće i celovitosti izlaganja.

Potsetimo se još jednom da je naš cilj izučavanje poremećenog kretanja male planete pod pretpostavkom da su kretanja velikih, poremećajnih planeta poznata. Hamiltonijan našeg sistema biće, u notaciji *Hori*-ja:

$$F = F_0 + F_1 \tag{3.93}$$

gde je:

$$F_0 = \frac{\tilde{\mu}^2}{2L} - K \tag{3.94}$$

i:

$$F_1 = \sum_j m'_j \, F_{1_j}(L,G,H,l,g,h,L',G',H',l',g',h',t) \tag{3.95}$$

Indeks j odnosi se ovde na j-tu poremećajnu planetu mase m'_j.

Upoređujući (3.94) i (3.95) sa (3.70) napr., nalazimo da F_1 ne predstavlja zapravo ništa drugo do standardnu funkciju poremećaja oblika (3.2), odnosno (3.4).

Funkciju poremećaja razvio je u obliku trigonometrijskog reda kosinusnih članova (3.4) još *LeVerrier* (1855). No, njegov razvoj uzima za osnovnu ravan koordinatnog sistema ravan putanje poremećajne planete, što uzrokuje izvesne komplikacije kada se želi uzeti u obzir uticaj više poremećajnih tela. Zato je *Yuasa* odmah *LeVerrier*-ov razvoj funkcije poremećaja izrazio u odnosu na invarijabilnu ravan (tačnije rečeno, u odnosu na bilo koju fiksnu ravan), a kako se u svojoj teoriji ograničio na članove do zaključno četvrtog stepena u ekscentričnosti i nagibu, on i odgovarajuće transformacione relacije razvija do istog četvrtog stepena (jednačine 6. - 15. u njegovom radu). Nakon izvršenih svođenja *Yuasa* je funkciju poremećaja dobio u obliku:

$$F_1=\sum_j m'_j \sum_i \Bigg[\Bigg\{ (1)^{(i)} \Big(1 - i^2 \sin^2 \frac{1}{2} \sin^2 \frac{1'}{2} \Big) + (2)^{(i)} \Big(\frac{e}{2} \Big)^2$$

$$+(3)^{(i)} \Big(\frac{e'}{2} \Big)^2 + (4)^{(i)} \Big(\frac{e}{2} \Big)^4 + (5)^{(i)} \Big(\frac{e}{2} \Big)^2 \Big(\frac{e'}{2} \Big)^2 +$$

$$+(6)^{(i)} \Big(\frac{e'}{2} \Big)^4 + (11)^{(i)} \Big(\frac{1}{4} \sin^2 i + \frac{1}{4} \sin^2 i' + \frac{1}{16} \sin^4 i +$$

$$+\frac{1}{16} \sin^4 i' - \frac{1}{8} \sin^2 i \sin^2 i' \Big) + (12)^{(i)} \Big(\frac{e}{2} \Big)^2 \Big(\frac{1}{4} \sin^2 i +$$

$$+ \frac{1}{4}\sin^2 i'\Big] + (13)^{(i)}\left(\frac{e'}{2}\right)^2\left[\frac{1}{4}\sin^2 i + \frac{1}{4}\sin^2 i'\right] + (17)^{(i)}\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{1}{16}\sin^4 i + \frac{1}{16}\sin^4 i' + \frac{1}{4}\sin^2 i \sin^2 i'\right)\Big\}\cos\,[i\lambda' - i\lambda]$$

$$+\Big\{ i \sin\frac{i}{2}\sin\frac{i'}{2}\Big[(1)^{(i)}\left(1 + \frac{1}{2}\sin^2\frac{i}{2} + \frac{1}{2}\sin^2\frac{i'}{2}\right) +$$

$$+ (2)^{(i)}\left(\frac{e}{2}\right)^2 + (3)^{(i)}\left(\frac{e'}{2}\right)^2 + (11)^{(i)}\left(\frac{1}{4}\sin^2 i + \frac{1}{4}\sin^2 i'\right)\Big]$$

$$- \frac{1}{4}\sin i \sin i'\Big[(11)^{(i)} + (12)^{(i)}\left(\frac{e}{2}\right)^2 + (13)^{(i)}\left(\frac{e'}{2}\right)^2 +$$

$$+ (17)^{(i)}\left(\frac{1}{2}\sin^2 i + \frac{1}{2}\sin^2 i'\right)\Big]\Big\}\cos\,[i\lambda' - i\lambda + h - h']$$

$$+\Big\{ (-i) \sin\frac{i}{2}\sin\frac{i'}{2}\Big[(1)^{(i)}\left(1 + \frac{1}{2}\sin^2\frac{i}{2} + \frac{1}{2}\sin^2\frac{i'}{2}\right) +$$

$$+ (2)^{(i)}\left(\frac{e}{2}\right)^2 + (3)^{(i)}\left(\frac{e'}{2}\right)^2 + (11)^{(i)}\left(\frac{1}{4}\sin^2 i + \frac{1}{4}\sin^2 i'\right)\Big]$$

$$- \frac{1}{4}\sin i \sin i'\Big[(11)^{(i)} + (12)^{(i)}\left(\frac{e}{2}\right)^2 + (13)^{(i)}\left(\frac{e'}{2}\right)^2 +$$

$$+ (17)^{(i)}\left(\frac{1}{2}\sin^2 i + \frac{1}{2}\sin^2 i'\right)\Big]\Big\}\cos\,[i\lambda' - i\lambda - h + h']$$

$$+ \ldots\ldots \Big] \qquad (3.96)$$

Ovde se veličine *e'*, *sin i'*, ... odnose na poremećajnu planetu (indeks *j* izostavljen je radi jednostavnosti), *i* označava celobrojni indeks po kojem se vrši sumiranje, $\lambda = l + g + h$ je longituda perihela, a veličine $(1)^{(i)}$, $(2)^{(i)}$, ... , predstavljaju linearne kombinacije *Laplace*-ovih koeficijenata i funkcije su samo odnosa velikih poluosa $\alpha = a/a'$. Pomenimo, takođe, da se ovde, a i kasnije, u jednačinama ne pojavljuje Gauss-ova konstanta G_o, jer je, kao što smo već konstatovali, Yuasa izabrao normalizovani sistem jedinica usvajajući, između ostalog, $G_o = 1$. Ukupno Hamiltonijan (3.96) sadrži 83 člana.

Ponovimo opet da, po našem ubeđenju, Yuasa-in izbor invarijabilne ravni kao osnovne ravni koordinatnog sistema nije sa praktičnog stanovišta najbolji. Iako u baricentričnom koordinatnom sistemu jednačine kretanja i funkcija poremećaja imaju nešto jednostavniji oblik, a čime se u izvesnoj meri olakšava izučavanje sekularnih promena elemenata kretanja malih planeta u dugim vremenskim intervalima, činjenica je da su uglavnom svi dosadašnji rezultati dinamičkih istraživanja malih planeta dati u uobičajenom heliocentričnom, ekliptičkom sistemu fiksiranom za neku standardnu epohu. Naravno, prelaz s jednog sistema na drugi relativno je jednostavan i može se vršiti bez većih poteškoća, ali bi ga trebalo vršiti svaki put i u oba smera kada su male planete u pitanju i kada se žele proveriti ili uporediti neki međurezultati, rezultati ili zaključci.

Da bi se izbegla ova komplikacija, dovoljno je prilagoditi originalnu teoriju dodavanjem indirektnog dela funkcije poremećaja polaznom Hamiltonijanu; iako se tako zaista dobijaju nešto složeniji i glomazniji izrazi, jednom izvedeni i

programirani, oni omogućuju daleko komforniji rad, posebno u slučajevima korišćenja raznih modela Sunčevog sistema, neposrednog upoređivanja sopstvenih elemenata kretanja malih planeta izvedenih pomoću raznih metoda, i sl. Zato smo se u ovoj tezi i odlučili da sve naše računice sprovedemo u heliocentričnom, ekliptičkom koordinatnom sistemu, pa otud sada ovde navodimo punu formu indirektnog dela funkcije poremećaja, izvedenu od strane *LeVerrier*-a (1855) i svedenu na fiksnu ravan pomoću ranije pomenutih Yuasa-inih transformacionih relacija:

$$F_{1_{ind}} = \sum_j m'_j \frac{\alpha}{a'} \cdot$$

$$\cdot \left[\left\{ -1 + \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{2} e'^2 + \frac{1}{4} \sin^2 i + \frac{1}{4} \sin^2 i' \right\} \cos [\lambda' - \lambda] \right.$$

$$- \left\{ \frac{1}{4} \sin i \sin i' + \sin \frac{i}{2} \sin \frac{i'}{2} \right\} \cos [\lambda' - \lambda + h - h'] \right.$$

$$- \left\{ \frac{1}{4} \sin i \sin i' - \sin \frac{i}{2} \sin \frac{i'}{2} \right\} \cos [\lambda' - \lambda - h + h'] \right.$$

$$- ee' \cos [2\lambda' - 2\lambda - \tilde{\omega}' + \tilde{\omega}] \right.$$

$$+ \left\{ \frac{3}{2} e - \frac{3}{4} ee'^2 - \frac{3}{8} e [\sin^2 i + \sin^2 i'] \right\} \cos [\lambda' - \tilde{\omega}] \right.$$

$$+ \frac{3}{2} e \left\{ \frac{1}{4} \sin i \sin i' + \sin \frac{i}{2} \sin \frac{i'}{2} \right\} \cos [\lambda' - \tilde{\omega} + h - h'] \right.$$

$$+ \frac{3}{2} e \left\{ \frac{1}{4} \sin i \sin i' - \sin \frac{i}{2} \sin \frac{i'}{2} \right\} \cos [\lambda' - \tilde{\omega} - h + h'] \right.$$

$$+ \left\{ -\frac{1}{2} e + \frac{1}{4} ee'^2 + \frac{3}{8} e^3 + \frac{1}{8} e (\sin^2 i + \sin^2 i') \right\} \cdot$$

$$\cdot \cos [\lambda' - 2\lambda + \tilde{\omega}] \right.$$

$$- \frac{1}{2} e \left\{ \frac{1}{4} \sin i \sin i' + \sin \frac{1}{2} \sin \frac{i'}{2} \right\} \cdot$$

$$\cdot \cos [\lambda' - 2\lambda + \tilde{\omega} + h - h']$$

$$- \frac{1}{2} e \left\{ \frac{1}{4} \sin i \sin i' + \sin \frac{1}{2} \sin \frac{i'}{2} \right\} \cdot$$

$$\cdot \cos [\lambda' - 2\lambda + \tilde{\omega} - h + h']$$

$$+ \left\{ - 2e' + e^2 e' + \frac{3}{2} e'^3 + \frac{1}{2} e' (\sin^2 i + \sin^2 i') \right\} \cdot$$

$$\cdot \cos [2\lambda' - \lambda - \tilde{\omega}']$$

$$- 2e' \left\{ \frac{1}{4} \sin i \sin i' + \sin \frac{1}{2} \sin \frac{i'}{2} \right\} \cdot$$

$$\cdot \cos [2\lambda' - \lambda - \tilde{\omega}' + h - h']$$

$$- 2e' \left\{ \frac{1}{4} \sin i \sin i' + \sin \frac{i}{2} \sin \frac{i'}{2} \right\} \cdot$$

$$\cdot \cos [2\lambda' - \lambda - \tilde{\omega}' - h + h']$$

$$- \frac{3}{4} e^2 e' \cos [2\lambda' - 3\lambda - \tilde{\omega}' + 2\tilde{\omega}]$$

$$+ \frac{3}{16} e e'^2 \cos [\lambda' - 2\tilde{\omega}' + \tilde{\omega}]$$

$$- \frac{27}{16} e e'^2 \cos [3\lambda' - 2\lambda - 2\tilde{\omega}' + \tilde{\omega}]$$

$$+ \frac{3}{8} e \sin^2 i \cos [\lambda' + \tilde{\omega} - 2h]$$

$$+ \frac{3}{8} e \sin^2 i' \cos [\lambda' + \tilde{\omega} - 2h']$$

$$- \frac{3}{4} e \sin i \sin i' \cos [\lambda' + \tilde{\omega} - h - h']$$

$$- \frac{1}{8} e^2 \cos [\lambda' + \lambda - 2\tilde{\omega}]$$

$$- \frac{3}{8} e^2 \cos [\lambda' - 3\lambda + 2\tilde{\omega}]$$

$$+ 3ee' \cos [2\lambda' - \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}]$$

$$- \frac{1}{8} e'^2 \cos [\lambda' + \lambda - 2\tilde{\omega}']$$

$$- \frac{27}{8} e'^2 \cos [3\lambda' - \lambda - 2\tilde{\omega}']$$

$$- \frac{1}{4} \sin^2 i \cos [\lambda' + \lambda - 2h]$$

$$- \frac{1}{4} \sin^2 i' \cos [\lambda' + \lambda - 2h']$$

$$+ \frac{1}{2} \sin i \sin i' \cos [\lambda' + \lambda - h - h']$$

$$- \frac{1}{24} e^3 \cos [\lambda' + 2\lambda - 3\tilde{\omega}]$$

$$- \frac{1}{3} e^3 \cos [\lambda' - 4\lambda + 3\tilde{\omega}]$$

$$- \frac{1}{4} e^2 e' \cos [2\lambda' + \lambda - \tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega}]$$

$$- \frac{1}{16} ee'^2 \cos [\lambda' + 2\lambda - 2\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}]$$

$$+ \frac{81}{16} ee'^2 \cos [3\lambda' - 2\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}]$$

$$- \frac{1}{6} e'^3 \cos [2\lambda' + \lambda - 3\tilde{\omega}']$$

$$- \frac{16}{3} e'^3 \cos [4\lambda' - \lambda - 3\tilde{\omega}']$$

$$- \frac{1}{8} e \sin^2 i \cos [\lambda' + 2\lambda - \tilde{\omega} - 2h]$$

$$- \frac{1}{8} e \sin^2 i' \cos [\lambda' + 2\lambda - \tilde{\omega} - 2h']$$

$$+ \frac{1}{4} e \sin i \sin i' \cos [\lambda' + 2\lambda - \tilde{\omega} - h - h']$$

$$- \frac{1}{2} e' \sin^2 i \cos [2\lambda' + \lambda - \tilde{\omega}' - 2h]$$

$$- \frac{1}{2} e' \sin^2 i' \cos [2\lambda' + \lambda - \tilde{\omega}' - 2h']$$

$$+ e' \sin i \sin i' \cos [2\lambda' + \lambda - \tilde{\omega}' - h - h'] \Big] \qquad (3.97)$$

Primetimo da je ovaj razvoj dat do zaključno trećeg stepena u ekscentričnosti i nagibu, pošto je kod kratko-periodičnih poremećaja doprinos članova višeg stepena zaista minimalan, dok bi kod dugo-periodičnih poremećaja svi ovi članovi ionako otpali, jer je Yuasa-ina teorija u drugom redu po masi ograničena na članove do drugog stepena u ekscentričnosti i nagibu. Hamiltonijan (3.95) u kompletnoj formi dat je, dakle, kao zbir (3.96) i (3.97).

3.4.3 Eliminisanje kratko-periodičnih članova

Šema eliminacije kratko-periodičnih članova u skladu sa *Hori*-jevim formalizmom lako se može skicirati. Označimo li generatrisu transformacije opet sa S, a transformisani Hamiltonijan sa F^*, prema (3.79) i (3.90) imamo:

$$S = S_1 + S_2 + \ldots.$$

$$F^* = F^*(L^*, G^*, H^*, K^*, -, g^*, h^*, k^*, L', G', H', -, g', h') =$$

$$= F_o^* + F_1^* + F_2^* + \ldots. \qquad (3.98)$$

gde svako S_k, odnosno F_k^* ima $m_j'^k$ kao faktor. Izjednačavanjem izraza uz odgovarajuće stepene m_j', a prema (3.81), nalazimo:

$$F_o^* = F_o$$

$$F_1^* = \{ F_o, S_1 \} + F_1$$

$$F_2^* = \{ F_o, S_2 \} + \frac{1}{2}\{ F_1 + F_1^* , S_1 \} \qquad (3.99)$$

gde je treća jednačina (3.99) samo na drugi način napisano (3.89). Iz (3.87) - (3.90) dalje sledi:

$$F_0^* = F_0$$

$$F_1^* = F_{1_s}$$

$$S_1 = \int \left[F_1 - F_{1_s} \right] d\tau$$

$$F_2^* = \frac{1}{2} \left\{ F_1 + F_1^* , S_1 \right\}_s \qquad (3.100)$$

gde indeks s označava sekularne članove koji ne zavise od l i l'. Jednačinama (3.100) je transformisani Hamiltonijan iz kojeg su uklonjeni kratko-periodični članovi formalno u celosti definisan. Na osnovu (3.92), a zanemarujući zaista minorne kratko-periodične članove drugog reda, kratko-periodične poremećaje *Delaunay*-evih promenljivih eliminišemo pomoću:

$$L^* = L - \frac{\partial S_1}{\partial l}$$

$$G^* = G - \frac{\partial S_1}{\partial g} \quad ; \quad g^* = g + \frac{\partial S_1}{\partial G}$$

$$H^* = H - \frac{\partial S_1}{\partial h} \quad ; \quad h^* = h + \frac{\partial S_1}{\partial H} \qquad (3.101)$$

Inverzijom jednačina (3.69) lako se dobijaju $a^* = \text{const.}$, e^*, i^*, $\tilde{\omega}^*$, Ω^* - srednji elementi kretanja.

Prve tri jednačine (3.100) mogu se odmah lako napisati u razvijenom obliku, pa tako imamo:

$$F_o^* = \frac{\tilde{\mu}^2}{2L} - K \tag{3.102}$$

$$F_1^* = \sum_j m'_j \left[(1)^{(o)} + \frac{1}{4}(2)^{(o)}e^2 + \frac{1}{4}(3)^{(o)}e'^2 + \ldots \right.$$

$$+ \frac{1}{16}(21)^{(-1)}ee' \sin i \sin i' \cos[\tilde{\omega}' - \tilde{\omega} + h - h'] + \ldots$$

$$\left. + \frac{1}{16}(31)^{(-2)}e^2e'^2 \cos[2\tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega}] + \ldots \right] \tag{3.103}$$

$$S_1 = \sum_j m'_j \left[\sum_i \left\{ \frac{1}{i(n' - n)} \left[(1)^{(i)} \left(1 - i^2 \sin^2 \frac{i}{2} \sin^2 \frac{i'}{2} \right) + \right. \right. \right.$$

$$+ (2)^{(i)}\left(\frac{e}{2}\right)^2 + (3)^{(i)}\left(\frac{e'}{2}\right)^2 + (4)^{(i)}\left(\frac{e}{2}\right)^4 +$$

$$+ (5)^{(i)}\left(\frac{e}{2}\right)^2\left(\frac{e'}{2}\right)^2 + (6)^{(i)}\left(\frac{e'}{2}\right)^4 + (11)^{(i)}\left(\frac{1}{4}\sin^2 i + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}\sin^2 i' + \frac{1}{16}\sin^4 i + \frac{1}{16}\sin^4 i' - \frac{1}{8}\sin^2 i \sin^2 i' \right) +$$

$$+ (12)^{(i)}\left(\frac{e}{2}\right)^2\left(\frac{1}{4}\sin^2 i + \frac{1}{4}\sin^2 i' \right) + (13)^{(i)}\left(\frac{1}{4}\sin^2 i + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}\sin^2 i' \right) + (17)^{(i)}\left(\frac{1}{16}\sin^4 i + \frac{1}{16}\sin^4 i' + \right.$$

$$\left. \left. \left. + \frac{1}{4}\sin^2 i \sin^2 i' \right) \right] \sin[i\lambda' - i\lambda]_{i \neq 0} + \ldots \right\} +$$

$$+ \frac{\alpha}{a'}\left[\frac{1}{n'-n}\left(-1+\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}e'^2+\frac{1}{4}\sin^2 i+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{4}\sin^2 i'\right)\sin[\lambda'-\lambda]+\ldots.\right]\Bigg) \qquad (3.104)$$

Sumiranje po j obuhvata ovde uticaje Jupitera i Saturna, dok se poremećaji od ostalih planeta uključuju implicitno, preko njihovog uticaja na elemente kretanja Jupitera i Saturna. Sumiranje po i uključuje sve celobrojne vrednosti i nulu, ako nije drugačije naznačeno, ali se u praksi, zbog brzog opadanja numeričkih vrednosti koeficijenata sa porastom $|i|$ sumiranje obično vrši za $|i| \leq 10$. U našim računima uzimali smo $|i| \leq 15$.

Izvođenje eksplicitnog izraza za Hamiltonijan drugog reda F_2^*, međutim, povezano je sa znatnim tehničkim poteškoćama. Poslednja od jednačina (3.100) može se na osnovu definicije Poisson-ove zagrade (3.72) napisati kao:

$$F_2^* = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial F_1}{\partial l}\frac{\partial S_1}{\partial L}-\frac{\partial F_1}{\partial L}\frac{\partial S_1}{\partial l}+\frac{\partial F_1}{\partial g}\frac{\partial S_1}{\partial G}-\frac{\partial F_1}{\partial G}\frac{\partial S_1}{\partial g}+\right.$$

$$+\frac{\partial F_1}{\partial h}\frac{\partial S_1}{\partial H}-\frac{\partial F_1}{\partial H}\frac{\partial S_1}{\partial h}+\frac{\partial F_1}{\partial k}\frac{\partial S_1}{\partial K}-\frac{\partial F_1}{\partial K}\frac{\partial S_1}{\partial k}+$$

$$+\frac{\partial F_1^*}{\partial l}\frac{\partial S_1}{\partial L}-\frac{\partial F_1^*}{\partial L}\frac{\partial S_1}{\partial l}+\frac{\partial F_1^*}{\partial g}\frac{\partial S_1}{\partial G}-\frac{\partial F_1^*}{\partial G}\frac{\partial S_1}{\partial g}+$$

$$\left.+\frac{\partial F_1^*}{\partial h}\frac{\partial S_1}{\partial H}-\frac{\partial F_1^*}{\partial H}\frac{\partial S_1}{\partial h}+\frac{\partial F_1^*}{\partial k}\frac{\partial S_1}{\partial K}-\frac{\partial F_1^*}{\partial K}\frac{\partial S_1}{\partial k}\right]_s \qquad (3.105)$$

Pošto F_1^* ne zavisi od l, a F_1, F_1^* i S_1 ne zavise od K, odmah

imamo:

$$\frac{\partial F_1^*}{\partial l}\frac{\partial S_1}{\partial L} = \frac{\partial F_1}{\partial k}\frac{\partial S_1}{\partial K} = \frac{\partial F_1}{\partial K}\frac{\partial S_1}{\partial k} = \frac{\partial F_1^*}{\partial k}\frac{\partial S_1}{\partial K} = \frac{\partial F_1^*}{\partial K}\frac{\partial S_1}{\partial k} = 0 \qquad (3.106)$$

Sekularne članove u (3.105) izdvajamo osrednjavanjem po λ' i λ, koristeći činjenicu da je:

$$\frac{1}{4\Pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\,[f(\lambda',\lambda)]\,\cos\,[g(\lambda',\lambda)]\,d\lambda' d\lambda =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{za} \quad f(\lambda',\lambda) = g(\lambda',\lambda) \\ 0 & \text{za} \quad f(\lambda',\lambda) \neq g(\lambda',\lambda) \end{cases} \qquad (3.107)$$

Iz (3.103) i (3.104) zato sledi da $\frac{\partial F_1^*}{\partial L}\frac{\partial S_1}{\partial l}$, $\frac{\partial F_1^*}{\partial g}\frac{\partial S_1}{\partial G}$, $\frac{\partial F_1^*}{\partial G}\frac{\partial S_1}{\partial g}$, $\frac{\partial F_1^*}{\partial h}\frac{\partial S_1}{\partial H}$, $\frac{\partial F_1^*}{\partial H}\frac{\partial S_1}{\partial h}$ sadrže samo kratko-periodične članove, pa se (3.105) svodi na:

$$F_2^* = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial F_1}{\partial l}\frac{\partial S_1}{\partial L} - \frac{\partial F_1}{\partial L}\frac{\partial S_1}{\partial l} + \frac{\partial F_1}{\partial g}\frac{\partial S_1}{\partial G} - \frac{\partial F_1}{\partial G}\frac{\partial S_1}{\partial g} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial F_1}{\partial h}\frac{\partial S_1}{\partial H} - \frac{\partial F_1}{\partial H}\frac{\partial S_1}{\partial h}\right]_= \qquad (3.108)$$

Polazeći od (3.96) i (3.97), odnosno (3.104), sada bismo mogli naći 12 naznačenih parcijalnih izvoda, pomnožiti tako dobijene redove, izvršiti sabiranje i na kraju izdvojiti sekularne članove do drugog stepena po ekscentričnosti i nagibu. Kako, međutim, sve ovo predstavlja zaista velik i delikatan posao, Yuasa je ovde odstupio od *Hori*-jeve procedure i za praktičan

rad u ovom slučaju usvojio nešto jednostavniji oblik:

$$F_2^* = \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_\circ}{\partial L^2} \left(\frac{\partial S_1}{\partial l} \right)^2 + \frac{\partial F_1}{\partial L} \frac{\partial S_1}{\partial l} + \frac{\partial F_1}{\partial G} \frac{\partial S_1}{\partial g} + \frac{\partial F_1}{\partial H} \frac{\partial S_1}{\partial h} \right]_B \qquad (3.109)$$

kod kojeg je potrebno odrediti i zatim izmnožiti samo 6 parcijalnih izvoda (drugi izvod $F_\circ$ po L je u tom kontekstu trivijalno odrediti). Ovaj oblik se, inače, dobija primenom *Von Zeipel*-ove (1916) metode, a ekvivalentnost *Hori*-jeve i *Von Zeipel*-ove metode do zaključno drugog reda po poremećajnoj masi dokazali su *Hori* (1970) i *Yuasa* (1971).

Obzirom na to da su F_1 i S_1 izraženi u funkciji putanjskih elemenata a, e, i, $\lambda = l+g+h$, $\tilde{\omega} = g+h$, h $(=\Omega)$, sledeće veze omogućuju nalaženje izvoda po *Delaunay*-evim momentima:

$$\frac{\partial}{\partial L} = 2\left(\frac{a}{\tilde{\mu}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial a} + \frac{1 - e^2}{(\tilde{\mu}a)^{1/2} e} \frac{\partial}{\partial e}$$

$$\frac{\partial}{\partial G} = - \frac{(1 - e^2)^{1/2}}{(\tilde{\mu}a)^{1/2} e} \frac{\partial}{\partial e} + \frac{1}{\operatorname{tg} i \, [\tilde{\mu}a(1 - e^2)]^{1/2}} \frac{\partial}{\partial i}$$

$$\frac{\partial}{\partial H} = - \frac{1}{\sin i \, [\tilde{\mu}a(1 - e^2)]^{1/2}} \frac{\partial}{\partial l} \qquad (3.110)$$

Konačno se tako dobija:

$$F_2^* = \sum_j m'^2_j \left\{ \left[\sum_i \left(- \frac{1}{n' - n} \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{a}{\tilde{\mu}} \right)^{\frac{1}{2}} \left[(1)^{(i)} (2)^{(\pm i)}_a + (2)^{(i)} (1)^{(\pm i)}_a \right] - \frac{1}{8} \frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}} (1)^{(i)} (2)^{(\pm i)} \right\}_{i \neq 0} + \right.$$

$$+\frac{1}{4n'-(4-1)n}\left\{-\frac{4-1}{4}\left(\frac{a}{\tilde{\mu}}\right)^{\frac{1}{2}}(50)^{(i)}(50)^{(i)}_{a}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{8}\frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}}(50)^{(i)}(51)^{(i)}+\frac{4-2}{16}\frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}}(50)^{(i)}(50)^{(i)}\right\}+$$

$$+\frac{1}{4n'-(4-2)n}\frac{1}{8}\frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}}(172)^{(i)}(172)^{(i)}\Bigg]+$$

$$+\left[-\frac{1}{n'-n}\left\{\left(\frac{a}{\tilde{\mu}}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{a'^{2}}\left[\frac{1}{2}(1)^{(\pm 1)}-\frac{1}{4}(2)^{(\pm 1)}\right]-\right.\right.$$

$$-\frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}}\frac{\alpha}{a'}\left[\frac{1}{4}(1)^{(\pm 1)}-\frac{1}{8}(2)^{(\pm 1)}\right]+\left(\frac{a}{\tilde{\mu}}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\alpha}{a'}\left[\frac{1}{2}(1)^{(\pm 1)}_{\alpha}-\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{1}{4}(2)^{(\pm 1)}_{\alpha}\right]-\left(\frac{a}{\tilde{\mu}}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\alpha}{a'^{2}}+\frac{1}{4}\frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}}\left(\frac{\alpha}{a'}\right)^{2}\right\}+\right.$$

$$+\frac{1}{n'-2n}\left\{\left(\frac{a}{\tilde{\mu}}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{a'^{2}}\frac{1}{2}(50)^{(-1)}+\frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}}\frac{\alpha}{a'}\left[-\frac{3}{4}(50)^{(-1)}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1}{8}(51)^{(-1)}\right]+\left(\frac{a}{\tilde{\mu}}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\alpha}{a'}\frac{1}{2}(50)^{(-1)}_{\alpha}-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\tilde{\mu}}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\alpha}{a'^{3}}+$$

$$\left.+\frac{9}{16}\frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}}\left(\frac{\alpha}{a'}\right)^{2}\right\}+$$

$$+\frac{1}{n'}\left\{\frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}}\frac{\alpha}{a'}\frac{3}{8}\left[(51)^{(1)}-(50)^{(1)}\right]-\frac{9}{16}\frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}}\left(\frac{\alpha}{a'}\right)^{2}\right\}$$

$$-\frac{1}{n'+n}\left\{\frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}}\frac{\alpha}{a'}\frac{1}{8}(172)^{(1)}-\frac{1}{32}\frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}}\left(\frac{\alpha}{a'}\right)^{2}\right\}-$$

$$+\frac{1}{n'-3n}\left\{\frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}}\frac{\alpha}{a'}\frac{3}{8}(172)^{(-4)}-\frac{9}{32}\frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}}\left(\frac{\alpha}{a'}\right)^2\right\}\Bigg]\cdot e^2$$

$$+\Bigg[\sum_i\Bigg(-\frac{1}{n'-n}\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{a}{\tilde{\mu}}\right)^{\frac{1}{2}}\Big[(1)^{(i)}(3)_\alpha^{(\pm i)}+$$

$$+(3)^{(i)}(1)_\alpha^{(\pm i)}\Big]\right\}_{i\neq 0}-$$

$$-\frac{1}{(4+1)(n'-n)}\left\{\frac{1}{32}\frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}}(21)^{(i)}\Big[(21)^{(i)}+\right.$$

$$\left.+(21)^{(-i+2)}\Big]\right\}_{i\neq -1}$$

$$+\frac{1}{4n'-(4-1)n}\left\{\frac{1}{16}\frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}}(50)^{(i)}(52)^{(i)}-\right.$$

$$-\frac{1}{(4+1)n'-4n}\frac{4}{4}\left(\frac{a}{\tilde{\mu}}\right)^{\frac{1}{2}}(70)^{(i)}(70)_\alpha^{(i)}+$$

$$\left.+\frac{1}{(4+1)n'-(4-1)n}\frac{1}{32}\frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}}(182)^{(i)}(182)^{(i)}\right]+$$

$$+\Bigg[-\frac{1}{n'-n}\left\{\left(\frac{a}{\tilde{\mu}}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{a'^2}\Big[\frac{1}{2}(1)^{(\pm 4)}-\frac{1}{4}(3)^{(\pm 4)}\Big]-\right.$$

$$-\frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}}\frac{\alpha}{a'}\frac{1}{8}(21)^{(4)}+\left(\frac{a}{\tilde{\mu}}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\alpha}{a'}\Big[\frac{1}{2}(1)_\alpha^{(\pm 4)}-\frac{1}{4}(3)_\alpha^{(\pm 4)}\Big]-$$

$$\left.-\left(\frac{a}{\tilde{\mu}}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\alpha}{a'^3}+\frac{1}{4}\frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}}\left(\frac{\alpha}{a'}\right)^2\right\}-$$

$$- \frac{1}{n' - 2n} \left\{ \frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}} \frac{\alpha}{a'} \left[\frac{1}{8} (50)^{(-1)} - \frac{1}{16} (52)^{(-1)} \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{8} \frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}} \left(\frac{\alpha}{a'} \right)^2 \right\} +$$

$$+ \frac{1}{n'} \left\{ \frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}} \frac{\alpha}{a'} \left[- \frac{3}{8} (50)^{(1)} + \frac{3}{16} (52)^{(1)} + \frac{3}{8} (182)^{(1)} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{9}{8} \frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}} \left(\frac{\alpha}{a'} \right)^2 \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2n' - n} \left\{ \left(\frac{a}{\tilde{\mu}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{a'^2} (70)^{(1)} - 4 \left(\frac{a}{\tilde{\mu}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\alpha}{a'^3} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{a}{\tilde{\mu}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\alpha}{a'} (70)_{\alpha}^{(1)} \right\} \Bigg] \cdot e'^2$$

$$+ \left[\sum_i \left[- \frac{1}{n' - n} \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{a}{\tilde{\mu}} \right)^{\frac{1}{2}} \left[(1)^{(i)} (11)_{\alpha}^{(\pm i)} + (11)^{(i)} (1)_{\alpha}^{(\pm i)} \right] - \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. - \frac{1}{8} \frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}} (1)^{(i)} (11)^{(\pm i)} \right\}_{i \neq 0} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{1}{4n' - (4-1)n} \frac{1}{16} \frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}} (50)^{(i)} (60)^{(i)} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{1}{4n' - (4-2)n} \frac{1}{8} \frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}} (212)^{(i)} (212)^{(i)} \right] + \right.$$

$$+ \left[- \frac{1}{n' - n} \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{a}{\tilde{\mu}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{a'^2} \left[(1)^{(\pm 4)} - (11)^{(\pm 4)} \right] + \right. \right.$$

$$+\frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}}\frac{\alpha}{a'}\left[-\frac{1}{8}(1)^{(\pm 1)}+\frac{1}{8}(11)^{(\pm 1)}\right]+\frac{1}{4}\left(\frac{a}{\tilde{\mu}}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\alpha}{a'}\left[(1)_{\alpha}^{(\pm 1)}-\right.$$

$$\left.-(11)_{\alpha}^{(\pm 1)}\right]-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\tilde{\mu}}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\alpha}{a'^{2}}+\frac{1}{8}\frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}}\left(\frac{\alpha}{a'}\right)^{2}\Bigg\}-$$

$$-\frac{1}{n'-2n}\left\{\frac{1}{16}\frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}}\frac{\alpha}{a'}\left[(50)^{(-1)}-(60)^{(-1)}\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{16}\frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}}\left(\frac{\alpha}{a'}\right)^{2}\right\}+$$

$$+\frac{1}{n'}\left\{\frac{3}{16}\frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}}\frac{\alpha}{a'}\left[(60)^{(1)}-(50)^{(1)}\right]-\frac{9}{16}\frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}}\left(\frac{\alpha}{a'}\right)^{2}\right\}$$

$$-\frac{1}{n'+n}\left\{\frac{1}{4}\frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}}\frac{\alpha}{a'}(212)^{(1)}-\frac{1}{8}\frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}}\left(\frac{\alpha}{a'}\right)^{2}\right\}\Bigg]\cdot\sin^{2}i$$

$$+\left[\sum_{i}\left[-\frac{1}{n'-n}\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{a}{\tilde{\mu}}\right)^{\frac{1}{2}}\left[(1)^{(i)}(11)_{\alpha}^{(\pm i)}+(11)^{(i)}(1)_{\alpha}^{(\pm i)}\right]\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{1}{8}\frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}}(1)^{(i)}(11)^{(\pm i)}\right\}_{i\neq 0}+\right.\right.$$

$$+\frac{1}{4n'-(4-1)n}\frac{1}{16}\frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}}(50)^{(i)}(60)^{(i)}+$$

$$\left.+\frac{1}{4n'-(4-2)n}\frac{1}{8}\frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}}(212)^{(i)}(212)^{(i)}\right]+$$

$$+\left[-\frac{1}{n'-n}\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{a}{\tilde{\mu}}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{a'^{2}}\left[(1)^{(\pm 1)}-(11)^{(\pm 1)}\right]+\right.\right.$$

$$+ \frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}} \frac{\alpha}{a'} \left[-\frac{1}{8} (1)^{(\pm 1)} + \frac{1}{8} (11)^{(\pm 1)} \right] + \frac{1}{4} \left(\frac{a}{\tilde{\mu}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\alpha}{a'} \left[(1)_{a}^{(\pm 1)} - \right.$$

$$\left. - (11)_{a}^{(\pm 1)} \right] - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\tilde{\mu}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\alpha}{a'^{3}} + \frac{1}{8} \frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}} \left(\frac{\alpha}{a'} \right)^{2} \Bigg\} -$$

$$- \frac{1}{n' - 2n} \left\{ \frac{1}{16} \frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}} \frac{\alpha}{a'} \left[(50)^{(-1)} - (60)^{(-1)} \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{16} \frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}} \left(\frac{\alpha}{a'} \right)^{2} \right\} +$$

$$+ \frac{1}{n'} \left\{ \frac{3}{16} \frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}} \frac{\alpha}{a'} \left[(60)^{(1)} - (50)^{(1)} \right] - \frac{9}{16} \frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}} \left(\frac{\alpha}{a'} \right)^{2} \right\}$$

$$- \frac{1}{n' + n} \left\{ \frac{1}{4} \frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}} \frac{\alpha}{a'} (212)^{(1)} - \frac{1}{8} \frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}} \left(\frac{\alpha}{a'} \right)^{2} \right\} \Bigg] \cdot \sin^{2} i'$$

$$+ \left[\sum_{i} \left[\frac{1}{n' - n} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\tilde{\mu}} \right)^{\frac{1}{2}} \left[(1)^{(i)} (11)_{a}^{(\pm i)} + (11)^{(i)} (1)_{a}^{(\pm i)} \right] - \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. - \frac{1}{4} \frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}} (1)^{(i)} (11)^{(\pm i)} \right\}_{i \neq 0} - \right. \right.$$

$$- \frac{1}{4n' - (4-1)n} \frac{1}{8} \frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}} (50)^{(i)} (60)^{(i)} -$$

$$\left. \left. - \frac{1}{4n' - (4-2)n} \frac{1}{4} \frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}} (212)^{(i)} (212)^{(i)} \right] \right] +$$

$$+\left[\frac{1}{n'-n}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\tilde{\mu}}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{a'^{2}}\left[(1)^{(\pm 1)}-(11)^{(\pm 1)}\right]+\right.\right.$$

$$+\frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}}\frac{\alpha}{a'}\left[-\frac{1}{4}(1)^{(\pm 1)}+\frac{1}{4}(11)^{(\pm 1)}\right]+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\tilde{\mu}}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\alpha}{a'}\left[(1)_{\alpha}^{(\pm 1)}-\right.$$

$$\left.-(11)_{\alpha}^{(\pm 1)}\right]-\left(\frac{a}{\tilde{\mu}}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\alpha}{a'^{3}}+\frac{1}{4}\frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}}\left(\frac{\alpha}{a'}\right)^{2}\Bigg\}+$$

$$+\frac{1}{n'-2n}\left\{\frac{1}{8}\frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}}\frac{\alpha}{a'}\left[(50)^{(-1)}-(60)^{(-1)}\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{8}\frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}}\left(\frac{\alpha}{a'}\right)^{2}\right\}+$$

$$+\frac{1}{n'}\left\{\frac{3}{8}\frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}}\frac{\alpha}{a'}\left[(50)^{(1)}-(60)^{(1)}\right]+\frac{9}{8}\frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}}\left(\frac{\alpha}{a'}\right)^{2}\right\}+$$

$$+\frac{1}{n'+n}\left\{\frac{1}{2}\frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}}\frac{\alpha}{a'}(212)^{(1)}-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{4}\frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}}\left(\frac{\alpha}{a'}\right)^{2}\right\}\right]\cdot\sin i\sin i'\cos(h-h')$$

$$+\left[\sum_{i}\left(-\frac{1}{n'-n}\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{a}{\tilde{\mu}}\right)^{\frac{1}{2}}(1)^{(i)}\left[(21)_{\alpha}^{(i-1)}+(21)_{\alpha}^{(-i-1)}\right]-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{1}{16}\frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}}(1)^{(i)}\left[(21)^{(i-1)}+(21)^{(-i-1)}\right]\right\}_{i\neq 0}-\right.$$

$$-\frac{1}{(i+1)(n'-n)}\left\{\frac{i+1}{4}\left(\frac{a}{\tilde{\mu}}\right)^{\frac{1}{2}}(21)^{(i)}\left[(1)_{\alpha}^{(i+1)}+(1)_{\alpha}^{(-i-1)}\right]+\right.$$

$$+\frac{1}{16}\frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}}(21)^{(i)}\left[(2)^{(i+1)}+(2)^{(-i-1)}\right]\Big\}_{i\neq -1}+$$

$$+\frac{1}{4n'-(4-1)n}\Big\{-\frac{4-1}{4}\left(\frac{a}{\tilde{\mu}}\right)^{\frac{1}{2}}\left[(50)^{(i)}(70)_{a}^{(i-1)}\right.$$

$$\left.+(50)_{a}^{(i)}(70)^{(i-1)}\right]+\frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}}\left[\frac{i-1}{16}(50)^{(i)}(70)^{(i-1)}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{16}(50)^{(i)}(71)^{(i-1)}+\frac{1}{8}(50)^{(i)}(90)^{(-i-1)}\right]\Big\}+$$

$$+\frac{1}{(4+1)n'-(4-1)n}\frac{1}{8}\frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}}(172)^{(i+1)}(182)^{(i)}\Big]+$$

$$+\left[\frac{1}{n'-n}\Big\{\left(\frac{a}{\tilde{\mu}}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{a'^{2}}\left[(1)^{(\pm 2)}+\frac{1}{4}\left[(21)^{(0)}+(21)^{(-2)}\right]\right]+\right.$$

$$+\frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}}\frac{\alpha}{a'}\left[-\frac{1}{4}(1)^{(\pm 2)}+\frac{1}{8}(2)^{(\pm 2)}-\frac{3}{16}(21)^{(0)}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{16}(21)^{(-2)}\right\}+\left(\frac{a}{\tilde{\mu}}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\alpha}{a'}\left[(1)_{a}^{(\pm 2)}+\frac{1}{4}\left[(21)_{a}^{(0)}+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+(21)_{a}^{(-2)}\right]\right]\right\}+$$

$$+\frac{1}{2n'-n}\Big\{\left(\frac{a}{\tilde{\mu}}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{a'^{2}}(50)^{(2)}+\frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}}\frac{\alpha}{a'}\frac{1}{4}(50)^{(2)}+$$

$$+\left(\frac{a}{\tilde{\mu}}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\alpha}{a'}(50)_{a}^{(2)}\Big\}+$$

$$+ \frac{1}{2n' - 3n} \frac{3}{4} \frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}} \frac{\alpha}{a'} (50)^{(-2)} +$$

$$+ \frac{1}{n' - 2n} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\tilde{\mu}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{a'^2} (70)^{(-2)} + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\tilde{\mu}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\alpha}{a'} (70)_{\alpha}^{(-2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}} \frac{\alpha}{a'} \left[- \frac{1}{8} (70)^{(-2)} + \frac{1}{16} (71)^{(-2)} + \frac{1}{8} (90)^{(0)} \right] \right\} +$$

$$+ \frac{1}{n'} \left\{ \frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}} \frac{\alpha}{a'} \left[\frac{3}{16} (71)^{(0)} + \frac{3}{8} (90)^{(-2)} + \frac{3}{4} (172)^{(2)} \right] \right\} -$$

$$- \frac{1}{n' + n} \frac{1}{16} \frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}} \frac{\alpha}{a'} (182)^{(0)} +$$

$$+ \frac{1}{n' - 3n} \frac{3}{16} \frac{1}{(\tilde{\mu}a)^{1/2}} \frac{\alpha}{a'} (182)^{(-2)} \Bigg] \Bigg] \cdot ee' \cos (\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') +$$

$$+ \frac{3}{2a^2} \left[\sum_i \left(\frac{1}{(n' - n)^2} \frac{1}{8} \left\{ (1)^{(i)} (2)^{(\pm i)} + (2)^{(i)} (1)^{(\pm i)} \right\}_{i \neq 0} + \right. \right.$$

$$\left. + \left(\frac{i-1}{in' - (i-1)n} \right)^2 \frac{1}{8} (50)^{(i)} (50)^{(i)} \right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{(n' - n)^2} \left\{ \frac{\alpha}{a'} \left[\frac{1}{2} (1)^{(\pm 1)} - \frac{1}{4} (2)^{(\pm 1)} \right] - \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{a'} \right)^2 \right\} - \right.$$

$$\left. \left. - \frac{1}{(n' - 2n)^2} \left\{ \frac{\alpha}{a'} (50)^{(-1)} - \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{a'} \right)^2 \right\} \right) \right] \cdot e^2 +$$

$$+ \frac{3}{2a^2} \left[\sum_i \left(\frac{1}{(n' - n)^2} \frac{1}{8} \left\{ (1)^{(i)} (3)^{(\pm i)} + (3)^{(i)} (1)^{(\pm i)} \right\}_{i \neq 0} + \right. \right.$$

$$+\left(\frac{i}{(i+1)n' - in}\right)^2 \frac{1}{8}(70)^{(i)}(70)^{(i)}\Bigg] +$$

$$+\left[\frac{1}{(n'-n)^2}\left\{\frac{\alpha}{a'}\left[\frac{1}{2}(1)^{(\pm 1)} - \frac{1}{4}(3)^{(\pm 1)}\right] - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{a'}\right)^2\right\} -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{(2n'-n)^2}\left\{\frac{\alpha}{a'}(70)^{(1)} - 2\left(\frac{\alpha}{a'}\right)^2\right\}\right]\Bigg] \cdot e'^2 +$$

$$+\frac{3}{2a^2}\left[\sum_i\left[\frac{1}{(n'-n)^2}\frac{1}{8}\left\{(1)^{(i)}(11)^{(\pm i)} + (11)^{(i)}(1)^{(\pm i)}\right\}_{i\neq 0}\right]\right.$$

$$\left.+\left[\frac{1}{(n'-n)^2}\left\{\frac{\alpha}{a'}\frac{1}{4}\left[(1)^{(\pm 1)} - (11)^{(\pm 1)}\right] - \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{a'}\right)^2\right\}\right]\right] \cdot$$

$$\cdot (\sin^2 i + \sin^2 i')$$

$$+\frac{3}{2a^2}\left[\sum_i\left[-\frac{1}{(n'-n)^2}\frac{1}{4}\left\{(1)^{(i)}(11)^{(\pm i)} +\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + (11)^{(i)}(1)^{(\pm i)}\right\}_{i\neq 0}\right] + \left[-\frac{1}{(n'-n)^2}\left\{\frac{\alpha}{a'}\frac{1}{2}\left[(1)^{(\pm 1)} -\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - (11)^{(\pm 1)}\right] - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{a'}\right)^2\right\}\right]\right] \cdot \sin i \sin i' \cos(h - h') +$$

$$+\frac{3}{2a^2}\left[\sum_i\left[\frac{1}{(n'-n)^2}\frac{1}{8}\left\{3(1)^{(i)}(21)^{(i-1)} +\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + (1)^{(i)}(21)^{(-i-1)}\right\}_{i\neq 0} + \left(\frac{i-1}{in' - (i-1)n}\right)^2 \frac{1}{4}(50)^{(i)}(70)^{(i-1)}\right]\right.$$

$$+\left[-\frac{1}{(n'-n)^2}\frac{\alpha}{a'}\left\{(1)^{(\pm 2)}+\frac{1}{4}\left[(21)^{(0)}+(21)^{(-2)}\right]\right\}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(2n'-n)^2}\frac{\alpha}{a'}(50)^{(2)}-\frac{1}{(n'-2n)^2}\frac{\alpha}{a'}(70)^{(-2)}\right]\cdot$$

$$\cdot ee'\cos(\tilde{\omega}-\tilde{\omega}')\Bigg\} \qquad (3.111)$$

gde $(2)^{(\pm i)}$ stoji za $\sum[(2)^{(i)}+(2)^{(-i)}]$, a indeks a označava izvod po velikoj poluosi. Sa usvojenim stepenom aproksimacije u F_2^* je dovoljno uzeti u obzir samo uticaj Jupitera, a uticaj Saturna i ostalih planeta kao i ranije uračunavati implicitno, uzimajući u obzir njihovo dejstvo na Jupiter.

Podsetimo još jednom da se jednačina (3.111) bitno razlikuje od odgovarajuće jednačine (34) u Yuasa-inom radu. U (3.111) se, naime, pojavljuju i članovi iz indirektnog dela funkcije poremećaja, dok kod članova koji pripadaju glavnom delu funkcije poremećaja ima dosta ispravaka kako štamparskih grešaka, tako i Yuasa-inih grešaka napravljenih u toku samog izvođenja.

Ovim je i prva kanonička transformacija, izvršena u cilju eliminisanja kratko-periodičnih poremećaja, u potpunosti definisana. Dobijen je Hamiltonijan:

$$F^* = \frac{\tilde{\mu}^2}{2L^{*2}} - K^* +$$

$$+ F_1^*(L^*, G^*, H^*, -, g^*, h^*, k^*, L', G', H', -, g', h')$$

$$+ F_2^*(L^*, G^*, H^*, -, g^*, h^*, k^*, L', G', H', -, g', h') \qquad (3.112)$$

i ovaj kanonički sistem ima integral L^* = const., tj. velika poluosa male planete je konstanta u novom sistemu.

3.4.4 Prelaz na Poincaré-ove promenljive. Eliminisanje dugo-periodičnih članova. Rešenja

Poznato je da je za izvođenje jednačina sekularnih poremećaja malih planeta zgodnije umesto Delaunay-evih promenljivih koristiti tzv. Poincaré-ove promenljive. Naravno, radi se o takođe kanoničkim promenljivima, a transformacija kojom su definisane može se formalno predstaviti na sledeći način:

$$\left\{\begin{matrix} L^* \\ G^* \\ H^* \\ K^* \end{matrix}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{matrix} L = L^* \\ p = \sqrt{2\,(L^* - G^*)}\ \cos\,(g^* + h^*) \\ r = \sqrt{2\,(G^* - H^*)}\ \cos\,h^* \\ K = K^* \end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix} l^* \\ g^* \\ h^* \\ k^* \end{matrix}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{matrix} \lambda = l^* + g^* + h^* \\ q = -\sqrt{2\,(L^* - G^*)}\ \sin\,(g^* + h^*) \\ s = -\sqrt{2\,(G^* - H^*)}\ \sin\,h^* \\ k = k^* \end{matrix}\right\} \qquad (3.113)$$

Ako uvedemo:

$$p' = e'\cos\tilde{\omega}' \quad ; \quad r' = \sin i'\cos h'$$
$$q' = e'\sin\tilde{\omega}' \quad ; \quad s' = \sin i'\sin h' \qquad (3.114)$$

možemo Hamiltonijan (3.112) predstaviti u funkciji novih promenljivih L, p, r, K, λ, q, s, p', r', q', s'. No, kako su p', r', q', s' poznate funkcije vremena k (=t), F^* se može

pojednostaviti i predstaviti samo u funkciji L, p, r, K, λ, q, s, k. Dalje pojednostavljenje predstavlja odbacivanje sada više nepotrebnog konstantnog člana $\tilde{\mu}^2/2L^2$ i preuređenje Hamiltonijana svođenjem na oblik:

$$F^* = F_o^* + F_1^* \qquad (3.115)$$

gde se novo F_o^* sastoji od člana $-K$ iz ranijeg F_o^* i članova drugog stepena iz ranijeg F_1^*, dok članovi četvrtog stepena iz ranijeg F_1^* i članovi iz F_2^* čine novo F_1^*. Tako dobijeni novi F_o^* i F_1^* dati su jednačinama (46) i (47) u Yuasa-inom radu. Indeks j, koji je u ovim izrazima radi jednostavnosti ispušten, ali se podrazumeva uz sve veličine koje se odnose na poremećajne planete, u F_o^* se odnosi na Jupiter i Saturn, dok se u F_1^* odnosi samo na Jupiter.

Jednačine kretanja sa ovim Hamiltonijanom date su takođe u obliku kanoničkog sistema:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial F^*}{\partial \lambda} = 0 \;;\quad \frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial F^*}{\partial L} \;;\quad \frac{dp}{dt} = \frac{\partial F^*}{\partial q} \;;\quad \frac{dq}{dt} = -\frac{\partial F^*}{\partial p}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial F^*}{\partial s} \;;\quad \frac{ds}{dt} = -\frac{\partial F^*}{\partial r} \;;\quad \frac{dK}{dt} = \frac{\partial F^*}{\partial k} \;;\quad \frac{dk}{dt} = -\frac{\partial F^*}{\partial K} = 1 \qquad (3.116)$$

gde, dakle, važi L = const., a λ se može zanemariti, jer je već ranije eliminisano iz Hamiltonijana.

Koeficijenti A_1, ..., A_{σ}, B_1, ..., B_{21}, koji figurišu u jednačinama (46) i (47) Yuasa-inog rada, definisani su u Tabeli 1 na stranama 416 i 417 istog. Obrasce za koeficijente drugog reda po masi D_1, ..., D_{σ}, međutim, koji naravno imaju

iste formalne definicije kao i u Yuasa-inom radu, treba uzeti iz naše jednačine (3.111), a ne iz, kako smo već rekli, pogrešne i nekompletne Yuasa-ine jednačine (34).

Radi eliminisanja dugo-periodičnih poremećaja i rešavanja jednačina (3.116) vrši se nova kanonička transformacija $(p, r, K, q, s, k) \longrightarrow (p^*, r^*, K^*, q^*, s^*, k^*)$. Označimo li novi Hamiltonijan sa F^{**}, a generatrisu sa S^*, u skladu sa Hori-jevom procedurom imaćemo:

$$F^{**} = F_o^{**} + F_1^{**} + \dots$$

$$S^* = S_1^* + S_2^* + \dots \qquad (3.117)$$

gde je:

$$F_o^{**} = [F_o^*]_{(p,r,K,q,s,k) \longrightarrow (p^*,r^*,K^*,q^*,s^*,k^*)}$$

$$F_1^{**} = [F_1^*]_s$$

$$S_1^* = \int [F_1^* - F_{1_s}^*] \, d\tau \qquad (3.118)$$

Poincaré-ove promenljive za poremećajne planete mogu se napisati u poznatom obliku funkcija vremena k (=t):

$$p'_j = \sum_l \nu_{jl} \cos(g_{jl}k + \beta_{jl}) \quad ; \quad q'_j = \sum_l \nu_{jl} \sin(g_{jl}k + \beta_{jl})$$

$$r'_j = \sum_l \mu_{jl} \cos(f_{jl}k + \gamma_{jl}) \quad ; \quad s'_j = \sum_l \mu_{jl} \sin(f_{jl}k + \gamma_{jl}) \qquad (3.119)$$

gde se indeks j odnosi na planetu koja neposredno remeti kretanje male planete, dok l označava planetu koja remeti kretanje planete j. Konstante ν_{jl}, μ_{jl}, g_{jl}, f_{jl}, β_{jl}, γ_{jl}

određene su kretanjem velikih planeta.

Novi Hamiltonijan F_o^{**} dat je sa:

$$F_o^{**} = - K + \sum_j m'_j \left[\frac{A_1}{L}(p^{*2} + q^{*2}) + \frac{A_2}{L}(r^{*2} + s^{*2}) + \right.$$

$$\left. + \frac{A_3}{\sqrt{L}}(r^* r'_j - s^* s'_j) + \frac{A_4}{\sqrt{L}}(p^* p'_j - q^* q'_j) \right] \qquad (3.120)$$

gde su sada p', q', r', s' funkcije k^* i dobijaju se operacijom $k \longrightarrow k^*$ u jednačinama (3.119).

Da bi se dobili F_1^{**} i S_1^* treba F_1^* razdvojiti na sekularni i periodični deo, a to se može postići pomoću sledećih veza:

$$p^* = \sqrt{L} \left[\nu \cos (g_o \tau + \beta) + \sum_j \sum_l \frac{- \nu_{jl} A_\sigma m'_j}{(g_o - g_{jl})L} \cos (g_{jl} \tau + \beta_{jl}) \right]$$

$$q^* = -\sqrt{L} \left[\nu \sin (g_o \tau + \beta) + \sum_j \sum_l \frac{- \nu_{jl} A_\sigma m'_j}{(g_o - g_{jl})L} \sin (g_{jl} \tau + \beta_{jl}) \right]$$

$$r^* = \sqrt{L} \left[\mu \cos (-g_o \tau + \gamma) + \sum_j \sum_l \frac{\mu_{jl} A_\sigma m'_j}{(g_o + f_{jl})L} \cos (f_{jl} \tau + \gamma_{jl}) \right]$$

$$s^* = -\sqrt{L} \left[\mu \sin (-g_o \tau + \gamma) + \sum_j \sum_l \frac{\mu_{jl} A_\sigma m'_j}{(g_o + f_{jl})L} \sin (f_{jl} \tau + \beta_{jl}) \right]$$

$$k^* = \tau + \tau_o \qquad (3.121)$$

gde je:

$$g_o = \sum_j 2A_\sigma \frac{m'_j}{L} \qquad (3.122)$$

a ν, μ, β, γ, τ_o su konstante integracije. Pošto K ($=K^*$) ne figuriše u izrazu za F_1^*, ne moramo uvoditi odgovarajuću vezu i za tu promenljivu. No, onda se i τ_o može po volji odabrati, na primer, tako da bude jednako nuli, pa se p', q', r', s' mogu predstaviti kao funkcije novog parametarskog vremena τ, jednostavnom smenom $k \longrightarrow \tau$ u (3.119). Jednačine (3.121) predstavljaju poznata rešenja sistema (3.116) u slučaju kad se Hamiltonijan ograniči samo na F_o^{**} (tj. članove prvog reda i drugog stepena) i analogne su rešenjima (3.37) koja se, kako smo videli, dobijaju u okviru linearne teorije.

Da bi pojednostavio pisanje, Yuasa je sada uveo nekoliko novih veličina:

$$\lambda_o = g_o\tau + \beta \quad ; \quad \delta_o = -g_o\tau + \gamma$$

$$\lambda_{jl} = g_{jl}\tau + \beta_{jl} \quad ; \quad \delta_{jl} = f_{jl}\tau + \gamma_{jl}$$

$$\xi_{jl} = \frac{-\nu_{jl}A_\sigma m'_j}{(g_o - g_{jl})L} \quad ; \quad \eta_{jl} = \frac{\mu_{jl}A_\sigma m'_j}{(g_o + f_{jl})L} \qquad (3.123)$$

pa (3.119) i (3.121) postaju:

$$p'_j = \sum_l \nu_{jl}\cos\lambda_{jl} \quad ; \quad p^* = \sqrt{L}\left[\nu\cos\lambda_o + \sum_j\sum_l \xi_{jl}\cos\lambda_{jl}\right]$$

$$q'_j = \sum_l \nu_{jl}\sin\lambda_{jl} \quad ; \quad q^* = -\sqrt{L}\left[\nu\sin\lambda_o + \sum_j\sum_l \xi_{jl}\sin\lambda_{jl}\right]$$

$$x'_j = \sum_l \mu_{jl}\cos\delta_{jl} \quad ; \quad x^* = \sqrt{L}\left[\mu\cos\delta_o + \sum_j\sum_l \eta_{jl}\cos\delta_{jl}\right]$$

$$s'_j = \sum_l \mu_{jl}\sin\delta_{jl} \quad ; \quad s^* = -\sqrt{L}\left[\mu\sin\delta_o + \sum_j\sum_l \eta_{jl}\sin\delta_{jl}\right] \qquad (3.124)$$

Sa usvojenim stepenom aproksimacije sumiranje po j dovoljno je ograničiti samo na Jupiter ($j=5$), a po l na Jupiter ($l=5$) i Saturn ($l=6$), pa se, dalje, može pisati:

$$\rho_1 = \nu\cos\lambda_o = \frac{p^*}{\sqrt{L}} - \xi_{55}\cos\lambda_{55} - \xi_{56}\cos\lambda_{56}$$

$$\rho_2 = \nu\sin\lambda_o = -\frac{q^*}{\sqrt{L}} - \xi_{55}\sin\lambda_{55} - \xi_{56}\sin\lambda_{56}$$

$$\sigma_1 = \mu\cos\delta_o = \frac{r^*}{\sqrt{L}} - \eta_{55}\cos\delta_{55} - \eta_{56}\cos\delta_{56}$$

$$\sigma_2 = \mu\sin\delta_o = -\frac{s^*}{\sqrt{L}} - \eta_{55}\sin\delta_{55} - \eta_{56}\sin\delta_{56} \qquad (3.125)$$

Konačno se tako dobija:

$$F_1^{**} = m'_5\left\{\left(B_1 - \frac{A_1}{4}\right)\left[\nu^4 + 4\nu^2\left(\xi^2_{55} + \xi^2_{56}\right)\right] + B_2\nu^2\left(\nu^2_{55} + \nu^2_{56}\right) + \right.$$

$$\left. + \ldots\right\} + m'^2_5\left\{D_1\nu^2 + D_2\mu^2\right\} \qquad (3.126)$$

$$S_1^* = m_o' \left(B_1 - \frac{A_1}{4}\right) \cdot$$

$$\cdot \left[4\zeta_{oo}\left(\rho_1^2 + \rho_2^2 + \zeta_{oo}^2 + 2\zeta_{o\sigma}^2\right) \frac{\rho_2 \cos \lambda_{oo} - \rho_1 \sin \lambda_{oo}}{g_o - g_{oo}} + \right.$$

$$+ 4\zeta_{o\sigma}\left(\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\zeta_{oo}^2 + \zeta_{o\sigma}^2\right) \frac{\rho_2 \cos \lambda_{o\sigma} - \rho_1 \sin \lambda_{o\sigma}}{g_o - g_{o\sigma}} +$$

$$+ 8\zeta_{oo}\zeta_{o\sigma}\left(\rho_1^2 + \rho_2^2\right) \frac{\sin (\lambda_{oo} - \lambda_{o\sigma})}{g_{oo} - g_{o\sigma}} +$$

$$+ \zeta_{oo}^2 \frac{2\rho_1\rho_2 \cos 2\lambda_{oo} - (\rho_1^2 - \rho_2^2) \sin 2\lambda_{oo}}{g_o - g_{oo}} +$$

$$+ \zeta_{o\sigma}^2 \frac{2\rho_1\rho_2 \cos 2\lambda_{o\sigma} - (\rho_1^2 - \rho_2^2) \sin 2\lambda_{o\sigma}}{g_o - g_{o\sigma}} +$$

$$+ 4\zeta_{oo}^2\zeta_{o\sigma} \frac{\rho_2 \cos (2\lambda_{oo} - \lambda_{o\sigma}) - \rho_1 \sin (2\lambda_{oo} - \lambda_{o\sigma})}{g_o - 2g_{oo} + g_{o\sigma}} +$$

$$+ 4\zeta_{oo}\zeta_{o\sigma}^2 \frac{\rho_2 \cos (2\lambda_{o\sigma} - \lambda_{oo}) - \rho_1 \sin (2\lambda_{o\sigma} - \lambda_{oo})}{g_o + g_{oo} - 2g_{o\sigma}} +$$

$$\left. + 4\zeta_{oo}\zeta_{o\sigma} \frac{2\rho_1\rho_2 \cos (\lambda_{oo} + \lambda_{o\sigma}) - (\rho_1^2 - \rho_2^2) \sin (\lambda_{oo} + \lambda_{o\sigma})}{2g_o - g_{oo} - g_{o\sigma}}\right]$$

$$+ \ldots +$$

$$+ m_o'^2 D_\sigma \left[\nu_{oo} \frac{\rho_2 \cos \lambda_{oo} - \rho_1 \sin \lambda_{oo}}{g_o - g_{oo}} + \nu_{o\sigma} \frac{\rho_2 \cos \lambda_{o\sigma} - \rho_1 \sin \lambda_{o\sigma}}{g_o - g_{o\sigma}}\right]$$

(3.127)

gde su uglovi λ_{jl} i δ_{jl} funkcije k^* i mogu se dobiti operacijom $\tau \longrightarrow k^*$ u jednačinama (3.123).

Dobili smo, dakle, F_1^{**} u funkciji konstanata integracije ν i μ, odnosno S_1^* u funkciji p^*, q^*, r^*, s^*, k^*, čime je, uzimajući u obzir i (3.120), Hamiltonijan $F^{**} = F_o^{**} + F_1^{**}$ definisan. Sistem diferencijalnih jednačina za nove promenljive p^*, q^*, r^*, s^*, K^*, k^* možemo napisati kao:

$$\begin{aligned}
\frac{dp^*}{dt} &= \frac{\partial F^{**}}{\partial q^*} \quad ; & \frac{dq^*}{dt} &= -\frac{\partial F^{**}}{\partial p^*} \\
\frac{dr^*}{dt} &= \frac{\partial F^{**}}{\partial s^*} \quad ; & \frac{ds^*}{dt} &= -\frac{\partial F^{**}}{\partial r^*} \\
\frac{dK^*}{dt} &= \frac{\partial F^{**}}{\partial k^*} \quad ; & \frac{dk^*}{dt} &= -\frac{\partial F^{**}}{\partial K^*} = 1
\end{aligned} \qquad (3.128)$$

Očigledno je $k^* = t + k_o^*$ i opet možemo jednostavno usvojiti $k_o^* = 0$. Promenljiva K^* onda u daljem može da se zanemari.

Iz (3.124) lako izvodimo:

$$\nu^2 = \left(\frac{p^*}{\sqrt{L}} - \sum_j \sum_l \xi_{jl} \cos \lambda_{jl}\right)^2 + \left(\frac{q^*}{\sqrt{L}} + \sum_j \sum_l \xi_{jl} \sin \lambda_{jl}\right)^2$$

$$\mu^2 = \left(\frac{r^*}{\sqrt{L}} - \sum_j \sum_l \eta_{jl} \cos \delta_{jl}\right)^2 + \left(\frac{s^*}{\sqrt{L}} + \sum_j \sum_l \eta_{jl} \sin \delta_{jl}\right)^2 \qquad (3.129)$$

gde su λ_{jl} i δ_{jl} opet funkcije $k^* = t$ i date su operacijom $\tau \longrightarrow k^*$ u jednačinama (3.123). Koristeći sada (3.120), (3.124), (3.126) i (3.129) sistem (3.128) postaje:

$$\frac{dp^*}{dt} = \sum_j m'_j \left(\frac{2}{L} A_1 q^* - \frac{A_\sigma}{\sqrt{L}} q'_j \right) + \frac{\partial F_1^{**}}{\partial \nu^2} \frac{\partial \nu^2}{\partial q^*} + \frac{\partial F_1^{**}}{\partial \mu^2} \frac{\partial \mu^2}{\partial q^*} =$$

$$= g_o q^* - \sum_j \sum_l \frac{A_\sigma m'_j \nu_{jl}}{\sqrt{L}} \sin \lambda_{jl} + \frac{\partial F_1^{**}}{\partial \nu^2} \frac{2}{\sqrt{L}} \left(\frac{q^*}{\sqrt{L}} + \sum_j \sum_l \xi_{jl} \sin \lambda_{jl} \right)$$

$$= \left(g_o + \frac{2}{L} \frac{\partial F_1^{**}}{\partial \nu^2} \right) q^* - \sum_j \sum_l \left(\frac{A_\sigma m'_j \nu_{jl}}{\sqrt{L}} - \frac{\partial F_1^{**}}{\partial \nu^2} \frac{2}{\sqrt{L}} \xi_{jl} \right) \sin \lambda_{jl}$$

$$\frac{dq^*}{dt} = -\left(g_o + \frac{2}{L} \frac{\partial F_1^{**}}{\partial \nu^2} \right) p^* - \sum_j \sum_l \left(\frac{A_\sigma m'_j \nu_{jl}}{\sqrt{L}} - \frac{\partial F_1^{**}}{\partial \nu^2} \frac{2}{\sqrt{L}} \xi_{jl} \right) \cos \lambda_{jl}$$

$$\frac{dr^*}{dt} = \left(-g_o + \frac{2}{L} \frac{\partial F_1^{**}}{\partial \mu^2} \right) s^* - \sum_j \sum_l \left(\frac{A_\sigma m'_j \mu_{jl}}{\sqrt{L}} - \frac{\partial F_1^{**}}{\partial \mu^2} \frac{2}{\sqrt{L}} \eta_{jl} \right) \sin \delta_{jl}$$

$$\frac{ds^*}{dt} = -\left(-g_o + \frac{2}{L} \frac{\partial F_1^{**}}{\partial \mu^2} \right) r^* - \sum_j \sum_l \left(\frac{A_\sigma m'_j \mu_{jl}}{\sqrt{L}} - \frac{\partial F_1^{**}}{\partial \mu^2} \frac{2}{\sqrt{L}} \eta_{jl} \right) \cos \delta_{jl} \qquad (3.130)$$

gde je:

$$\frac{\partial F_1^{**}}{\partial \nu^2} = m'_\sigma \left\{ \left(B_1 - \frac{A_1}{4} \right) \left[2\nu^2 + 4 \left(\xi_{\sigma\sigma}^2 + \xi_{\sigma\sigma}^2 \right) \right] + \left(B_7 + \frac{A_3}{2} \right) \left(\mu^2 + \eta_{\sigma\sigma}^2 + \eta_{\sigma\sigma}^2 \right) + \left(B_{10} + \frac{A_3}{4} \right) \left(\eta_{\sigma\sigma} \mu_{\sigma\sigma} + \eta_{\sigma\sigma} \mu_{\sigma\sigma} \right) + \left(B_{15} - \frac{A_\sigma}{8} \right) 2 \left(\xi_{\sigma\sigma} \nu_{\sigma\sigma} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \xi_{\sigma\sigma} \eta_{\sigma\sigma} \right) + B_2 \left(\nu_{\sigma\sigma}^2 + \nu_{\sigma\sigma}^2 \right) + B_6 \left(\mu_{\sigma\sigma}^2 + \mu_{\sigma\sigma}^2 \right) \right\} + m'^2_\sigma D_1$$

$$\frac{\partial F_1^{**}}{\partial \mu^2} = m_5'\left\{\left(B_7 + \frac{A_3}{2}\right)\left(\nu^2 + \xi_{55}^2 + \xi_{56}^2\right) + \left(B_4 - \frac{A_3}{4}\right)\left[2\mu^2 + 4\left(\eta_{55}^2 + \eta_{56}^2\right)\right] + \left(B_{11} - \frac{A_3}{8}\right)2\left(\mu_{55}\eta_{55} + \mu_{56}\eta_{56}\right) + B_6\left(\mu_{55}^2 + \mu_{56}^2\right) + B_9\left(\nu_{55}^2 + \nu_{56}^2\right) + B_{17}\left(\xi_{55}\nu_{55} + \xi_{56}\nu_{56}\right)\right\} + m_5'^2 D_3 \qquad (3.131)$$

Oblik (3.130) diferencijalnih jednačina za Poincaré-ove promenljive analogan je sistemu (3.36) koji se dobija u linearnoj teoriji, pa se i rešenja dobijaju na isti način i u sličnom obliku:

$$p^* = \sqrt{L}\left\{\nu \cos\left[\left(g_0 + \frac{\partial F_1^{**}}{\partial \nu^2}\right)t + \beta\right] + \sum_j \sum_l \xi_{jl} \cos \lambda_{jl}\right\}$$

$$q^* = -\sqrt{L}\left\{\nu \sin\left[\left(g_0 + \frac{\partial F_1^{**}}{\partial \nu^2}\right)t + \beta\right] + \sum_j \sum_l \xi_{jl} \sin \lambda_{jl}\right\}$$

$$r^* = \sqrt{L}\left\{\mu \cos\left[\left(-g_0 + \frac{\partial F_1^{**}}{\partial \mu^2}\right)t + \gamma\right] + \sum_j \sum_l \eta_{jl} \cos \delta_{jl}\right\}$$

$$s^* = -\sqrt{L}\left\{\mu \sin\left[\left(-g_0 + \frac{\partial F_1^{**}}{\partial \mu^2}\right)t + \gamma\right] + \sum_j \sum_l \eta_{jl} \sin \delta_{jl}\right\} \qquad (3.132)$$

Konačno, polazne promenljive p, q, r, s mogu se napisati u funkciji novih promenljivih:

$$p = p^* + \frac{\partial S_1^*}{\partial q^*} = p^* - \frac{1}{\sqrt{L}}\frac{\partial S_1^*}{\partial \rho_2} \quad ; \quad q = q^* - \frac{\partial S_1^*}{\partial p^*} = q^* - \frac{1}{\sqrt{L}}\frac{\partial S_1^*}{\partial \rho_1}$$

$$r = r^* + \frac{\partial S_1^*}{\partial S^*} = r^* - \frac{1}{\sqrt{L}} \frac{\partial S_1^*}{\partial \sigma_2} \quad ; \quad s = s^* - \frac{\partial S_1^*}{\partial r^*} = s^* - \frac{1}{\sqrt{L}} \frac{\partial S_1^*}{\partial \sigma_1}$$

(3.133)

Poredeći jednačine (3.132) i (3.37), odnosno (3.121), zapažamo da glavnu razliku ovih rešenja predstavljaju priraštaji frekvencija slobodnih oscilacija $-\frac{2}{L}\frac{\partial F_1^{**}}{\partial \nu^2}$ i $-\frac{2}{L}\frac{\partial F_1^{**}}{\partial \mu^2}$, koji se javljaju u novom rešenju. Budući da su različiti, ovi priraštaji čine slobodne oscilacije promenljivih p^*, q^*, odnosno r^*, s^*, nejednakim i dovode do toga da zbir sopstvenih longituda perihela i čvora $\beta + \gamma$ nije invarijanta, kako se to, inače, dobija u linearnoj teoriji.

Sopstvene ekscentričnosti i nagibi izvode se iz gornjih rešenja na sledeći način: srednji elementi, oslobođeni kratko-periodičnih poremećaja, koji se dobijaju iz (3.101), unose se u (3.113) da bi se dobile *Poincaré*-ove promenljive p, q, r, s. Ove se, dalje, putem (3.133) oslobađaju dugo-periodičnih poremećaja i daju p^*, q^*, r^*, s^*, da bi se zatim iz (3.129) dobilo ν i μ. Konačno je:

$$e_p = \left(\nu^2 - \frac{\nu^4}{4} \right)^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad \sin i_p = \left(\frac{\mu^2}{(1 - e_p^2)^{1/2}} - \frac{\mu^4}{4(1 - e_p^2)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

(3.134)

što se može lako pokazati, ako uočimo da su ν i μ, u stvari, sopstvene vrednosti veličina $[2(L-G)]^{1/2}$, odnosno $[2(G-H)]^{1/2}$ (očigledno, razlike sopstvenih veličina e_p i ν veoma su male, tako da sve do ekscentričnosti od 0.4 ostaju

unutar 1%; sličnо vredi i za razlike $\sin i$, i i μ).

Sopstvene longitude perihela i čvora za datu epohu (za koju se usvaja $t = 0$) dobijaju se iz:

$$\sin \beta = \frac{1}{\nu}\left[-\frac{q^*}{L^{1/2}} - \sum_j \sum_l \xi_{jl} \sin \lambda_{jl}\right]$$

$$\cos \beta = \frac{1}{\nu}\left[\frac{p^*}{L^{1/2}} - \sum_j \sum_l \xi_{jl} \cos \lambda_{jl}\right]$$

$$\sin \gamma = \frac{1}{\mu}\left[-\frac{s^*}{L^{1/2}} - \sum_j \sum_l \eta_{jl} \sin \delta_{jl}\right]$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{\mu}\left[\frac{r^*}{L^{1/2}} - \sum_j \sum_l \eta_{jl} \cos \delta_{jl}\right] \qquad (3.135)$$

3.5 Problem malih imenilaca

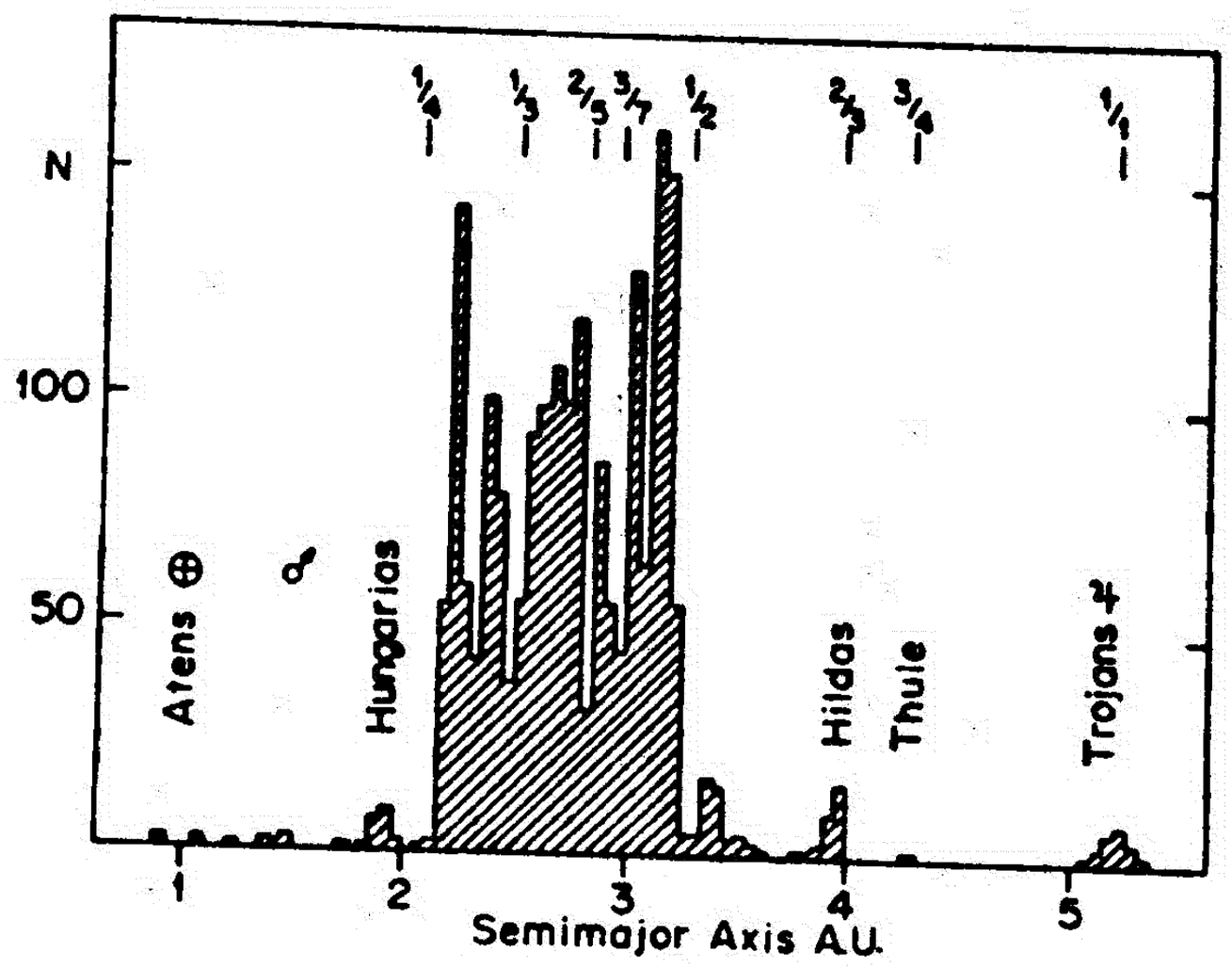
Zaključićemo ovu glavu kratkim osvrtom na problem malih imenilaca, s kojim se susrećemo u primeni opisanih teorija kretanja tela Sunčevog sistema. Pored grešaka prouzrokovanih zanemarivanjem članova višeg reda i stepena, mali imenioci predstavljaju glavni uzrok netačnosti analitičkih rešenja i to kako u njihovom kratko-periodičnom, tako i u dugo- periodičnom delu.

Prvi tip malih imenilaca javlja se napr. u rešenjima (3.101), u kojima je generatrisa S_1 data jednačinom (3.104). Ako se, naime, u ovim jednačinama nađe neka kombinacija srednjih kretanja poremećenog i poremećajnog tela takva da imenilac $in' - jn \simeq 0$ $(i,j = \pm 1, \pm 2, \ldots)$, tada se amplituda

i period odgovarajućeg kratko-periodičnog člana u S_1, odnosno dugo-periodičnog u F_2^* (jednačina 3.111), višestruko uvećavaju. Taj član dobija daleko veći relativni značaj, nego što bi ga inače u razvoju funkcije poremećaja imao na osnovu svog reda i stepena, a znatno raste i njegov doprinos ukupnom poremećajnom efektu. Postojanje ovakvih članova, prema tome, dovodi u pitanje i konvergenciju razvoja, jer se očekuje brzo opadanje relativne važnosti (doprinosa) članova sa porastom njihovog reda i stepena. Sa fizičke tačke gledišta, samerljivost (komenzurabilnost) srednjih kretanja poremećenog i poremećajnog tela znači zapravo često ponavljanje njihovih istih ili približno istih konfiguracija (prostornih rasporeda) u odnosu na centralno telo sistema, pa, prema tome, i kontinuiranu akumulaciju poremećajnog efekta. U nekim slučajevima to nakupljanje poremećaja može vrlo brzo da dovede do znatnih promena elemenata kretanja poremećenog tela, a u drastičnoj varijanti i do njegovog izmeštanja u neku drugu oblast Sunčevog sistema. Naziv "rezonance" zato sasvim odgovara ovim komenzurabilnim oblastima, pa se i članovi funkcije poremećaja koji imaju male imenioce i koji treba da opišu te uvećane poremećajne efekte često u literaturi nazivaju rezonantnim članovima. Svako rešenje jednačina kretanja, u kojem se zanemaruju eventualni članovi sa malim imeniocima, može zato da bude sasvim pogrešno, ili, u najmanju ruku, znatno umanjene tačnosti.

Primeri rezonanci u srednjem kretanju sreću se u celom Sunčevom sistemu. U prstenu malih planeta najvažnije rezonance, koje nastaju zbog samerljivosti njihovih srednjih kretanja i

srednjeg kretanja Jupitera, poklapaju se sa tzv. *Kirkwood*-ovim prazninama, oblastima iz kojih su male planete skoro u potpunosti odstranjene. Upravo nasuprot tome, međutim, ima i takvih rezonantnih oblasti unutar kojih se nalaze izolovane grupe malih planeta (vidi Sliku 3.).



Slika 3. Raspodela malih planeta po velikoj poluosi i položaji najvažnijih rezonanci u srednjem kretanju (preuzeto iz *Gradie et al.*, 1979).

Kod velikih planeta najpoznatiji primer rezonance u srednjem kretanju je tzv. "velika nejednakost" Jupitera i Saturna $2n'_5 - 5n'_6$ (period oko 900 godina). Rezonantni član funkcije poremećaja R_{56} sa ovim malim imeniocem, premda drugog reda po poremećajnoj masi, do te mere je značajan, da njegovo zanemarivanje u teorijama *Lagrange*-ovog tipa daje za frekvenciju sopstvene longitude perihela Saturna, napr., vrednost za čitavih 20% manju od tačne vrednosti (Brouwer and Van Woerkom, 1950), a što, naravno, i samo rešenje čini neprimenljivim u iole dužim vremenskim intervalima. Ipak, možda najilustrativniju demonstraciju značaja rezonantnih članova

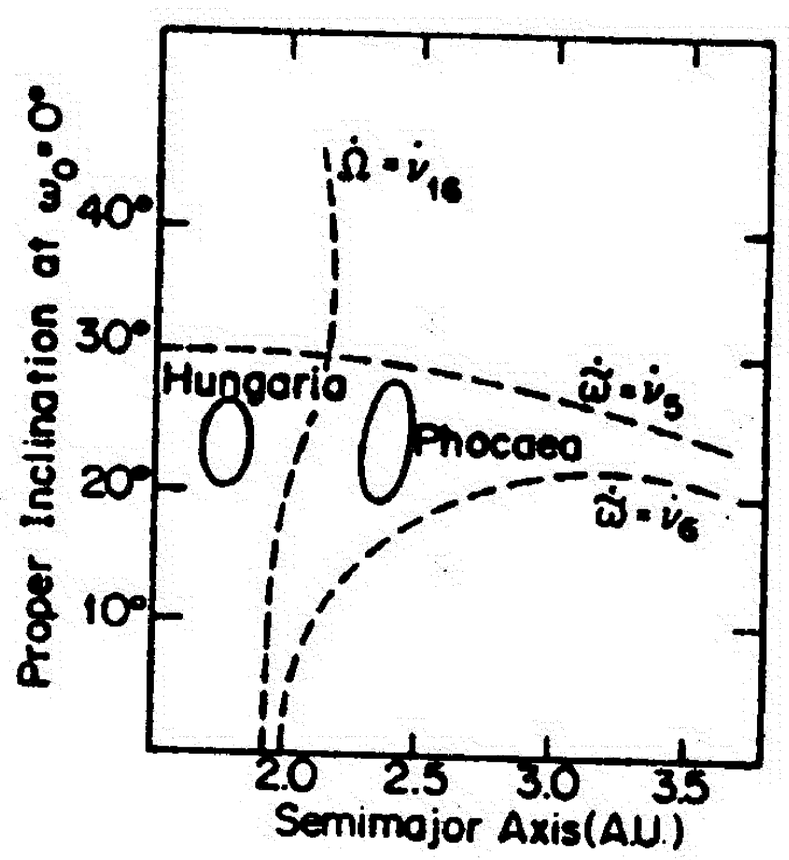
predstavlja nedavno objavljena analiza relativnog priraštaja keplerovskih energija Urana i Neptuna (Milani et al., 1987), gde je pokazano da samo jedan takav član, drugog reda po masi i drugog stepena po ekscentričnosti, ali sa malih imeniocem $n'_7 - 2n'_8$ (period oko 4300 godina), dostiže čak 10^6 puta veću vrednost od one koja se za njega očekuje na osnovu formalne "red i stepen" procene.

Drugi tip malih imenilaca, na čiji značaj za teoriju kretanja malih planeta je ukazao *Williams* (1969), javlja se u jednačinama sekularnih poremećaja (3.133). Generatrisa (3.127) u imeniocima svojih dugo-periodičnih članova ima linearne kombinacije frekvencija slobodnih i prinudnih oscilacija, koje takođe mogu ponekad poprimiti vrlo male vrednosti i proizvesti rezonantne efekte. Rezonance koje su posledica samerljivosti sekularnih frekvencija nazivaju se, adekvatno tome, sekularne rezonance. Na Slici 4. prikazane su najvažnije sekularne rezonance u oblasti malih planeta, gde je $\dot{\nu}_5 = g_{55}$, $\dot{\nu}_6 = g_{56}$, $\dot{\nu}_{16} = f_{56}$, a rezonanca nastaje kada $\dot{\tilde{\omega}} = g_0 + \frac{2}{L}\frac{\partial F_1^{**}}{\partial \nu^2} \simeq \dot{\nu}_5, \dot{\nu}_6$, odnosno kada $\dot{\Omega} = -g_0 + \frac{2}{L}\frac{\partial F_1^{**}}{\partial \mu^2} \simeq \dot{\nu}_{16}$.

Premda značaj i efekti sekularnih rezonanci nisu još do kraja istraženi, poklapanje ovih rezonanci sa prazninama u raspodeli malih planeta u faznom prostoru elemenata kretanja jasno ukazuje na njihov sigurno nemali uticaj. Takođe, neka najnovija istraživanja (Scholl, 1987; Yoshikawa, 1988) pokazuju da i unutar sekularnih rezonanci postoje strukture slične onima

kod rezonanci u srednjem kretanju, sa haotičnim zonama nestabilnog kretanja, specifičnim tipovima putanja, itd.

Pomenimo na kraju, da ćemo se i ovim pitanjima još vraćati kasnije, i to kako u vezi analize tačnosti rezultata, tako i u okviru diskusije o primenljivosti Yuasa-ine teorije u rezonantnim i njima bliskim oblastima.



Slika 4. Najvažnije sekularne rezonance prema Williams-u (preuzeto iz *Gradie et al., 1979*).

4. TEORIJE KRETANJA VELIKIH PLANETA

4.1 Pregled novijih doprinosa

Već smo konstatovali da je teorija sekularnih promena elemenata kretanja velikih planeta *Brouwer*-a i *Van Woerkom*-a (1950) od svog objavljivanja pa do danas bila praktično jedina koja je korišćena pri određivanju sopstvenih elemenata malih planeta. Njena apriorna ograničenja, međutim, te greške i nedoslednosti u njenom izvođenju, koje smo takođe već pominjali, ukazuju na potrebu da se, u cilju postizanja veće tačnosti sopstvenih elemenata malih planeta, opredelimo za neku savremeniju i bolju teoriju. Neophodno je, stoga, sagledati i kritički uporediti raspoloživa nova dostignuća, gde pod novim podrazumevamo ona koja su ostvarena u poslednjih, recimo, dvadesetak godina.

Navedimo zato, radi upoređenja, da su *Brouwer* i *Van Woerkom* u svojoj teoriji uzeli u obzir članove funkcije poremećaja prvog reda po poremećajnoj masi i drugog stepena u ekscentričnosti i nagibu, kao i neke rezonantne članove drugog reda i maksimalno šestog stepena, primenjene samo u slučaju para ekscentričnost - longituda perihela.

Sharaf i *Boudnikova* (1967) ponovili su izračunavanja *Brouwer*-a i *Van Woerkom*-a odstranivši pri tom iz njihovih rezultata neke, mada ne i najznačajnije greške. *Anolik et al.* (1969) su zatim proširili rešenje prvog reda na članove četvrtog stepena, dok su *Krasinsky* i *Pius* (1971) u obzir uzeli sve članove prvog reda do zaključno osmog stepena. *Bretagnon* (1974) je u svom rešenju obuhvatio članove do drugog reda i

četvrtog stepena, vodeći računa i o kratko-periodičnim članovima koji u drugom redu po masi daju sekularne efekte. Sa radom *Brumberga et al.* (1975), koji su uključili članove prvog reda do šestog stepena, a za par Jupiter - Saturn do osmog stepena, te članove drugog reda i drugog stepena, mogli bismo zaključiti listu radova koji, premda sami po sebi predstavljaju značajne doprinose, ne predstavljaju bitno unapređenje sa aspekta teorije kretanja malih planeta. Za ovu teoriju, naime, tačnost putanjskih elemenata Jupitera i Saturna u dugim vremenskim intervalima je od najveće važnosti, tako da je, napr., rezonantni član drugog reda i šestog stepena, koji smo pomenuli u prethodnom odeljku(a koji su *Brouwer* i *Van Woerkom* uzeli u obzir), značajniji od većine članova prvog reda i četvrtog stepena.

Drugačija je, srećom, situacija sa najnovijim numeričkim, semianalitičkim i analitičkim rešenjima, čija tačnost uveliko prevazilazi tačnost teorije *Brouwer*-a i *Van Woerkom*-a. Već smo pominjali teoriju *Duriez*-a (1979), koji je dao rešenje za četiri spoljne velike planete uzimajući u obzir članove do drugog reda i šestog stepena (za Jupiter - Saturn do osmog) za sistem ekscentričnost - longituda perihela, odnosno drugog reda i četvrtog stepena (za Jupiter - Saturn opet do osmog) za nagib - longitudu čvora. Pomenimo, dalje, semianalitička rešenja data u obliku polinoma po vremenu kao VSOP82 (Bretagnon, 1982) sa poremećajima razvijenim do trećeg reda po masi, a za četiri spoljne planete čak do šestog reda, TOP82 (Simon, 1983) sa poremećajima do trećeg reda po masi za četiri spoljne planete i do sedmog reda za par Jupiter - Saturn, ili JASON84 (Simon and

Bretagnon, 1984), koje dalje razvija rešenje za par Jupiter - Saturn i unapređuje njegovu tačnost. Opšta osobina ovih rešenja je, međutim, da ona doduše zaista dostižu izuzetno visoku preciznost, ali je njihova važnost ograničena na period od svega nekoliko hiljada godina.

Bretagnon (1984) je, zatim, popravio frekvencije svog ranijeg rešenja (Bretagnon, 1974) usklađujući ih sa VSOP82 rešenjem i uključujući relativističke popravke i poremećajno dejstvo Meseca. Konačno, u već pomenutoj seriji radova *Laskar* (1984, 1985, 1986, 1988) je razvio opštu teoriju koja, u suštini, predstavlja proširenje *Duriez*-ovog rešenja na osam planeta. Teorija je drugog reda po masi i šestog stepena i po ekscentričnosti i po nagibu, pri čemu ni jedan član koji figuriše u sekularnom sistemu nije zanemaren, a za svaki koeficijent je data ocena njegove tačnosti. Ova teorija je bez sumnje najbolja kojom raspolažemo u ovom trenutku i zbog toga je i u ovoj tezi usvojena kao osnov za izračunavanje sopstvenih elemenata kretanja malih planeta.

U zaključku ovog odeljka pomenimo kratko i sasvim nedavnu pojavu tzv. sintetičke teorije kretanja velikih planeta (Milani et al., 1987; Carpino et al., 1987), razvijene putem kombinacije numeričke integracije putanja velikih planeta u periodu od 9,3 miliona godina i *Fourier*-ove analize tako dobijenih varijacija elemenata kretanja. Kako je, međutim, ovo potencijalno visoko tačno rešenje, još uvek u fazi preliminarnih analiza i provera, za sada ga, na žalost, još uvek ne možemo primeniti sa potpunim pouzdanjem i potrebnom sigurnošću.

4.2 Koordinatni sistemi, elementi i konstante planetskog kretanja

Rekli smo već u više navrata da se pri izučavanju kretanja malih planeta na osnovu Yuasa-ine teorije, kretanje velikih, poremećajnih planeta, od kojih se neposredno uzimaju u obzir samo Jupiter i Saturn, smatra poznatim. Zato je, dakle, potrebno unapred odabrati elemente kretanja velikih planeta, odnosno veličine koje opisuju njihove dugo-periodične promene, i izvesti neophodne parametre, koji zatim kao poznate konstante ulaze u račun poremećaja malih planeta. Pri tom se mora imati u vidu da su sve jednačine u Yuasa-inoj teoriji izražene u odnosu na fiksni koordinatni sistem, pa stoga prvo treba odlučiti koju ravan i pravac usvojiti za osnovnu ravan i osnovni pravac koordinatnog sistema. Yuasa, naravno, u principu predvida korišćenje invarijabilne ravni, no mi ćemo u ovoj tezi ipak koristiti ekliptički koordinatni sistem, ili preciznije ekliptiku i ekvinokcij za standardnu epohu 1950.0 (JD 2433282.423) pri određivanju kratko-periodičnih poremećaja, odnosno 2000.0 (JD 2451545.0) za dugo-periodične (ako drugačije nije naglašeno). Ovaj izbor nas oslobađa svođenja na invarijabilnu ravan elemenata kretanja malih planeta i konstanata planetskog kretanja već datih u ekliptičkom sistemu, a ne utiče na tačnost naših izvođenja i analiza. Određivanje sopstvenih elemenata kretanja malih planeta vrši se, naime, na osnovu diskretnog skupa oskulatornih elemenata za određenu epohu, ekliptiku i ekvinokcij, a i mi ćemo za sve testove tačnosti i ispitivanje pouzdanosti rešenja u dužim vremenskim intervalima koristiti uglavnom jednostavne pokazatelje. Što se

tiče prelaza sa ekliptike i ekvinokcija za 1950.0 na iste za 2000.0, koji treba obaviti u međuvremenu, to ne predstavlja poseban problem, jer se precesija za taj relativno kratki vremenski interval može precizno odrediti i lako uzeti u obzir.

Račun kratko-periodičnih poremećaja elemenata kretanja malih planeta zahteva poznavanje <u>oskulatornih</u> elemenata kretanja velikih planeta, čije poremećajno dejstvo uzimamo u obzir, i to, naravno, za istu epohu za koju su dati elementi malih planeta. Jedna od poslednjih lista oskulatornih elemenata malih planeta, sa ukupno 3495 ulaza, koju distribuira Centar za male planete u SAD, data je, kao uostalom i odgovarajuća lista u *lenjingradskim Efemeridama* malih planeta za 1987.godinu, za epohu 24.07.1987. (JD 2447000.5) i ekliptiku i ekvinokcij 1950.0. Kako su u Efemeridama, počev upravo od 1987. godine, dati i odgovarajući oskulatorni elementi velikih planeta, prirodno je da smo ove usvojili i ovde i koristili ih za eliminisanje kratko-periodičnih poremećaja.

U Tabeli 1., dakle, dati su oskulatorni elementi Jupitera i Saturna, kao i njihove recipročne mase, izražene u jedinicama mase Sunca i usvojene od strane Međunarodne astronomske unije 1976. godine, koje smo koristili u našim računima.

Što se tiče dugo-periodičnih poremećaja, međutim, stvari su nešto složenije. Već smo pominjali sistem jedinica koji je odabrao Yuasa u cilju pojednostavljenja jednačina i računa i u kojem su velika poluosa a'_5 i srednje kretanje n'_5 Jupitera, zatim Gauss-ova konstanta G_o, te zbir masa Sunca i Jupitera $(M_\odot + m'_5)$ jednaki jedinici. U tom sistemu jedinica vremena iznosi *približno 1.88778 godina.*

Tabela 1. Oskulatorni elementi Jupitera i Saturna za epohu 24. 07. 1987. i ekliptiku i ekvinokcij 1950.0.

	Jupiter	Saturn
1/m'	1047.355	3498.5
M	1°.14030	166°.43468
ω	274°.91103	337°.75789
Ω	100°.04473	113°.13056
i	1°.30638	2°.48842
e	0.0481377	0.0534763
a [AJ]	5.2028765	9.5341968

Pošto u ovoj tezi koristimo *Laskar*-ovu opštu teoriju kretanja velikih planeta, to smo konkretne podatke za naše račune uzeli iz njegovog najnovijeg rada (Laskar, 1988; Tabele 10 i 11). Treba, međutim, imati u vidu dve stvari: prvo, za frekvenciju g_{55} člana koji izražava poremećajno dejstvo Saturna na Jupiter, usvojena je, po preporuci samog autora, umesto vrednosti 27.9606 "/god. izvedene u teoriji, vrednost 28.2344 "/god. dobijena metodom diferencijalne korekcije na bazi poređenja sa rešenjem VSOP82 (Bretagnon, 1982), i drugo, zbog različito definisanih promenljivih koje se javljaju u teorijama *Laskar*-a i *Yuasa*-e, izvršeno je neophodno usklađivanje vrednosti konstanata iz *Laskar*-ove teorije tako da odgovaraju Yuasa-inoj definiciji promenljivih. *Laskar*, naime, svoje rešenje izvodi za promenljive:

$$z = e' \exp(\sqrt{-1}\ \tilde{\omega}') \ ; \quad \zeta = \sin \frac{I'}{2} \exp\ (\sqrt{-1}\ \Omega') \qquad (4.1)$$

dok su odgovarajuće promenljive u Yuasa-inoj teoriji p', q', r', s' date u trigonometrijskoj formi i definisane jednačinama (3.114). Štaviše, i ove poslednje bi zapravo trebalo da budu usklađene sa definicijama (3.113) za *Poincaré*-ove promenljive, što nije teško postići, jer se razlike definicija svode samo na predznake i amplitude. I dok razlike u predznacima i njima odgovarajuće razlike kvadranata početnih faza jednostavno treba imati u vidu i uzeti u obzir pri formiranju liste konstanata planetskog kretanja, za amplitude je potrebno izvršiti određene, istina male, korekcije (Yuasa, kao što smo videli, ove korekcije nije izvršio). Kako je, na osnovu (3.123) i (3.132) napr. $p/L^{1/2}$ linearna funkcija amplituda planetskih članova ν_{jl}, to sledi:

$$\frac{p}{L^{1/2}} = \left\{2\left[1 - \left(1 - e^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right\}^{\frac{1}{2}} \cos\tilde{\omega} \simeq \left\{2\left[1 - 1 + \frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{8}\right]\right\} \cos\tilde{\omega} =$$

$$= e\left(1 + \frac{e^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\tilde{\omega} \qquad (4.2)$$

Da bismo, dakle, iz redova za promenljivu z u (4.1) dobili nama potrebne vrednosti ν_{jl}, moraju se odgovarajuće amplitude pomnožiti faktorom $\left(1 + \frac{e^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ (= 1.000294).

Slično tome:

$$\frac{r}{L^{1/2}} = \left[2\left(1 - e^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \cos i\right)\right]^{\frac{1}{2}} \cos\Omega = 2 \sin\frac{i}{2}\left(1 - e^2\right)^{\frac{1}{4}} \cos\Omega \qquad (4.3)$$

što za korektivni faktor daje $2\left(1 - e^2\right)^{\frac{1}{4}}$ (= 1.998823).

Konačne, tako korigovane vrednosti amplituda, frekvencija (u rad/1.88778 god.) i faza (rad) planetskih članova, koje kao poznate konstante ulaze u račun dugo-periodičnih poremećaja elemenata kretanja malih planeta, date su u Tabeli 2.

Tabela 2. Korigovane konstante planetskog kretanja koje se koriste u računu poremećaja malih planeta.

$\nu_{55} = 0.04414346$	$\mu_{55} = 0.02753295$
$\nu_{56} = -0.01575083$	$\mu_{56} = -0.00629250$
$g_{55} = 0.0000388874315$	$f_{55} = 0$
$g_{56} = 0.0002584077856$	$f_{56} = -0.0002409782968$
$\lambda_{55} = 0.53456018$	$\delta_{55} = 1.87774719$
$\lambda_{56} = 2.20607759$	$\delta_{56} = 2.22975404$

Poslednja veličina za koju se treba opredeliti je srednja velika poluosa Jupitera, pomoću koje se vrši normalizovanje svih rastojanja u Yuasa-inom sistemu jedinica. Jednu od najtačnijih vrednosti za ovu veličinu nudi *Bretagnon*-ovo rešenje VSOP82, pa kako su i ostale konstante iz *Laskar*-ove teorije svedene na ovo rešenje, logično je da se odlučimo za *Bretagnon*-ovu vrednost, koja za epohu 24.07.1987., te ekliptiku i ekvinokcij 2000.0 iznosi $a'_5 = 5.20260317$ AJ.

5. REZULTATI

5.1 Laplace-ovi, LeVerrier-ovi i Yuasa-ini koeficijenti

Videli smo da u (3.96), (3.104), (3.111), itd. na desnim stranama ovih izraza figurišu veličine $(1)^{(i)}$, $(2)^{(i)}$, $(11)^{(i)}$, ..., $(1)_{\alpha}^{(i)}$, ..., za koje smo rekli da predstavljaju linearne kombinacije *Laplace*-ovih koeficijenata i da su, stoga, funkcije samo odnosa velikih poluosa male planete i poremećajne velike planete $\alpha = a/a'$. Nazvaćemo ove veličine *LeVerrier*-ovi koeficijenti, jer ih je on radi jednostavnosti i skraćenog pisanja prvi uveo u svom već više puta pominjanom razvoju funkcije poremećaja u red (LeVerrier, 1855). Ukupno se u Hamiltonijanu (3.96) javlja 65 raznih *LeVerrier*-ovih koeficijenata koji ulaze u račun kratko-periodičnih poremećaja, dok se približno polovina od tog broja upotrebljava dalje i u računu dugo-periodičnih poremećaja. Ne ulazeći ovde mnogo u detalje jednostavnih algebarskih manipulacija koje je potrebno izvršiti da bi se izveli konačni izrazi za *LeVerrier*-ove koeficijente, navešćemo u svojstvu primera izraze za nekoliko ovih koeficijenata i njihovih izvoda po velikoj poluosi a:

$$(1)^{(i)} = \frac{1}{2a'} b^{(i)}$$

$$(2)^{(i)} = \frac{1}{a'}\left[-2i^2 b^{(i)} + b_1^{(i)} + \frac{1}{2} b_2^{(i)}\right]$$

$$(11)^{(i)} = -\frac{1}{4}\frac{\alpha}{a'}\left[c^{(i-1)} + c^{(i+1)}\right]$$

$$(17)^{(i)} = \frac{3}{16}\frac{\alpha^2}{a'}\left[e^{(i-2)} + 4e^{(i)} + e^{(i+2)}\right]$$

$$(22)^{(i)} = \frac{1}{a'}\left[(-i - 7i^2 - 14i^3 - 8i^4)b^{(i)} + (3 + 9i + 6i^2)b_1^{(i)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}(-3 + 9i + 8i^2)b_2^{(i)} - 3b_3^{(i)} - \frac{1}{2}b_4^{(i)}\right]$$

$$(1)_\alpha^{(i)} = \frac{1}{2aa'}b_1^{(i)}$$

$$(2)_\alpha^{(i)} = \frac{1}{aa'}\left[(1 - 2i^2)b_1^{(i)} + 2b_2^{(i)} + \frac{1}{2}b_3^{(i)}\right] \qquad (5.1)$$

Laplace-ovi koeficijenti i njihovi izvodi koji se ovde javljaju, definisani su jednačinama (3.18)-(3.21), s tim što je kod *LeVerrier*-a $b^{(i)} = b_{1/2}^{(i)}$; $c^{(i)} = b_{3/2}^{(i)}$; $e^{(i)} = b_{5/2}^{(i)}$; ...., a $b_1^{(i)}$, $b_2^{(i)}$, $c_1^{(i)}$, ... predstavljaju prve, druge, itd. izvode odgovarajućih koeficijenata po velikoj poluosi. Podsetimo da i predstavlja celobrojni parametar po kojem se vrši sumiranje ($|i| \leq 15$). U praktičnom radu *Laplace*-ovi koeficijenti $b^{(0)}$ i $b^{(1)}$ određivani su iz (3.19), s tim što su u obzir uzimani članovi do zaključno tridesetog stepena po α, dok su svi ostali koeficijenti izvedeni iz ova dva osnovna pomoću niza veza i rekurentnih relacija (LeVerrier, 1856). U Tabeli 3. date su u svojstvu primera vrednosti nekih *Laplace*-ovih koeficijenata i njihovih izvoda za $i \in [0,15]$ i $\alpha = 0.58$ (ovu vrednost odnosa velikih poluosa koristio je *Yuasa* u svom radu, pa ćemo i ovde radi lakšeg poređenja neke rezultate dati takođe za isto α). U Tabeli 4. date su, slično tome, vrednosti nekih *LeVerrier*-ovih koeficijenata.

Yuasa-ini koeficijenti A_1, ..., A_6, B_1, ..., B_{31} lako se izračunavaju na osnovu veza datih, kako je već rečeno, u

Tabela 3. *Laplace-ovi koeficijenti za* $\alpha = 0.58$.

i	$b^{(i)}$	$c^{(i)}$	$b_1^{(i)}$	$b_2^{(i)}$	$b_a^{(i)}$	$c_1^{(i)}$
0	2.210108	4.932456	0.531535	1.127743	3.037808	10.802664
1	0.673713	3.777264	0.916439	1.027946	3.181708	11.070755
2	0.298183	2.609306	0.716676	1.353827	3.196543	9.965678
3	0.145416	1.720829	0.498263	1.389368	3.729072	8.184596
4	0.074205	1.105003	0.329537	1.229466	4.122656	6.315537
5	0.038880	0.697311	0.211928	0.994639	4.140062	4.662769
6	0.020727	0.434664	0.133858	0.758532	3.822739	3.331945
7	0.011186	0.268478	0.083488	0.554932	3.304443	2.322125
8	0.006092	0.164662	0.051589	0.393697	2.713534	1.586714
9	0.003341	0.100421	0.031649	0.272790	2.140092	1.067046
10	0.001843	0.060961	0.019305	0.185518	1.633888	0.708204
11	0.001021	0.036864	0.011721	0.124270	1.214948	0.464900
12	0.000568	0.022218	0.007088	0.082221	0.883458	0.302363
13	0.000317	0.013349	0.004271	0.053845	0.630681	0.195128
14	0.000178	0.007993	0.002563	0.034993	0.442151	0.125146
15	0.000100	0.004762	0.001530	0.022635	0.305135	0.079971

Tabeli 1. u njegovom radu. Brojne vrednosti ovih koeficijenata dobijene u ovoj tezi u punoj su saglasnosti sa Yuasa-inim vrednostima, što se može, bar u jednom broju slučajeva, lako proveriti na osnovu podataka iz Tabele 4. Kod koeficijenata D_1, ..., D_6 drugog reda (tačnije D_1, D_3, D_5, D_6, jer se, u stvari, samo oni koriste u računu dugo-periodičnih poremećaja), stvari, međutim, stoje drugačije. Greške i propusti ustanovljeni u Yuasa-inoj jednačini (34) doveli su i do razlika između brojnih vrednosti koje je dao Yuasa i onih koje smo ovde dobili iz (3.111). U Tabeli 5. upoređene su vrednosti koeficijenata D_1, D_3, D_5, D_6, s tim što su za naše rezultate još posebno

Tabela 4. *LeVerrier*-ovi koeficijenti za $\alpha = 0.58$.

i	$(1)^{(i)}$	$(2)^{(i)}$	$(22)^{(i)}$	$(1)_a^{(i)}$	$(2)_a^{(i)}$
-15	0.000050	-0.032283	-18.276316	0.001319	-0.843257
-14	0.000089	-0.049669	-24.183160	0.002210	-1.226158
-13	0.000159	-0.076060	-31.449849	0.003682	-1.752024
-12	0.000284	-0.115466	-39.982217	0.006110	-2.462100
-11	0.000511	-0.173326	-49.403768	0.010104	-3.394334
-10	0.000922	-0.256565	-58.969884	0.016643	-4.575491
-9	0.001671	-0.373272	-67.444014	0.027284	-5.999765
-8	0.003046	-0.531349	-73.098949	0.044473	-7.599310
-7	0.005593	-0.735255	-73.917969	0.071973	-9.200476
-6	0.010363	-0.979213	-68.165772	0.115395	-10.474973
-5	0.019440	-1.234736	-55.441580	0.182697	-10.905451
-4	0.037103	-1.430290	-38.075657	0.284084	-9.819658
-3	0.072708	-1.424541	-22.022203	0.429537	-6.598619
-2	0.149092	-0.991875	-14.988584	0.617824	-1.225531
-1	0.336857	0.082985	-18.159536	0.790034	4.707424
0	1.105054	1.095407	-15.782461	0.458220	7.424010
1	0.336857	0.082985	-12.623518	0.790034	4.707424
2	0.149092	-0.991875	-32.805112	0.617824	-1.225531
3	0.072708	-1.424541	-68.410060	0.429537	-6.598619
4	0.037103	-1.430290	-103.657227	0.284084	-9.819658
5	0.019440	-1.234736	-128.076942	0.182697	-10.905451
6	0.010363	-0.979213	-138.353440	0.115395	-10.474973
7	0.005593	-0.735255	-136.022823	0.071973	-9.200476
8	0.003046	-0.531349	-124.757492	0.044473	-7.599310
9	0.001671	-0.373272	-108.486850	0.027284	-5.999765
10	0.000922	-0.256565	-90.443304	0.016643	-4.575491
11	0.000511	-0.173326	-72.868837	0.010104	-3.394334
12	0.000284	-0.115466	-57.080709	0.006110	-2.462100
13	0.000159	-0.076060	-43.679023	0.003682	-1.752024
14	0.000089	-0.049669	-32.799890	0.002210	-1.226158
15	0.000050	-0.032283	-24.288014	0.001319	-0.843257

iskazani doprinosi glavnog i indirektnog dela funkcije poremećaja.

Tabela 5. Yuasa-ini koeficijenti drugog reda za $\alpha = 0.58$.

	Yuasa	Knežević	Glavni	Indirektni
D_1	47.05460	47.32872	48.67998	-1.35126
D_3	6.72816	6.73106	2.59292	4.13814
D_5	-14.01263	-13.46212	-5.18583	-8.27628
D_6	-19.86710	-43.58465	-141.09638	97.51173

Kao što se može videti, razlike koeficijenata D_1 i D_3 su praktično zanemarljive, kod D_5 je razlika samo nešto malo veća, ali je zato kod D_6 zaista znatna i očigledno od bitnog uticaja na tačnost konačnih rezultata, što ćemo nešto kasnije i pokazati na jednom primeru.

Interesantno je ovde pomenuti da je *Kozai* (1979c), u svom radu posvećenom familijama malih planeta, objavio tabelu (Tabela I) sekularnih frekvencija perihela i čvora u funkciji velike poluose, izračunatih na osnovu *Yuasa*-ine teorije, gde je uključio efekte Zemlje, Marsa, Jupitera i Saturna u prvom redu po masi, odnosno samo Jupitera u drugom redu po masi. Frekvencije, definisane *Yuasa*-inim rešenjima (3.132) i izrazima (3.131), *Kozai* je predstavio u obliku $A + Be^2 + C\sin^2 i$ za perihel, odnosno $A' + B'e^2 + C'\sin^2 i$ za čvor (usvajajući, očigledno, $e \simeq \nu$; $\sin i \simeq \mu$). Koeficijente drugog reda označio je sa D i D' i uključio ih u A, odnosno A'. Poređenja radi, dao

je i sekularne frekvencije b izvedene pomoću klasične, linearne teorije. Veliku poluosu izrazio je, naravno, u astronomskim jedinicama, a koeficijente A, B, ..., D' u "/god.

U tabeli su se, međutim, *Kozai*-u potkrale ozbiljne greške, na koje ćemo ovde ukazati, da bismo zatim dali novu tabelu sa tačnim vrednostima koeficijenata, ali uzimajući u obzir (u skladu sa Yuasa-inom teorijom) samo Jupiter, poremećen Saturnom.

Prvu grešku *Kozai* je učinio kod koeficijenata $C = B' = m_s'(B_7 + A_8/2)$, gde je svoje vrednosti izračunao sa minusom umesto plusa u binomu na desnoj strani, umanjujući im tako apsolutne vrednosti za više od 10%. Drugu i još značajniju grešku *Kozai* je napravio kod koeficijenata drugog reda D i D', koji odgovaraju našim D_1 i D_8. Kao što smo već objasnili, u sistemu jedinica koji je usvojio Yuasa, jedinica vremena iznosi 1.88778 god., a frekvencije se izražavaju u rad/1.88778 god. Da bismo, dakle, frekvenciju izrazili u uobičajenim "/god., potrebno je izvršiti pretvaranje jedinica pomoću faktora $180/\pi \cdot 3600/1.88778$. *Kozai* je, međutim, iz nekog razloga,, za pretvaranje koristio faktor $180/\pi \cdot 3600/1.88778^2$ (!), pa su mu tako sve brojne vrednosti koeficijenata D i D' približno dvostruko manje od tačnih vrednosti.

U Tabeli 6., koja je analogna pomenutoj *Kozai*-jevoj Tabeli I, date su tačne vrednosti svih koeficijenata, s tim što je frekvencija izvedena pomoću linearne teorije označena uobičajenim g_o. Pored razlika brojnih vrednosti koje su posledica opisanih grešaka u *Kozai*-jevom računu, javljaju se, naročito na manjim vrednostima velike poluose, značajne razlike

Tabela 6. Sekularne frekvencije perihela i čvora u funkciji velike poluose ["/god.].

a	g_o	A	B	C = B′	A′	C′	D	D′
3.60	155.02	184.69	497.86	-2007.45	-164.27	926.22	29.19	-8.65
3.55	144.68	179.03	419.54	-1756.66	-154.40	805.99	33.90	-9.15
3.50	135.25	174.14	354.21	-1542.74	-145.60	703.75	38.48	-9.83
3.45	126.61	175.38	299.50	-1359.46	-138.06	616.43	48.38	-10.96
3.40	118.68	193.89	253.55	-1201.77	-132.35	541.55	74.85	-13.21
3.35	111.39	286.36	214.82	-1065.57	-130.74	477.09	174.64	-18.92
3.30	104.67	1598.23	182.08	-947.48	-155.15	421.41	1493.25	-50.09
3.25	98.45	1211.71	154.35	-844.73	-60.90	373.14	1112.96	37.94
3.20	92.70	222.49	130.79	-755.03	-81.98	331.16	129.52	11.08
3.15	87.36	135.22	110.74	-676.46	-82.05	294.55	47.60	5.65
3.10	82.40	107.70	93.64	-607.45	-79.30	262.52	25.06	3.42
3.05	77.79	93.76	79.04	-546.64	-75.84	234.43	15.75	2.24
3.00	73.48	84.68	66.55	-492.92	-72.21	209.72	11.00	1.55
2.95	69.46	77.87	55.85	-445.34	-68.62	187.94	8.22	1.11
2.90	65.69	72.33	46.68	-403.08	-65.13	168.69	6.45	0.81
2.85	62.17	67.60	38.81	-365.47	-61.80	151.65	5.27	0.61
2.80	58.86	63.45	32.06	-331.90	-58.63	136.52	4.44	0.46
2.75	55.75	59.77	26.27	-301.89	-55.61	123.07	3.88	0.36
2.70	52.83	56.48	21.29	-274.99	-52.76	111.08	3.52	0.28
2.65	50.07	53.57	17.03	-250.84	-50.05	100.38	3.38	0.23
2.60	47.48	51.18	13.37	-229.11	-47.48	90.81	3.60	0.19
2.55	45.03	50.11	10.23	-209.52	-45.02	82.25	5.00	0.19
2.50	42.71	-418.96	7.56	-191.82	-51.65	74.56	-461.75	-8.75
2.45	40.52	38.58	5.27	-175.82	-40.69	67.65	-1.99	0.02
2.40	38.44	37.96	3.32	-161.31	-38.60	61.43	-0.52	0.03
2.35	36.47	36.38	1.67	-148.14	-36.65	55.83	-0.11	0.03
2.30	34.61	34.64	0.28	-136.17	-34.83	50.78	0.05	0.03
2.25	32.83	32.88	-0.90	-125.26	-33.17	46.22	0.12	0.02
2.20	31.15	31.11	-1.87	-115.32	-31.82	42.09	0.14	0.02
2.15	29.54	29.10	-2.69	-106.24	-32.48	38.35	0.15	0.02
2.10	28.01	21.92	-3.35	-97.93	-124.62	34.96	0.15	0.01
2.05	26.56	-20.97	-3.89	-90.32	5.45	31.88	0.14	0.01
2.00	25.17	23.72	-4.32	-83.35	-24.47	29.09	0.13	0.01
1.95	23.85	23.72	-4.65	-76.94	-23.86	26.55	0.12	0.01
1.90	22.58	22.64	-4.90	-71.05	-22.65	24.23	0.10	0.01
1.85	21.37	21.47	-5.08	-65.62	-21.45	22.13	0.09	0.00
1.80	20.22	20.33	-5.19	-60.63	-20.29	20.20	0.08	0.00

proistekle iz činjenice da je Kozai, u cilju što preciznijeg određivanja frekvencije malih planeta u oblasti unutar glavnog prstena, proširio okvire Yuasa-ine teorije i uzeo u obzir uticaje Zemlje i Marsa. Tako su, napr., vrednosti njegovih A i

A' za a = 1.95 AJ znatno veće po apsolutnoj vrednosti od naših, jer uključuju snažne prinudne oscilacije izazvane sekulárnom rezonancom s Marsom; koeficijenti *B* i *C'* za velike poluose *a* < 1.95 AJ drugačije se menjaju, itd.

5.2 Kratko-periodični poremećaji

Eliminisanje kratko-periodičnih poremećaja i određivanje srednjih elemenata kretanja malih planeta u okviru Yuasa-ine teorije vrši se, kao što smo pokazali, pomoću jednačina (3.101), gde je generatrisa S_4 sa svim članovima iz glavnog i indirektnog dela funkcije poremećaja do zaključno četvrtog stepena u ekscentričnosti i nagibu data sa (3.104), i u kojima se izvodi po *Delaunay*-evim momentima određuju preko (3.110). Jedan primer tipičnog izlaza iz ove procedure prikazan je u Tabeli 7., u kojoj su radi upoređenja dati polazni oskulatorni elementi i rezultujući srednji elementi za prvih 25 numerisanih malih planeta. Lako se može utvrditi da su, u skladu sa očekivanjima, veličina poremećaja i njihov relativni značaj proporcionalni položaju male planete u glavnom prstenu i da, u pravilu, veće poremećaje trpe objekti bliži Jupiteru, zatim oni koji se nalaze u neposrednoj blizini rezonanci u srednjem kretanju i sl. U svakom slučaju, već i iz ovog malog uzorka može se zaključiti da su kratko-periodični poremećaji uglavnom dovoljno veliki da ih svakako treba uzimati u obzir prilikom izvođenja sopstvenih elemenata malih planeta.

Pouzdanost Yuasa-ine procedure eliminisanja kratko-periodičnih poremećaja i tačnost izvedenih srednjih elemenata ne može se direktno odrediti. Jasno je, s druge strane, da

Tabela 7. Oskulatorni i srednji elementi malih planeta.

No	M	ω	Ω	i	e	a
1	114°.84110	72°.25577	80°.03877	10°.60638	.0783549	2.7660676
		72.13338	80.07242	10.59639	.0778596	2.7670927
2	102.76624	309.82937	172.64279	34.80152	.2339951	2.7719664
		310.26986	172.68947	34.84612	.2330977	2.7705522
3	294.39008	246.86321	169.87984	13.00436	.2582769	2.6678762
		247.26014	169.76674	12.99269	.2568815	2.6694033
4	185.64865	150.44170	103.37263	7.14094	.0905112	2.3606659
		150.03513	103.42286	7.13889	.0892928	2.3615132
5	36.88734	356.52589	141.14627	5.36082	.1909920	2.5754824
		357.07515	141.20459	5.35483	.1888872	2.5762668
6	300.27227	238.68057	138.38891	14.78631	.2021706	2.4245143
		238.73807	138.38953	14.76649	.2025089	2.4252827
7	278.20581	144.91414	259.34766	5.51301	.2296491	2.3855029
		144.77092	259.29218	5.51367	.2301391	2.3861082
8	294.69208	285.00949	110.50440	5.89020	.1566114	2.2009840
		284.87149	110.49724	5.88898	.1564878	2.2013989
9	57.32261	4.97883	68.48567	5.58332	.1216851	2.3866299
		5.24076	68.52479	5.58125	.1224882	2.3864261
10	250.70300	316.45437	283.06773	3.83863	.1198966	3.1353905
		315.26292	283.25485	3.83453	.1124366	3.1422408
11	184.53125	193.66409	125.07888	4.62502	.0999911	2.4521990
		194.63206	125.08179	4.63361	.1009577	2.4522366
12	168.38924	68.82732	235.13563	8.37942	.2201410	2.3335028
		69.12128	235.09058	8.37280	.2198887	2.3342612
13	302.48598	80.72353	42.75550	16.51924	.0861999	2.5759917
		79.64841	42.89844	16.51707	.0864410	2.5763199
14	298.58538	95.12505	86.21560	9.11268	.1655777	2.5862488
		95.87103	86.11430	9.12068	.1644507	2.5875806
15	144.73628	97.30863	292.91836	11.75886	.1850393	2.6447013
		97.26520	292.91247	11.74672	.1867458	2.6436775
16	161.30818	227.25911	149.88171	3.09454	.1338453	2.9243840
		227.53392	149.94618	3.09557	.1368757	2.9221637
17	238.52567	135.87582	125.04751	5.59031	.1374942	2.4686126
		137.38656	125.05565	5.60514	.1334673	2.4710222
18	220.63284	227.43704	150.06173	10.13874	.2180635	2.2959543
		227.46167	150.04533	10.13663	.2181022	2.2956265
19	81.49723	181.77813	210.94094	1.57407	.1583294	2.4416627
		181.85398	210.90118	1.56915	.1577805	2.4419876
20	301.44506	254.95503	206.03632	.70660	.1442781	2.4095547
		255.76317	205.91379	.70592	.1438634	2.4086113
21	216.84311	249.48964	80.45079	3.06900	.1610753	2.4363134
		249.24339	80.51470	3.07008	.1625770	2.4352301
22	54.33417	355.12145	65.81391	13.69670	.0979513	2.9101048
		355.63249	65.84877	13.71607	.1005690	2.9098337
23	172.59796	59.38933	66.69464	10.15417	.2310936	2.6277960
		59.56133	66.70905	10.14327	.2324008	2.6278532
24	87.16484	110.65614	35.70144	.75825	.1342630	3.1290823
		109.98022	35.79309	.75821	.1276394	3.1342886
25	337.68327	90.46470	213.70485	21.58911	.2540143	2.4009142
		90.11639	213.77807	21.59468	.2548405	2.4003514

procene zasnovane na "magnitudi prvog zanemarenog člana razvoja" najčešće nisu naročito pouzdane, a videli smo na primeru velike nejednakosti Urana i Neptuna da, naprotiv, mogu da budu itekako varljive. Stoga, indirektni metod ocene tačnosti srednjih elemenata putem poređenja rezultata dobijenih na dva različita, međusobno potpuno nezavisna načina, koji su u jednom od nedavno objavljenih radova primenili *Knežević et al.* (1988), izgleda da je najbolji, a možda i jedini mogući metod za postizanje ovog cilja.

Osnovni zadatak analize *Kneževića et al.* bio je zapravo pokušaj ocene tačnosti srednjih elemenata malih planeta i njihove stabilnosti u dugim vremenskim intervalima, a sa stanovišta činjenice da oni predstavljaju važnu kariku u procesu određivanja sopstvenih elemenata - parametara klasifikacije malih planeta u familije. Zato je u rečenom radu pažnja koncentrisana uglavnom samo na srednju veliku poluosu, ekscentričnost i nagib, a za testove i eksperimente su korišćene male planete 8 *Flora*, 24 *Themis*, 158 *Koronis* i 221 *Eos*, naravno, jer su to prvootkriveni i najveći članovi četiri poznate *Hirayama*-ine familije. Ovakav pristup je očigledno u punom skladu sa idejom koju sprovodimo i u ovoj tezi, pa kako su u pomenutom radu detaljno opisani i metod i brojni eksperimenti preduzeti u cilju što celovitijeg i preciznijeg analiziranja raznih nijansi problema, ovde ćemo preneti i u izvesnoj meri dopuniti i potkrepiti samo neke od najvažnijih tamo opisanih rezultata i zaključaka.

Kada je bilo potrebno i moguće ispitivanje tačnosti srednjih elemenata provesti za neki duži vremenski interval,

Knežević et al. su rezultate dobijene pomoću Yuasa-ine analitičke procedure eliminisanja kratko-periodičnih poremećaja upoređivali sa rezultatima dobijenim pomoću numeričkog filtriranja, kojim su amplitude svih oscilacija sa periodima kraćim od 100 god. umanjene za približno faktor 300 (Carpino et al., 1986). U ostalim slučajevima, jednostavno numeričko izravnanje vršeno metodom pokretne srednje vrednosti pokazalo se sasvim dovoljnim za efikasno i precizno eliminisanje kratko-periodičnih oscilacija i određivanje referentnih krivih promene srednjih elemenata. Jedino je za procenu tačnosti određivanja srednje (≡ sopstvene) velike poluose, kojoj je i inače posvećena posebna pažnja, jer ona predstavlja konačan rezultat direktno primenjiv u klasifikaciji malih planeta u familije, bilo dovoljno jednostavno odrediti rezidualna odstupanja od konstantne vrednosti, jer su, kao što je poznato, dugo-periodične promene velike poluose, sem ako se mala planeta ne kreće po nekoj netipičnoj putanji, zaista veoma male i praktično sasvim zanemarljive.

Za konkretan rad su, radi jednostavnosti, korišćena dva modela Sunčevog sistema raznih stepena aproksimacije - jedan do krajnosti pojednostavljen model 3 tela, sa poremećajnom planetom (Jupiter) koja se kreće po fiksnoj eliptičnoj putanji u ravni koordinatnog sistema (sa ekscentričnošću $e' = 0.06$ bliskom maksimalno mogućoj, a odabranom upravo tako da bi i poremećaji bili najveći), i drugi, nešto složeniji model 4 tela, sa Jupiterom i Saturnom kao poremećajnim telima. Time se, naime, htelo istražiti dve stvari: da li tačnost rezultata i u kojoj meri zavisi od usvojenog modela, odnosno, koja se

maksimalna tačnost može postići pomoću Yuasa-ine procedure, ako se model prilagodi okvirima i dosegu teorije (drugim rečima, ako se sva poremećajna tela u sistemu uzmu u obzir).

Recimo odmah da se pokazalo da, sve dok se "sve" uzima u obzir, rezultati ni u kom pogledu ne zavise od modela u okviru kojeg se vrši izračunavanje, a to znači da se, u principu, i u realnom slučaju prostim sabiranjem kratko-periodičnih poremećaja proizvedenih od strane svih velikih planeta, može postići praktično ista maksimalna tačnost srednjih elemenata, kao i u ovim pojednostavljenim modelima (ovo sabiranje, međutim, ima smisla samo dok su poremećaji veći od *a priori* zanemarenih Jupiterovih poremećaja šestog stepena).

Pomenimo još da su numeričke integracije u slučaju 3 tela vršene pomoću *Burlisch-Stoer* metode, a u slučaju 4 tela korišćenjem *Everhart*-ovog (1985) programa. Dugo-periodična stabilnost srednjih elemenata praćena je u vremenskim rasponima od 10^4 - 10^5 god., s tim što se uvek nastojalo da se integracijom pokrije bar jedan period revolucije perihela, odnosno čvora. Polazeći od tako dobijenih oskulatornih elemenata, analitički metod, koji se primenjuje na diskretan set oskulatornih elemenata za datu epohu, uzastopno je primenjivan u okviru obuhvaćenog intervala, sa korakom koji je biran tako da se uz minimalan utrošak računskog vremena dobije optimalna količina informacija.

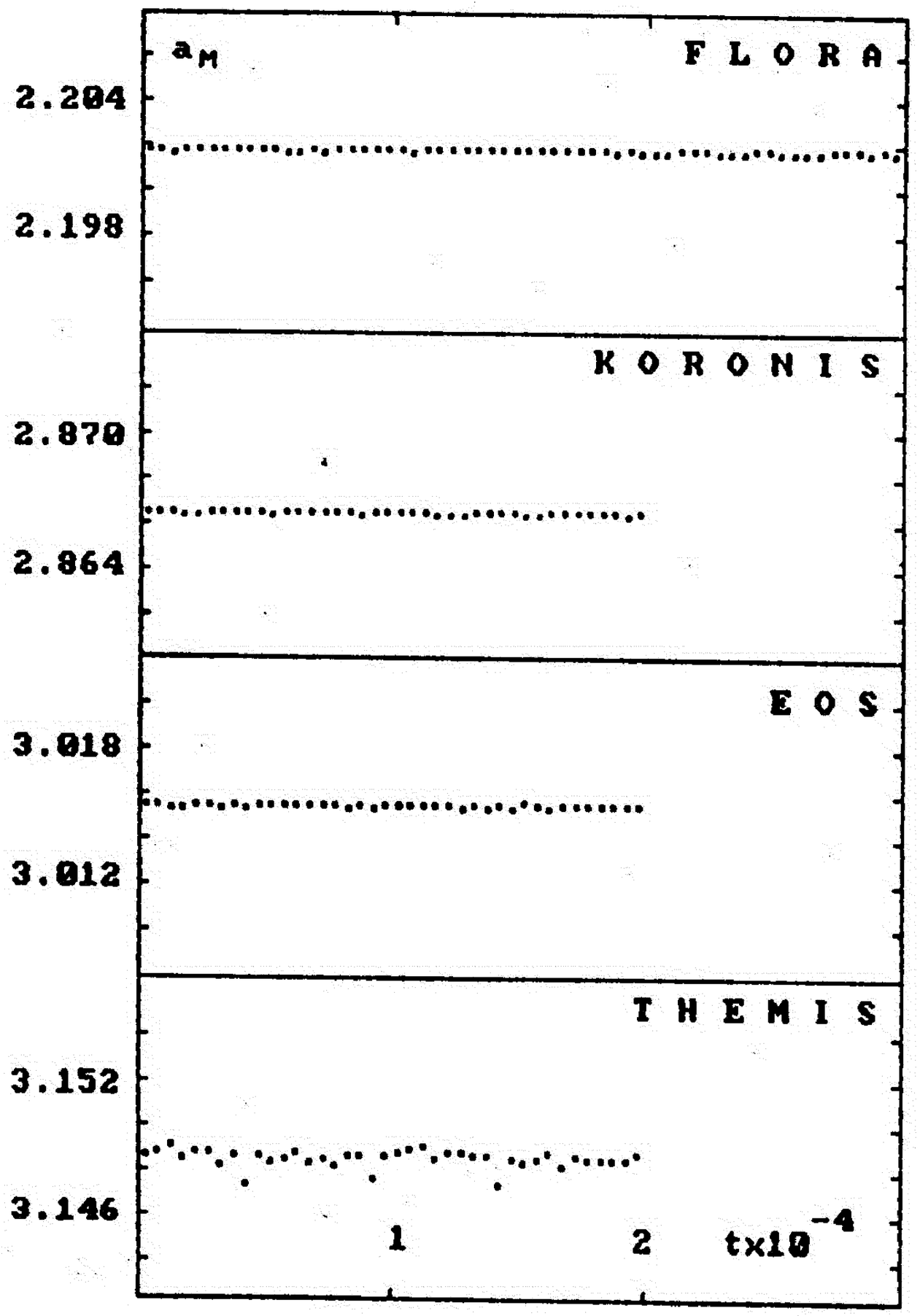
Zaključimo, konačno, ove uvodne napomene konstatacijom da su razlike srednjih ekscentričnosti, odnosno nagiba precizni indikatori tačnosti obe metode pomoću kojih je vršeno eliminisanje kratko-periodičnih poremećaja. No, kako su

primenjeni numerički postupci konceptualno jednostavniji i potencijalno tačniji (mada i daleko zahtevniji u pogledu računskog vremena), podaci izvedeni numeričkim putem uzeti su za referentne, a razlike srednjih elemenata dobijenih analitički i numerički su jednostavno u celosti pripisane nesavršenosti analitičke procedure (što, naravno, ne znači da su numeričke metode savršeno pouzdane i da se i kod njih ne susrećemo sa izvesnim suptilnim nepreciznostima i problemima).

5.2.1 Slučaj tri tela

Rezultati određivanja srednjih velikih poluosa pomoću *Yuasa*-ine analitičke procedure, za glavne članove četiri najveće *Hirayama*-ine familije, u ograničenom, eliptičkom problemu tri tela prikazani su na Slici 5.; radi upoređenja, odgovarajuće promene oskulatornih elemenata predstavljene su u Tabeli 8. svojim ukupnim varijacijama, definisanim jednostavno kao razlike najvećih i najmanjih vrednosti u datom vremenskom intervalu. Podaci za *Floru* pokrivaju oko 75% perioda revolucije njene putanje, ali su zato za *Themis* prikazani rezultati za dve pune revolucije.

Očigledno, odmah se može zaključiti da su rezultati u vrlo dobroj saglasnosti sa očekivanjem. Odstupanja dobijenih srednjih velikih poluosa od odgovarajuće konstantne vrednosti za *Floru*, *Koronis* i *Eos* su reda veličine nekoliko desethiljaditih AJ, što svedoči o sposobnosti primenjene analitičke procedure da kod ovih malih planeta efikasno ukloni sve najvažnije kratko- periodične poremećaje i obezbedi srednje velike poluose visoke tačnosti. Ako imamo u vidu da se za



Slika 5. Varijacije srednjih velikih poluosa, izvedenih pomoću analitičke procedure, za glavne članove četiri najveće *Hirayama*-ine familije (slučaj tri tela). Vreme je dato u *Keplerovim* godinama, a rastojanje između dve uzastopne tačke na grafiku iznosi ~ 500 god.

Tabela 8. Opsezi promena oskulatornih velikih poluosa; slučaj tri tela.

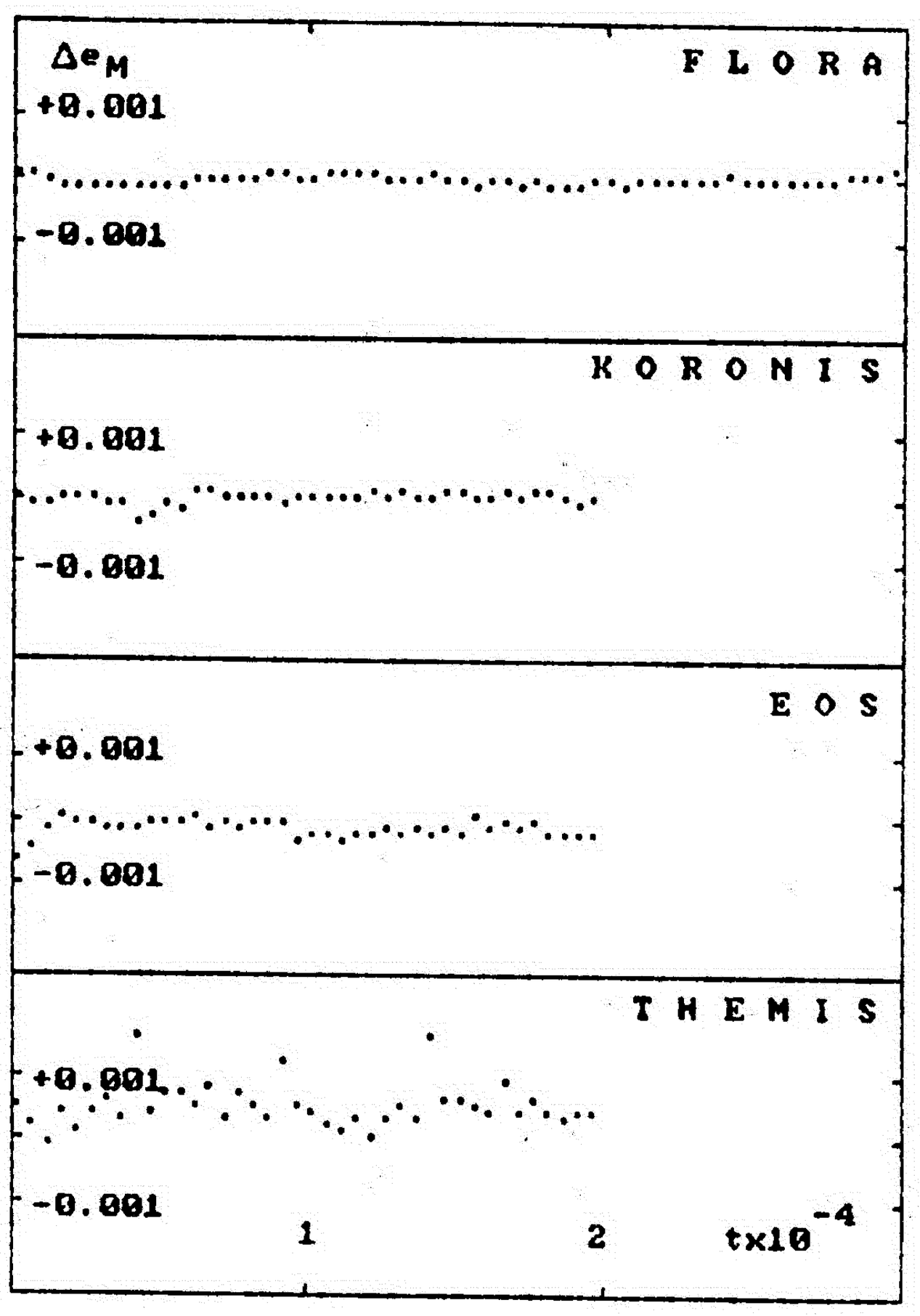
Mala planeta	Opseg [AJ]	
Flora	2.2013-2.2028	(15)
Koronis	2.8645-2.8701	(56)
Eos	3.0120-3.0206	(135)
Themis	3.1243-3.1522	(279)

potrebe klasifikacije malih planeta u familije obično zahteva tačnost reda $\Delta a/a \leq 10^{-2}$, može se reći da su dobijeni rezultati i u tom smislu sasvim zadovoljavajući. Istovremeno, obzirom da se visoki nivo tačnosti rezultata održao kroz ceo ispitani interval vremena, slobodno se može zaključiti da će srednje velike poluose određene za neku konkretnu epohu predstavljati pouzdane ocene istih za bilo koji drugi trenutak (ili, u najmanju ruku, za relativno dug vremenski period).

Slučaj *Themisa* je očigledno nešto složeniji. Zbog blizine snažne 2:1 rezonance, koja se nalazi na 3.28 AJ, kratko-periodične varijacije oskulatorne velike poluose ove male planete dostižu skoro 0.03 AJ. Eventualni uticaji rezonanci višeg reda, međutim, kao napr. 15:7, ne mogu se razlučiti, premda postoje ozbiljne indicije (Dermott and Murray, 1981) da u dužim vremenskim intervalima one proizvode uočljive efekte. Tri jasno izdvojene vrednosti, čija se međusobna rastojanja na grafiku poklapaju sa po 58 punih ciklusa od po 86 god. rezonantnog 2:1 člana i koje su za oko $2 \cdot 10^{-3}$ AJ niže od opšteg nivoa, direktna su posledica uticaje te rezonance i u okviru analitičke teorije se očigledno ne mogu u potpunosti eliminisati. Ipak, kako ukupna varijacija srednje velike poluose *Themisa* u posmatranom vremenskom intervalu ne prelazi tih $2 \cdot 10^{-3}$ AJ, konačni ishod primene naše procedure analitičkog izvođenja srednje velike poluose može se i u ovom slučaju smatrati dovoljno dobrim.

Slični se zaključci mogu izvesti i na osnovu analize Slike 6., na kojoj su prikazane razlike srednjih ekscentričnosti izvedenih pomoću analitičke teorije i metode numeričkog

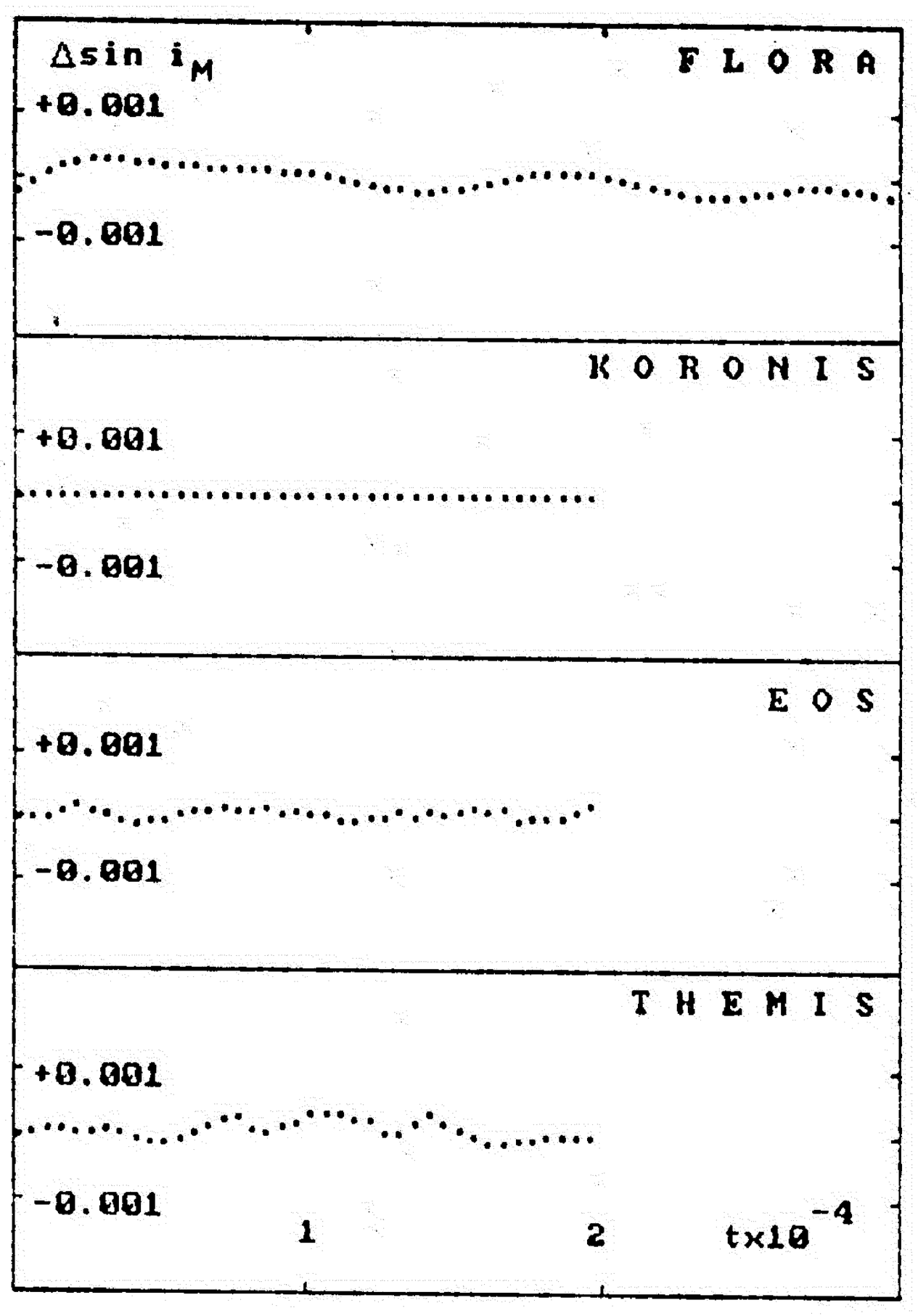
filtriranja. Rezultati za *Floru*, *Koronis*, i *Eos*, koji se nalaze na bezbednoj udaljenosti od rezonanci u srednjem kretanju, vrlo se dobro slažu, dok kod *Themisa*, sem što uočavamo veću disperziju dobijenih razlika i karakteristične "skokove"



Slika 6. Razlike analitički i numerički određenih srednjih ekscentričnosti (slučaj tri tela).

uzrokovane rezonantnom oscilacijom, imamo i sistematski pomak razlika u smislu nešto većih analitičkih srednjih ekscentričnosti (što bi se moglo pripisati npr. nedovoljno preciznoj vrednosti konstantnog člana koji se izvodi u okviru numeričkog postupka). Poznato je, međutim, da je ekscentričnost element znatno "podložniji" poremećajima nego npr. nagib i da

zato zahteva poseban tretman u analitičkim teorijama. Slaganje rezultata dobijenih pomoću dve nezavisne metode može se, stoga, smatrati veoma dobrim; čak i u slučaju *Themisa* tačnost srednjih ekscentričnosti je u sasvim prihvatljivim granicama s obzirom na zahteve procedure za klasifikovanje malih planeta u familije. Dugo-periodičnu stabilnost i pouzdanost rezultata, s druge strane, i ovde dokazuje činjenica da se visoki stepen saglasnosti nezavisno dobijenih srednjih ekscentričnosti u svim istraženim slučajevima održao kroz ceo ispitani period.



Slika 7. Razlike analitički i numerički određenih srednjih (sinusa) nagiba (slučaj tri tela).

Što se tiče nagiba, Slika 7. pokazuje da se i njihove srednje vrednosti dobijene analitički i numerički izvanredno dobro slažu, ovoga puta, kako se moglo i pretpostaviti, i u slučaju *Themisa*.

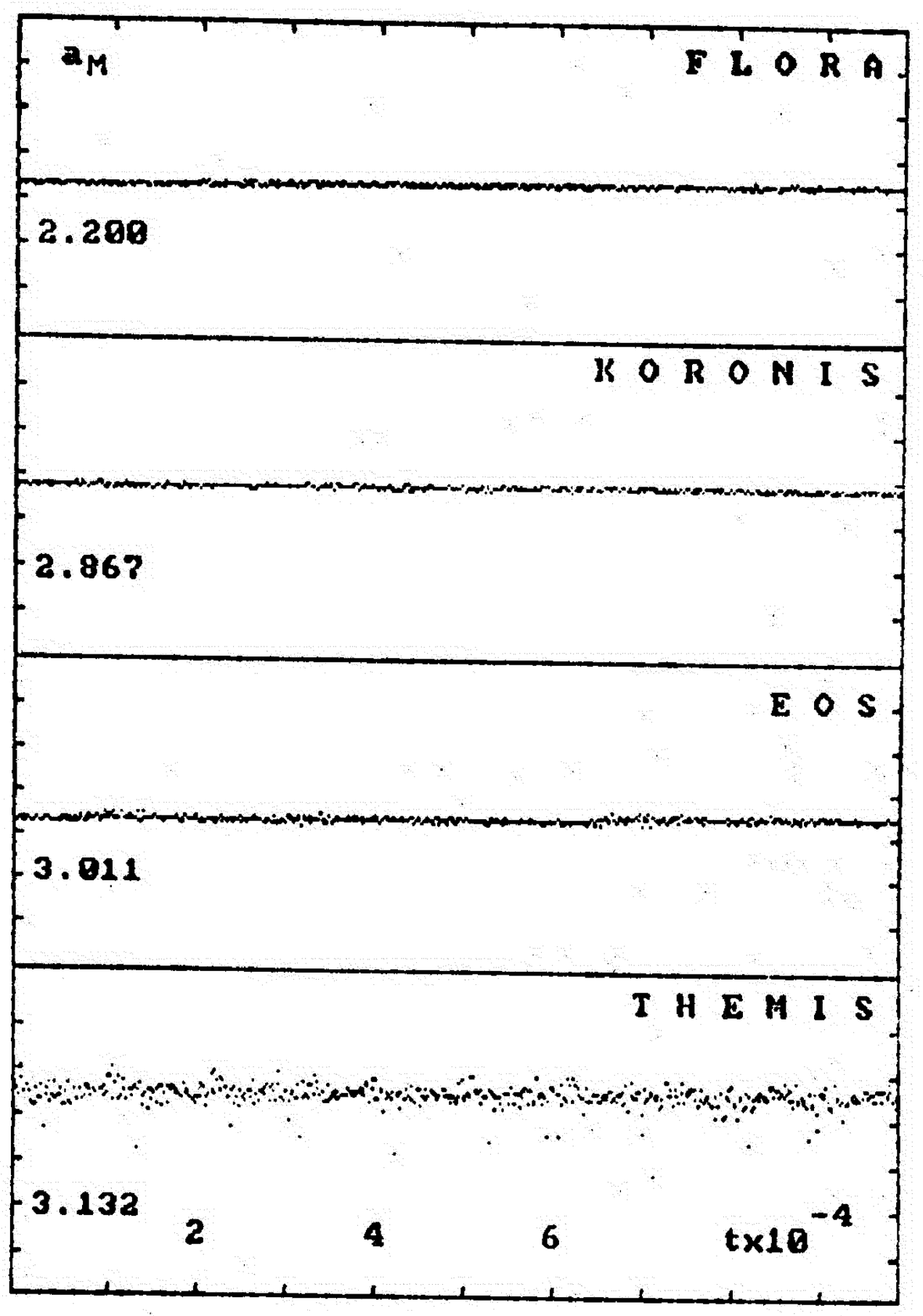
Napomenimo da ni kod jednog ispitanog srednjeg elementa nismo zapazili nikakvu uočljivu zavisnost tačnosti rezultata izvedenih na osnovu analitičke teorije od veličine oskulatorne ekscentričnosti, odnosno nagiba koji se koriste pri njihovom određivanju. To, naravno, znači da je u slučaju tri tela za male i umerene ekscentričnosti i nagibe greška zbog zanemarivanja članova funkcije poremećaja višeg reda i stepena veoma mala i sa praktičnog stanovišta zanemarljiva. Kako je, međutim, problem ove vrste a *priornih* grešaka od izuzetne važnosti za objekte velikih ekscentričnosti i/ili nagiba, to ćemo ga detaljnije analizirati nešto kasnije.

5.2.2 Slučaj četiri tela

U ovom odeljku prikazani su rezultati određivanja srednjih elemenata za glavne članove četiri najveće *Hirayama*-ine familije u slučaju četiri tela, sa Jupiterom i Saturnom kao poremećajnim planetama. Očigledno, ovaj je model znatno bliži stvarnosti nego prethodni, pojednostavljeni model tri tela, pa se i tačnost srednjih elemenata, koja se postiže u ovom slučaju, može smatrati pouzdanim indikatorom maksimalne tačnosti koja se uopšte može postići analitičkom metodom. Treba, pri tom, još jednom podvući da je i u ovom slučaju integracija putanja vršena u okviru istog modela, te da se, dakle, opet radi o računu kod kojeg se sve poremećajne planete

u modelu uzimaju u obzir u postupku eliminisanja kratkoperiodičnih poremećaja.

U cilju ostvarivanja što celovitijeg uvida u karakteristike kretanja i radi što pouzdanije ocene dugoperiodične stabilnosti dobijenih srednjih elemenata, integracija je u slučaju četiri tela vršena u periodu od čitavih 10^3 god. Pokazalo se, međutim, da se stalno ponavljaju manje-više isti rezultati, da se postignuti visoki stepen tačnosti zadržava kroz ceo ispitani period i da se, zapravo,



Slika 8. Varijacije analitički izvedenih srednjih velikih poluosa za glavne članove četiri najveće *Hirayama*-ine familije (slučaj četiri tela). Jedinica skale na *y*-osi iznosi 10^{-8} AJ, a vremenski interval između tačaka na grafiku je 200 god. Ukupno obuhvaćeni vremenski raspon iznosi 10^8 god.

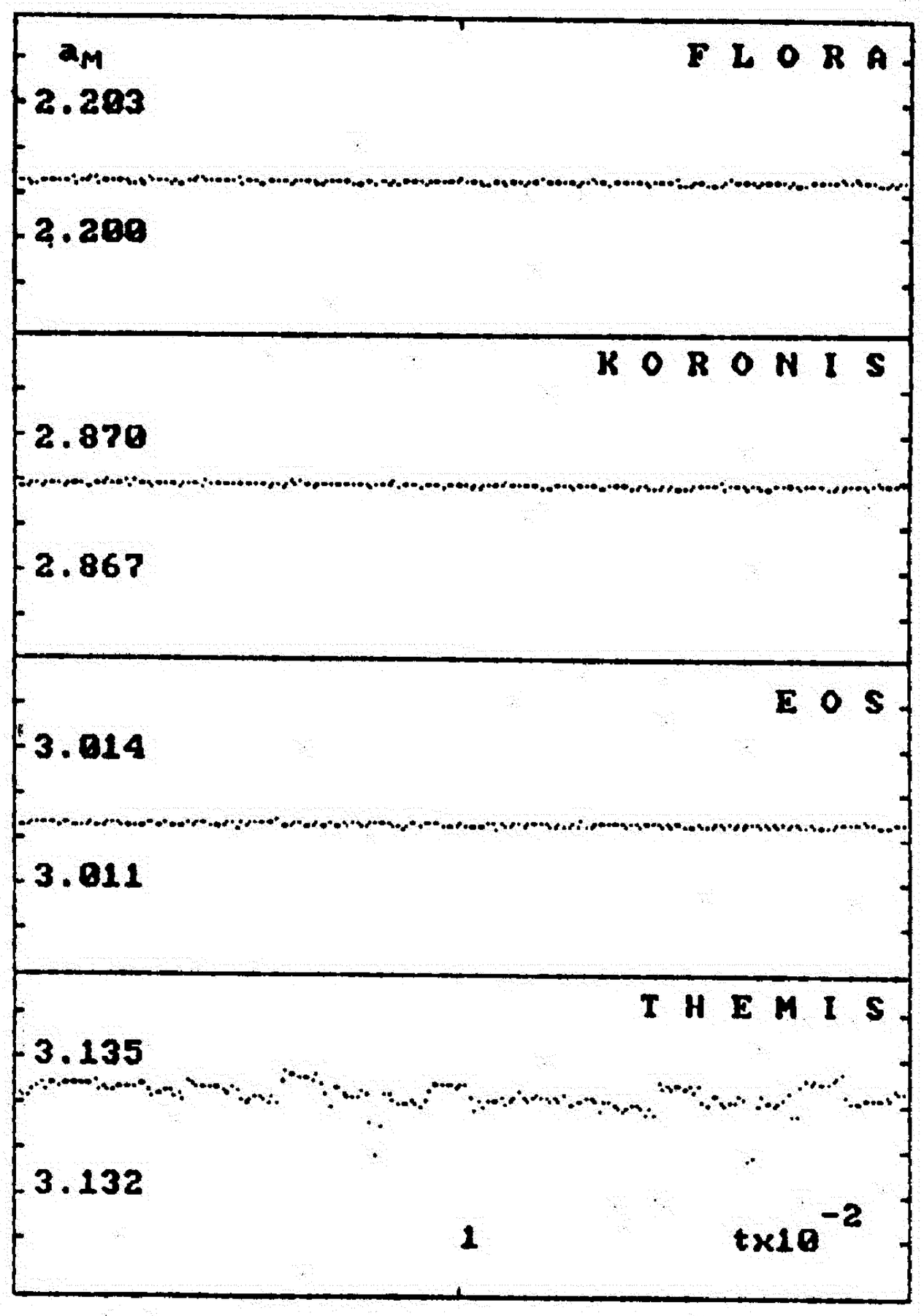
inspekcijom rezultata u nekom relativno kratkom vremenskom intervalu (recimo, nekoliko desetina ili stotina godina) može steći sasvim precizna predodžba o njihovom ponašanju i u daleko dužim intervalima.

Na Slici 8. su prikazane srednje velike poluose naših test-objekata, u periodu od 10^5 god. i sa korakom (vremenskim razmakom između dve uzastopne tačke na grafiku) od 200 godina. Ovaj period, inače, pokriva skoro 2.5 revolucije *Florine* putanje, ali i čitavih 10 za *Themis*. Radi poređenja su odgovarajući ukupni opsezi oskulatornih velikih poluosa dati u Tabeli 9., i premda su ti opsezi, naravno, nešto veći nego u slučaju tri tela, odstupanja srednjih velikih poluosa od konstantne vrednosti su praktično ista, $1\text{-}2\cdot10^{-4}$ AJ za *Floru*, *Koronis* i *Eos*, odnosno $2\cdot10^{-3}$ AJ za *Themis*. Ovo pak, kao što smo već napomenuli, svedoči o tome da je visoka tačnost srednjih elemenata, koja se može postići u okviru analitičke teorije, nezavisna od modela, te da su zaključci izvedeni za slučaj tri tela u potpunosti primenjivi i na ovaj dinamički složeniji model. Mala i konstantna disperzija srednjih velikih poluosa za *Floru*, *Koronis* i *Eos* je ujedno i dokaz da se u oblastima glavnog prstena, u kojima se nalaze ova tri objekta, srednje velike poluose mogu bezbedno koristiti kao parametri za klasifikaciju malih planeta u familije. U slučaju *Themisa*, u istom smislu, povremena nešto veća odstupanja srednje velike poluose ne predstavljaju neki poseban problem, ali se ipak moraju imati u vidu i po potrebi uzimati u obzir.

Da se do istih zaključaka može doći i na osnovu analize rezultata u daleko kraćim vremenskim intervalima, jasno

Tabela 9. Opsezi promena oskulatornih velikih poluosa; slučaj četiri tela.

Mala planeta	Opseg [AJ·10^{-4}]
Flora	17
Koronis	64
Eos	107
Themis	322

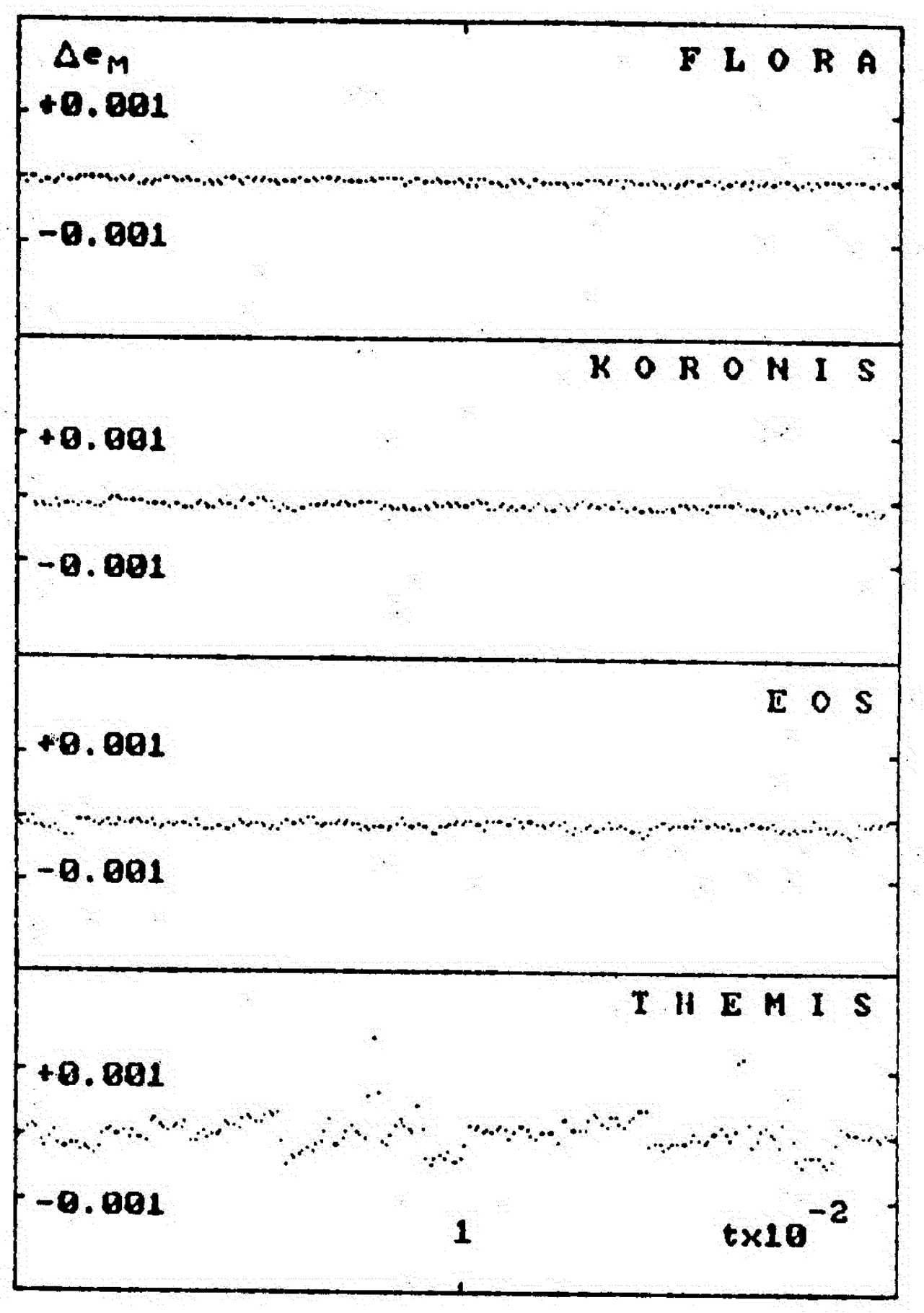


Slika 9. Varijacije srednje velike poluose u slučaju četiri tela, ali za vremenski interval od 200 god.

pokazuje Slika 9. na kojoj su prikazane varijacije srednjih velikih poluosa naše četiri male planete u periodu od samo 200 god., ali sa korakom od 1 god. Za slučaj *Themisa*, koji se i ovde potvrđuje kao najkritičniji, Sliku 9. treba uporediti sa

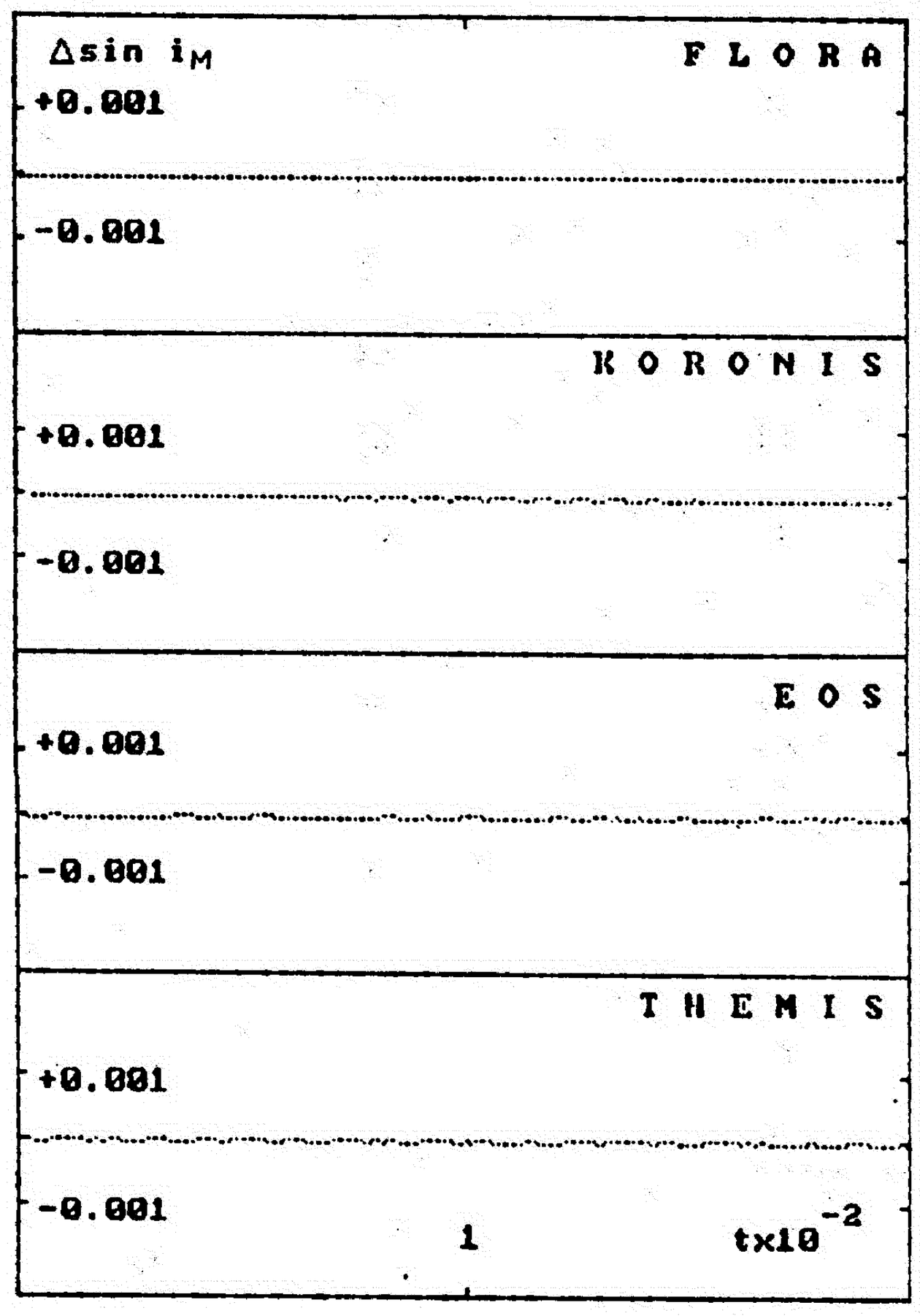
odgovarajućom Slikom 12., na kojoj je (gornji grafik) data varijacija oskulatorne velike poluose za ovu malu planetu (u drugoj razmeri). Poređenje, naime, jasno pokazuje da su kratko-periodične oscilacije svedene na minimum i da srednja velika poluosa predstavlja uistinu daleko pogodniji parametar za potrebe klasifikacije malih planeta u familije, nego što je to do sada uglavnom korišćena oskulatorna velika poluosa.

Kada se govori o rezultatima određivanja srednjih ekscentričnosti i nagiba u slučaju četiri tela, treba imati u vidu da se u periodu od 200 godina dugo-periodične promene ovih



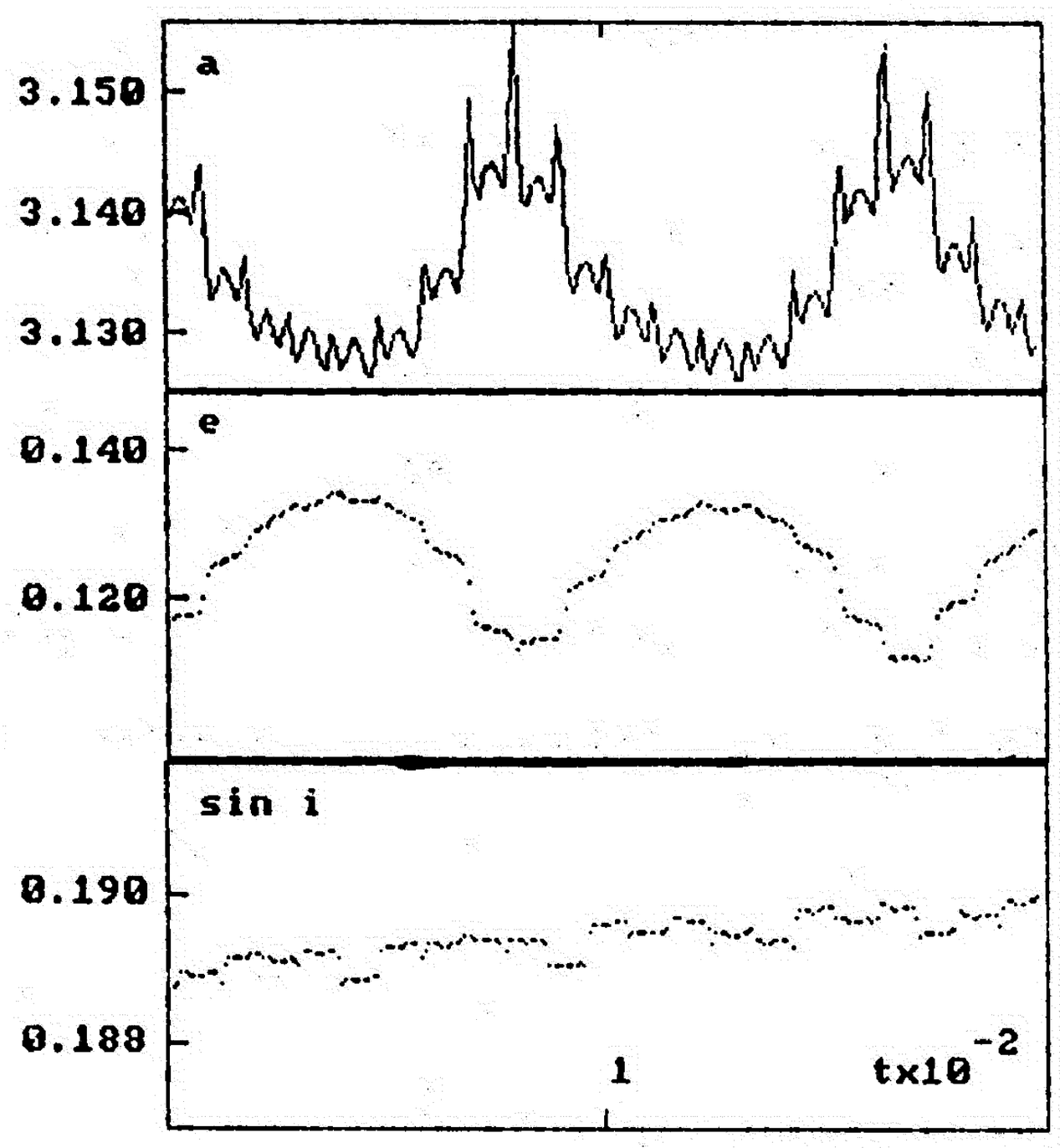
Slika 10. Razlike analitički i numerički određenih srednjih ekscentričnosti (slučaj četiri tela).

elemenata manifestuju uglavnom kao monotoni, skoro linearni trendovi. Otuda je i jednostavna metoda izravnanja kratko-periodičnih oscilacija pomoću pokretne srednje vrednosti sasvim dovoljna za precizno definisanje ovih trendova, odnosno za numeričko određivanje srednjih ekscentričnosti i nagiba. U praksi je u svakom pojedinom slučaju prvo usvojena probna vrednost veličine prozora od 100 god., da bi potom, postepenim prilagođavanjem, bila određena ona veličina koja je u datom slučaju davala najbolje rezultate (za *Themis* je tako konačno usvojena vrednost od 86 god., što odgovara periodu rezonantnog 2:1 člana).



Slika 11. Razlike analitički i numerički određenih srednjih (sinusa) nagiba (slučaj četiri tela).

Na Slici 10. prikazane su razlike analitički i numerički određenih srednjih ekscentričnosti, dok Slika 11. prikazuje razlike srednjih nagiba. Slaganje rezultata dobijenih pomoću dve nezavisne metode je i ovde vrlo dobro, a kod nagiba, reklo bi se, skoro idealno. Radi poređenja, na Slici 12. su date (opet u različitim skalama), odgovarajuće varijacije oskulatorne ekscentričnosti *Themisa* (u sredini), odnosno oskulatornog nagiba *Eosa* (dole), koji predstavljaju u tom smislu "kritične" slučajeve. Naravno, kratko-periodične promene oskulatornih elemenata znatno su veće od promena srednjih elemenata, što ponovo ukazuje na važnost ovih promena i potrebu njihovog prethodnog eliminisanja u postupku izvođenja sopstvenih elemenata, odnosno ponovo i sa drugog aspekta



Slika 12. Oskulatorna velika poluosa (gore) i ekscentričnost (u sredini) *Themisa* i oskulatorni (sinus) nagiba *Eosa* (slučaj četiri tela).

potvrđuje efikasnost analitičke metode upotrebljene za njihovo eliminisanje.

U Tabeli 10. sumirani su opisani rezultati određivanja srednjih elemenata pomoću analitičke teorije i ocenjivanja njihove tačnosti u slučaju četiri tela. Za sve četiri male planete korišćene u ovoj analizi i za sva tri ispitana elementa data su odgovarajuća srednja kvadratska odstupanja oskulatornih i srednjih vrednosti. Analitička procedura umanjuje kratko-periodični šum u varijacijama velikih poluosa i ekscentričnosti za faktor veći od 10; kod nagiba je to umanjenje nešto skromnije, ali treba imati u vidu da su već i same kratko-periodične oscilacije ovog elementa relativno male. Srednja kvadratska odstupanja srednjih elemenata čak ni u najkritičnijem slučaju ne prelaze nekoliko desethiljaditih, tako da, sve u svemu, rezultatima eliminisanja kratko-periodičnih poremećaja i određivanja srednjih elemenata pomoću analitičke teorije Yuasa-e možemo biti potpuno zadovoljni.

Tabela 10. Upoređenje srednjih kvadratskih odstupanja oskulatornih i srednjih elemenata u slučaju četiri tela.

		Flora	Koronis	Eos	Themis
a [AJ]	Osk.	$3.2\cdot10^{-4}$	$1.2\cdot10^{-3}$	$2.2\cdot10^{-3}$	$6.5\cdot10^{-3}$
	Sred.	$2.9\cdot10^{-5}$	$3.0\cdot10^{-5}$	$3.5\cdot10^{-5}$	$2.7\cdot10^{-4}$
e	Osk.	$3.3\cdot10^{-4}$	$1.8\cdot10^{-3}$	$3.0\cdot10^{-3}$	$6.9\cdot10^{-3}$
	Sred.	$3.1\cdot10^{-5}$	$9.8\cdot10^{-5}$	$1.1\cdot10^{-4}$	$2.8\cdot10^{-4}$
sin i	Osk.	$1.8\cdot10^{-5}$	$3.0\cdot10^{-5}$	$1.6\cdot10^{-4}$	$9.1\cdot10^{-5}$
	Sred.	$4.5\cdot10^{-6}$	$8.8\cdot10^{-6}$	$1.3\cdot10^{-5}$	$1.4\cdot10^{-5}$

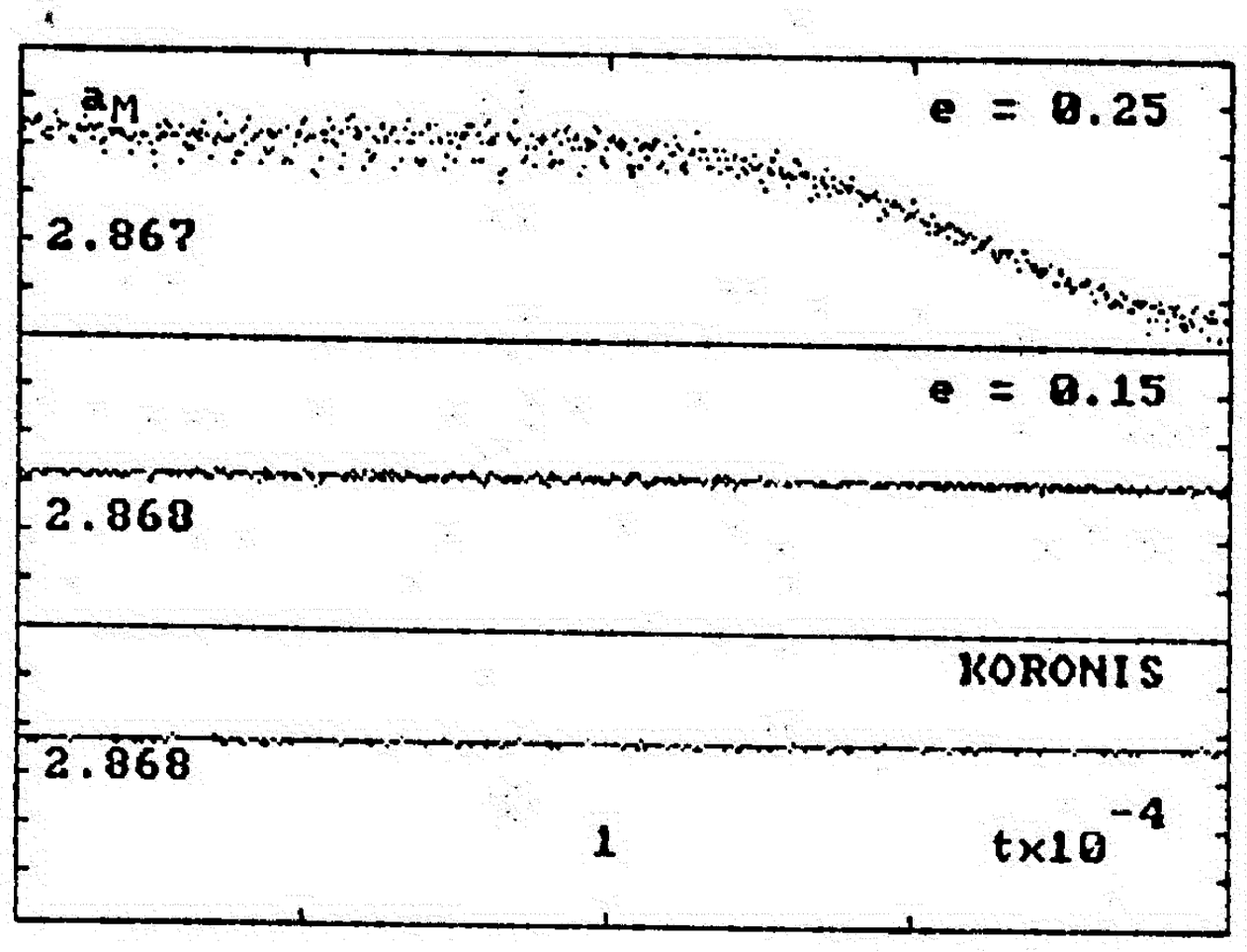
5.2.3 Greške i njihovi izvori

Iako smo se u prethodnim odeljcima uverili da su greške koje se javljaju pri eliminisanju kratko-periodičnih poremećaja i određivanju srednjih elemenata kretanja malih planeta pomoću analitičke teorije *Yuasa*-e uglavnom male, ipak ih je potrebno analizirati i nešto detaljnije; rezultati koje smo opisali odnose se, naime, na svega nekoliko objekata, koji se nalaze uglavnom relativno daleko od rezonanci, malih su ili umerenih ekscentričnosti i nagiba, itd. Pri tom ćemo se, naravno, pozabaviti samo najznačajnijim izvorima grešaka, a najveću pažnju posvetićemo, kao i ranije, greškama srednjih (≡ sopstvenih) velikih poluosa. Rekli smo već da jedan od najvažnijih izvora grešaka u svakoj analitičkoj teoriji sekularnih poremećaja, zasnovanoj na razvoju funkcije poremećaja u red, predstavlja zanemareni deo razvoja, tj. članovi višeg reda i stepena koji se u okviru date teorije ne uzimaju u obzir. Premda, načelno, svaki novi red po poremećajnoj masi, odnosno stepen po ekscentričnosti i nagibu, donosi brzo opadanje vrednosti članova razvoja i ukupnog doprinosa poremećajnom efektu, eventualna blizina rezonanci, kao i velike ekscentričnosti i nagibi mogu zanemareni deo funkcije poremećaja učiniti znatnim i nezanemarljivim u odnosu na deo koji je uzet u obzir. Time se u rezultate unosi određena veća ili manja greška i njihova upotrebljivost sa aspekta interpretacije, odnosno primenjivost u drugim istraživanjima dovodi u pitanje. Konkretno, u našem slučaju dolazi u pitanje primenjivost netačno ili nedovoljno tačno određenih srednjih elemenata u postupku izvođenja sopstvenih elemenata, koji bi

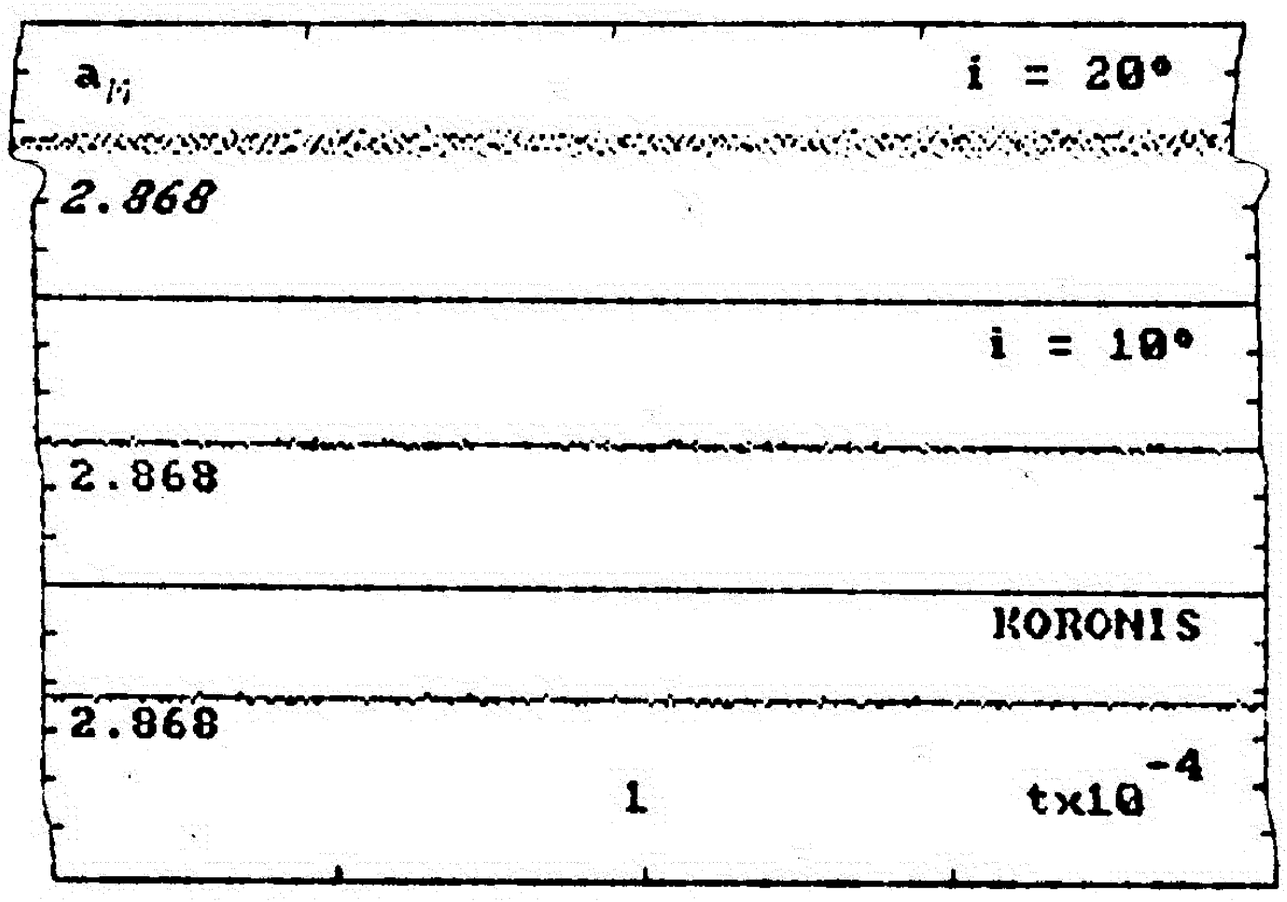
svojim kvalitetom obezbedili pouzdanu klasifikaciju malih planeta u familije.

Karakteristični primeri zavisnosti tačnosti srednjih elemenata, određenih pomoću Yuasa-ine teorije, od veličine ekscentričnosti i nagiba, dati su na Slikama 13. i 14. (napomenimo da su i ovi primeri preuzeti iz pomenutog rada *Kneževića et al.*, 1988). Na obe slike prikazane su varijacije srednjih velikih poluosa male planete 158 *Koronis*, čija putanja ima i malu ekscentričnost i mali nagib, te po dva fiktivna objekta koji imaju sve ostale putanjske elemente identične *Koronisovim*, sem ekscentričnosti (Sl. 13.), odnosno nagiba (Sl. 14.). Oskulatorni elementi dobijeni su numeričkom integracijom u slučaju četiri tela, a prikazani rezultati pokrivaju period od $2 \cdot 10^4$ god.

Na obe slike jasno se uočava porast disperzije srednjih velikih poluosa sa porastom ekscentričnosti, odnosno nagiba,



Slika 13. Varijacije srednje velike poluose *Koronisa* (dole) i dva fiktivna tela koja imaju iste sve početne elemente sem ekscentričnosti (slučaj četiri tela). Jedinica skale na ordinati je 10^{-3} AJ.



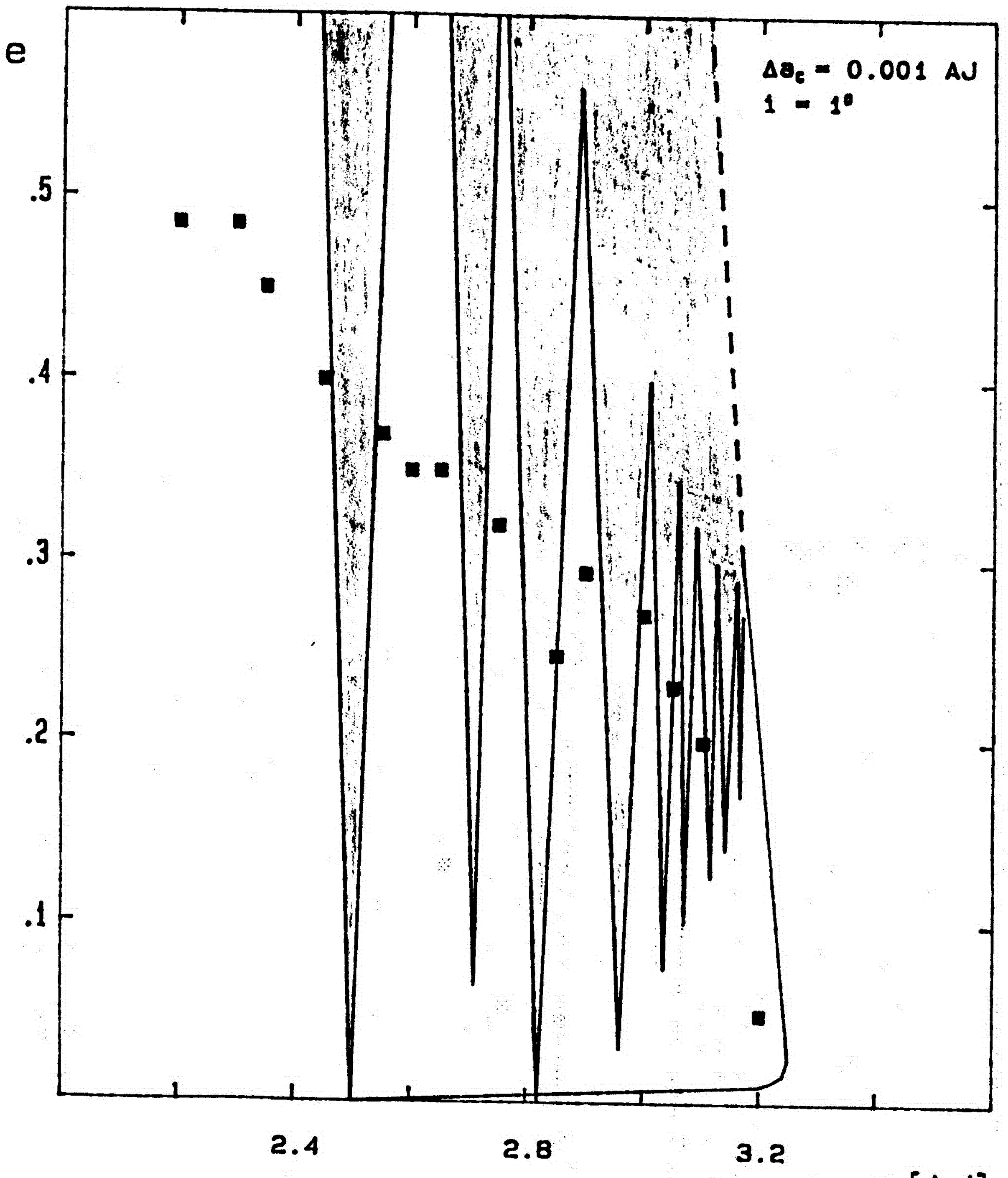
Slika 14. Varijacije srednje velike poluose za *Koronis* (dole) i dva fiktivna tela koja imaju iste sve početne elemente sem nagiba (slučaj četiri tela). Jedinica skale na ordinati je 10^{-4} AJ.

ali i to da do znatnijeg odstupanja od konstantne vrednosti dolazi tek za relativno visoke vrednosti ovih elemenata (podsetimo se da je medijana ekscentričnosti u uzorku numerisanih malih planeta oko 0.16, a nagiba oko 8° - Knežević, 1983). Dugo-periodična oscilacija koja se javlja na Slici 13. za objekat početne ekscentričnosti 0.25, posledica je uticaja rezonance 5:2. Iako se, naime, objekti sa putanjama velikih poluosa od oko 2.87 AJ i umerene ekscentričnosti nalaze dovoljno daleko od ove rezonance, zbog širenja rezonance po velikoj poluosi sa porastom ekscentričnosti (Dermott and Murray, 1983; vidi Sliku 15.), objekat o kojem je reč našao se unutar rezonance, a što ubrzo dovodi do pojave velikih kvazi-periodičnih poremećaja, kao što je i ovaj uočeni.

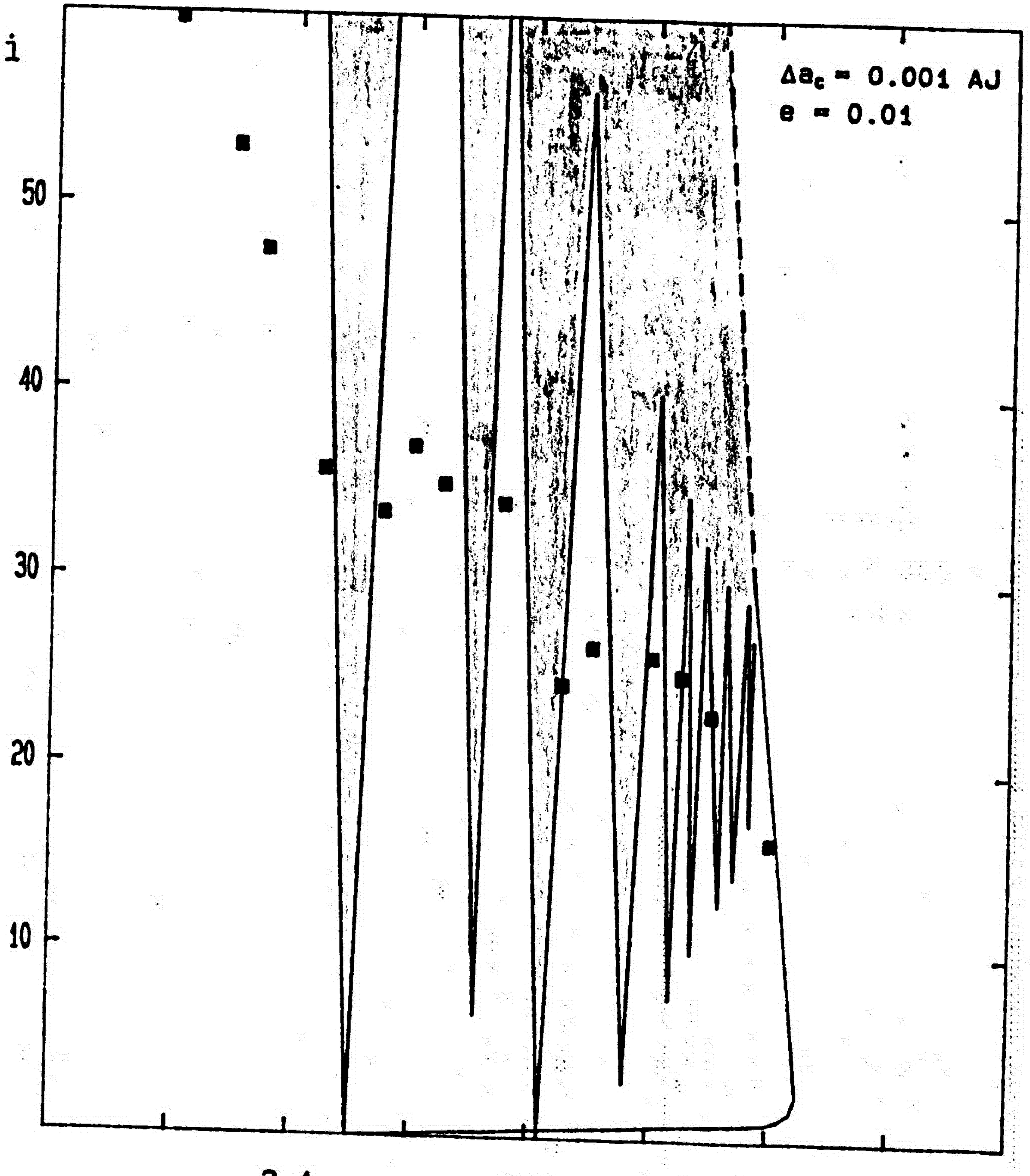
Prirodno se sada nameće pitanje do koliko se, u stvari, velikih ekscentričnosti, odnosno nagiba može ići u okviru date teorije, a da rezultati, u ovom slučaju srednji elementi kretanja malih planeta, budu sigurno bolji od neke unapred

zadate, odnosno potrebne tačnosti. Drugim rečima, treba eksplicitno odrediti granice primenjivosti analitičke teorije, unutar kojih zanemareni deo razvoja funkcije poremećaja ne utiče bitno na krajnji rezultat. Jedan pokušaj određivanja kritičnih vrednosti ekscentričnosti i nagiba, za koje Yuasa-ina teorija daje srednje velike poluose sa tačnošću, merenom preko ukupne varijacije, boljom od 10^{-a} AJ (gde se pod ukupnom varijacijom opet podrazumeva razlika najveće i najmanje vrednosti u posmatranom vremenskom intervalu), učinjen je u radu *Kneževića* i *Jovanovića* (1987), čije ćemo rezultate ovde predstaviti u nešto dopunjenom obliku.

Knežević i *Jovanović* su određivanje kritičnih vrednosti vršili krajnje prosto - metodom probe i greške. Prvo je unutar glavnog prstena malih planeta izabran određen broj različitih vrednosti velike poluose, ali tako da se obavezno nađu između najvažnijih rezonanci u srednjem kretanju. Za svaku odabranu vrednost su zatim definisane fiktivne putanje male početne ekscentričnosti (0.01) i velikog nagiba, te proizvoljnih ostalih elemenata. Putanje su numerički integralјene u slučaju četiri tela i u intervalu od 500 god., da bi iz tako dobijenih oskulatornih elemenata, za ceo interval, a na svakih 365 dana, bili pomoću Yuasa-ine teorije izvedeni odgovarajući srednji elementi. Ako bi nađena ukupna varijacija srednje velike poluose za datu putanju bila manja ili veća od 10^{-a} AJ, čitava procedura se ponavljala, ali sa većom, odnosno manjom vrednošću početnog nagiba, i tako sve dok sa nekom početnom vrednošću nagiba ne bismo dobili ukupnu varijaciju dovoljno blisku usvojenom pragu tačnosti. Ta vrednost nagiba je onda usvojena



Slika 15. Kritične vrednosti oskulatorne ekscentričnosti iznad kojih ukupna varijacija srednje velike poluose prelazi 10^{-3} AJ. Pune linije označavaju libracione širine koje odgovaraju članu razvoja funkcije poremećaja sa kvadratom ekscentričnosti (preuzeto iz *Dermott* i *Murray*, 1983) i koje približno odgovaraju *Kirkwood*-ovim prazninama u (a,e) ravni.



Slika 16. Kritične vrednosti oskulatornog nagiba iznad kojih ukupna varijacija velike poluose prelazi 10^{-3} AJ. Libracione širine odgovaraju *Kirkwood*-ovim prazninama u (a,i) ravni.

kao kritična za datu veliku poluosu.

Na potpuno isti način su nalažene i kritične vrednosti ekscentričnosti, samo su inicijalne, fiktivne putanje uvek imale isti mali nagib (1°), a ekscentričnost im je menjana sve dok se ne bi našla ona za koju je ukupna varijacija srednje velike poluose imala predviđenu vrednost.

Rezultati opisanog određivanja kritičnih ekscentričnosti i nagiba prikazani su na Slikama 15. i 16., a razlika ovde datih rezultata i onih publikovanih u pomenutom radu *Kneževića* i *Jovanovića* je u tome, što su u tom radu predstavljeni rezultati za samo 9 vrednosti velike poluose, dok ih ovde imamo 14.

Na obe slike se uočavaju tri manje-više istovetne glavne karakteristike. Prva je da u oba slučaja imamo relativno brzo opadanje kritičnih vrednosti sa porastom udaljenosti od Sunca; druga se odnosi na činjenicu da s približavanjem rezonancama najčešće dolazi do uočljivog pada ovih vrednosti; treća i najvažnija je da su, uopšte uzev, i uprkos vrlo oštrom usvojenom kriterijumu tačnosti, kritične vrednosti kako ekscentričnosti, tako i nagiba prilično visoke.

Ako se podsetimo da su u modelu korišćenom za ovu analizu poremećajne planete samo Jupiter i Saturn, a to znači da je ukupni poremećajni efekat monotono rastuća funkcija udaljenosti od Sunca, prva uočena karakteristika postaje sama po sebi jasna i očekivana. Treba ipak reći da je brzina opadanja kritičnih vrednosti donekle uslovljena činjenicom da je za ocenu tačnosti usvojen jednostavni Δa kriterijum. Da je eventualno korišćen neki dinamički solidnije utemeljen kriterijum, kao napr. $K\cdot(\Delta a/a)$ - veličina direktno povezana sa promenom brzine tela

na putanji - trend opadanja bitno bi se usporio. Svaki ovakav komplikovaniji kriterijum, međutim, uzrokuje u praktičnoj primeni neke druge probleme i poteškoće, pa je prevagnula potreba da rezultati treba što jednostavnije i što neposrednije da se predstave.

Naravno da je i pad kritičnih vrednosti sa približavanjem rezonancama očekivan, mada uglavnom i nije naročito velik. Ipak, indikativan je u tom smislu slučaj kritične vrednosti ekscentričnosti za a = 3.2 AJ. Putanje sa ovom velikom poluosom nalaze se vrlo blizu snažne 2:1 rezonance i nagli pad tačnosti određivanja srednje velike poluose direktna je posledica uticaja rezonantnog člana prvog stepena po e sa argumentom $(2\lambda' - \lambda - \tilde{\omega})$, koji se javlja u sistemu ekscentričnost - longituda perihela. Taj član, a ni njemu analogni član prvog stepena po *sin i*, ne figuriše u sistemu nagib - longituda čvora, pa kritični nagib zato ne opada sa približavanjem rezonanci ni izdaleka tako naglo kao kritična ekscentričnost.

Činjenica, konačno, da su kritične vrednosti i ekscentričnosti i nagiba prilično visoke znači da, bar u slučaju srednje velike poluose i u okviru primenjenog modela, Yuasa-ina analitička teorija vrlo efikasno odstranjuje kratko-periodične poremećaje i kod putanja sa znatnom ekscentričnošću i nagibom.

Što se tiče grešaka koje se, uopšte uzev, javljaju u blizini rezonanci u srednjem kretanju pri određivanju srednjih elemenata za objekte bilo koje ekscentričnosti i nagiba, jasno je već iz primera *Themisa*, tela sa putanjom izrazito malog nagiba i umerene ekscentričnosti, da se tu radi o problemima za

koje u okviru analitičke teorije nema definitivnog rešenja. Analiza zavisnosti tačnosti odredivanja srednjih elemenata od udaljenosti male planete od rezonance, slična ovoj koju smo napred opisali za problem velikih ekscentričnosti i nagiba, zahtevala bi tro-dimenziono mapiranje čitavog prstena malih planeta, odredivanje kritičnih površina za svaku značajniju rezonancu i sl. Kako bi ovakva analiza predstavljala zaista ogroman posao za koji, inače, u ovom trenutku nije sasvim izvesno da li ga uopšte ima smisla raditi, ili je bolje prethodno dalje usavršiti samu teoriju, to ona očigledno izlazi van okvira i namera ove teze.

Kao još jednu ilustraciju značaja i uticaja rezonantnih efekata pokazaćemo ovde Tabelu 11. u kojoj su za malu planetu *Themis* date vrednosti amplitude rezonantnog člana sa malim imeniocem $in' - (i-1)n$, $i \in [-5,5]$. Nagli skok vrednosti amplitude, koji dostiže tri reda veličine u odnosu na prethodne vrednosti, a do kojeg dolazi za $i = 2$, jasno ilustruje veliki uticaj 2:1 rezonance i njen dominantni doprinos ukupnom poremećajnom dejstvu. Interesantno je, međutim, da napomenemo da ni uticaji ostalih rezonanci prvog reda (3:2, 4:3, itd.), premda znatno manji od osnovnog uticaja 2:1 rezonance, nisu ni izdaleka zanemarljivi, te da ovde imamo, u stvari, jedan primer očiglednog preklapanja rezonantnih efekata.

Dodajmo na kraju da su rezultati prikazani u ovom odeljku u neku ruku ipak samo preliminarni i da bi se sigurno mogli popraviti i dopuniti, kako u smislu daljeg približavanja primenjenog modela realnosti putem uključivanja ostalih ovde bitnih poremećajnih planeta, tako i u smislu preduzimanja

sličnih ispitivanja za ostale elemente. U ovom trenutku, međutim, realizacija ovih ideja može se samo imati u vidu za neki budući rad.

Tabela 11. Amplitude rezonantnog 2:1 člana za *Themis*.

i	Ampl.
-5	0.013
-4	0.017
-3	0.012
-2	-0.022
-1	-0.081
0	0.262
1	1.324
2	26.906
3	5.773
4	3.127
5	1.653

5.3 Dugo-periodični poremećaji

Eliminisanje dugo-periodičnih poremećaja i određivanje sopstvenih elemenata malih planeta u okviru *Yuasa*-ine teorije vrši se, kao što smo pokazali, u nekoliko koraka. Polazeći od prethodno izvedenih srednjih elemenata prvo se iz (5.1) i (3.111) izračunaju potrebni koeficijenti prvog i drugog reda, a zatim se izvrši prelaz na *Poincaré*-ove promenljive (3.113). Iz (3.122), (3.123) i (3.125) se odrede veličine koje figurišu u izrazu (3.127) za generatrisu S_1^*, da bi se iz (3.133) dobile promenljive oslobođene dugo-periodičnih poremećaja prvog reda i četvrtog stepena, odnosno drugog reda i drugog stepena. Rešenja (3.132) služe za izvođenje sopstvenih vrednosti amplituda *Poincaré*-ovih promenljivih u obliku (3.129), a odgovarajuće

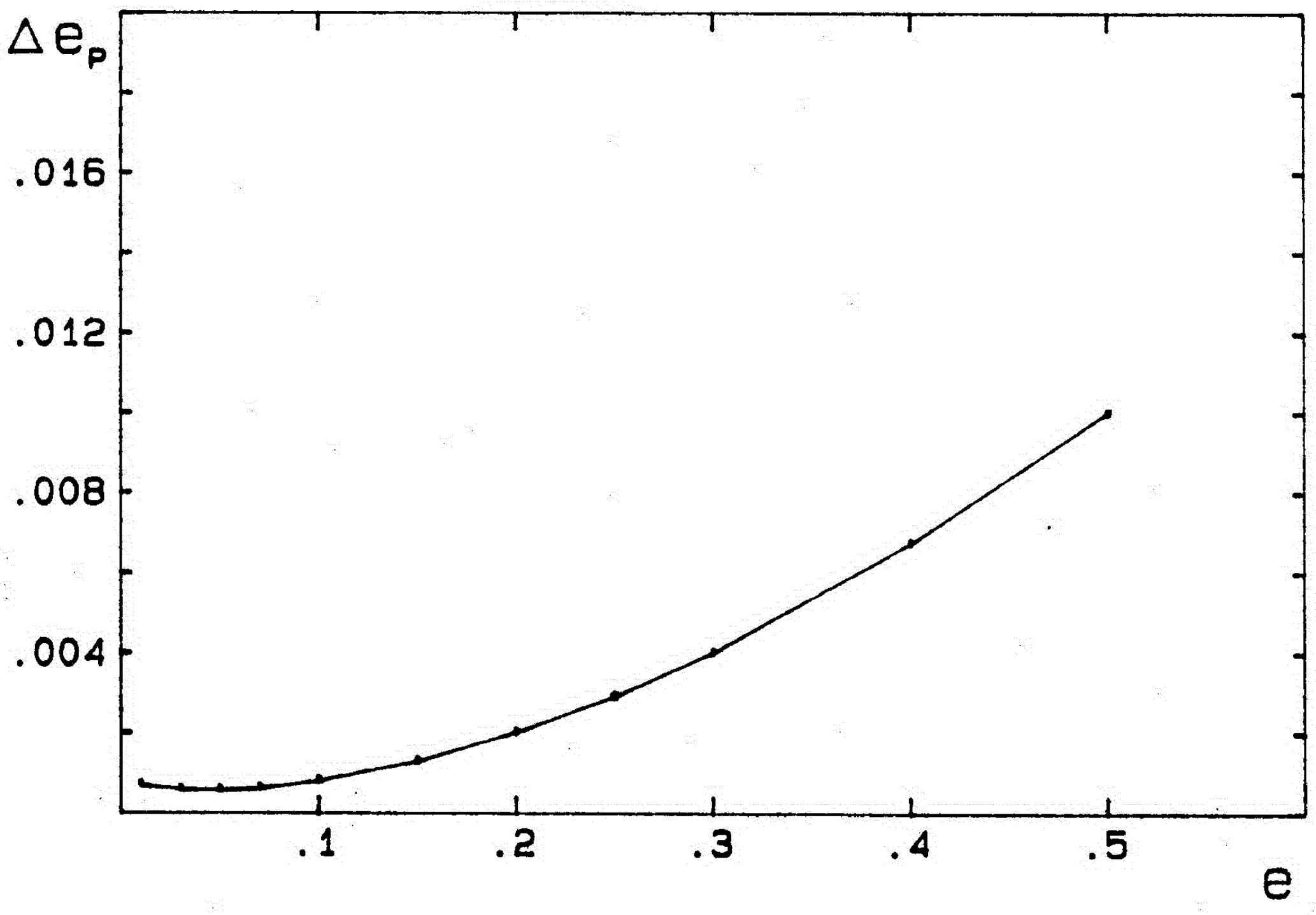
vrednosti ekscentričnosti i nagiba konačno dobijamo iz (3.134). Sopstvene longitude perihela i čvora određuju se iz (3.135).

U Tabeli 12. dati su tako dobijeni sopstveni elementi za prvih 25 numerisanih malih planeta. Uporede li se ovi rezultati sa odgovarajućim vrednostima izvedenim bilo pomoću klasične, linearne teorije (Brouwer, 1951), ili teorije Williams-a (1979), naći ćemo da su razlike sopstvenih elemenata, u skladu sa očekivanjima, skoro zanemarljive kod objekata sa putanjama male ekscentričnosti i nagiba, ali da se znatno uvećavaju za objekte velikih ekscentričnosti i/ili nagiba, za one u blizini rezonanci, itd.

Tabela 12. Sopstveni elementi prvih 25 numerisanih malih planeta.

No	a_p	e_p	$\sin i_p$	β	γ
1	2.76709	.11364	.17071	160.253	76.814
2	2.77055	.29869	.57972	151.928	174.439
3	2.66940	.23499	.23173	67.497	171.866
4	2.36151	.09935	.11715	218.597	100.488
5	2.57627	.22753	.08041	146.683	146.663
6	2.42528	.16336	.25311	32.497	144.340
7	2.38611	.21789	.11374	60.125	268.381
8	2.20140	.18971	.14922	87.835	160.488
9	2.38643	.13500	.08481	94.877	72.214
10	3.14224	.13292	.08821	230.503	280.334
11	2.45224	.06464	.07076	306.533	131.833
12	2.33426	.16504	.16260	298.241	233.823
13	2.57632	.12151	.27807	138.121	41.202
14	2.58758	.20664	.14954	179.873	82.171
15	2.64368	.14695	.22499	43.552	292.548
16	2.92216	.10168	.04566	23.773	166.882
17	2.47102	.12972	.08626	245.184	126.993
18	2.29563	.18699	.18213	43.513	168.725
19	2.44199	.13596	.03900	47.956	230.468
20	2.40861	.16928	.02235	116.467	227.836
21	2.43523	.12114	.03815	324.504	78.590
22	2.90983	.09636	.22056	82.804	62.580
23	2.62785	.26032	.17066	133.323	59.987
24	3.13429	.14935	.01828	155.236	317.770
25	2.40035	.13723	.39603	304.212	210.633

Dve interesantne male ilustracije zavisnosti razlika sopstvenih ekscentričnosti, odnosno sopstvenih nagiba, izvedenih pomoću Yuasa-ine teorije i linearne teorije, od veličine samih ekscentričnosti, odnosno nagiba, date su na Slikama 17. i 18. U oba slučaja, naime, odabrana je putanja sa oskulatornim elementima a = 2.77 AJ; $M = 114^\circ$; $\omega = 72^\circ$; $\Omega = 80^\circ$ (što vrlo približno odgovara putanji male planete 1 Ceres), da bi zatim bio fiksiran mali nagib od 1°, a ekscentričnost varirana od 0.01, 0.03, ..., do 0.50, odnosno da bi bila fiksirana mala ekscentričnost 0.01, a nagib na sličan način menjan od 1°, 3°, ..., do 50°. Na taj su način dobijene dve familije putanja, za koje su zatim srednji i sopstveni elementi određeni po opisanim procedurama, s tim što su i kod linearne teorije kao polazni podaci za određivanje sopstvenih elemenata korišćeni srednji elementi, a ne oskulatorni, kako je to inače uobičajeno. Ovim su dobijene razlike donekle izmenjene u odnosu na njihove stvarne vrednosti, ali je zato omogućen neposredan uvid u ono što nas ovde zapravo i interesuje - zavisnost značaja dugo-periodičnih poremećajnih članova višeg reda i stepena i njihovog doprinosa ukupnom poremećajnom efektu od veličine ekscentričnosti i nagiba, koji se javljaju kao faktori u tim članovima. Očigledno, za izvestan broj malih planeta, kod kojih su i ekscentričnost i nagib sasvim mali (u datom slučaju, recimo, manji od 0.1 i 8°), linearna teorija i teorija Yuasa-e daju sopstvene ekscentričnosti i nagibe uporedljive tačnosti. Za veliku većinu malih planeta, međutim, koje imaju već i samo jedan od kritičnih elemenata čak i samo umerene veličine, razlike rezultata dobijenih pomoću ove dve teorije postaju



Slika 17. Razlike sopstvenih ekscentričnosti iz Yuasa-ine i linearne teorije.



Slika 18. Razlike sopstvenih nagiba iz Yuasa-ine i linearne teorije.

velike, pa se izvesno može zaključiti da u tim slučajevima linearna teorija daje rezultate opterećene znatnim greškama.

Jasno je da smo prethodnim primerom na određeni način u stvari već započeli analizu tačnosti sopstvenih elemenata izvedenih u ovoj tezi pomoću korigovane i kompletirane teorije višeg reda i stepena, i to sa stanovišta upoređenja sa do sada raspoloživim rezultatima klasične teorije. Ovakav relativan pristup, koliko god bio ilustrativan u pogledu demonstriranja očekivanog poboljšanja, ipak ne daje prave odgovore na za nas najznačajnija pitanja o apsolutnoj tačnosti izvedenih sopstvenih elemenata, njihovoj dugo-periodičnoj stabilnosti, primenljivosti u svrhe klasifikacije malih planeta u familije i sl. Zato smo i ovde pribegli detaljnoj i sveobuhvatnoj analizi zasnovanoj na manje-više istoj ideji, koju smo već primenili u slučaju velike poluose. Sopstvena ekscentričnost i sopstveni nagib su, naime, po definiciji konstantne veličine, pa se merom njihove (ne)tačnosti u nekom vremenskom intervalu može smatrati odstupanje od konstantnosti niza dobijenih vrednosti određenih u tom intervalu sa nekim pogodno odabranim korakom. U praksi je, dakle, potrebno u okviru određenog modela Sunčevog sistema numerički integraliti datu putanju u dovoljno dugom vremenskom intervalu, dobijene oskulatorne elemente osloboditi kratko-periodičnih poremećaja i zatim, na tako određene srednje elemente, primeniti opisanu proceduru eliminisanja dugo-periodičnih poremećaja i izvođenja sopstvenih elemenata. Ukupna varijacija sopstvenog elementa, merena zbirom najvećeg pozitivnog i najvećeg negativnog odstupanja (tj., razlikom najveće i najmanje vrednosti datog elementa u posmatranom

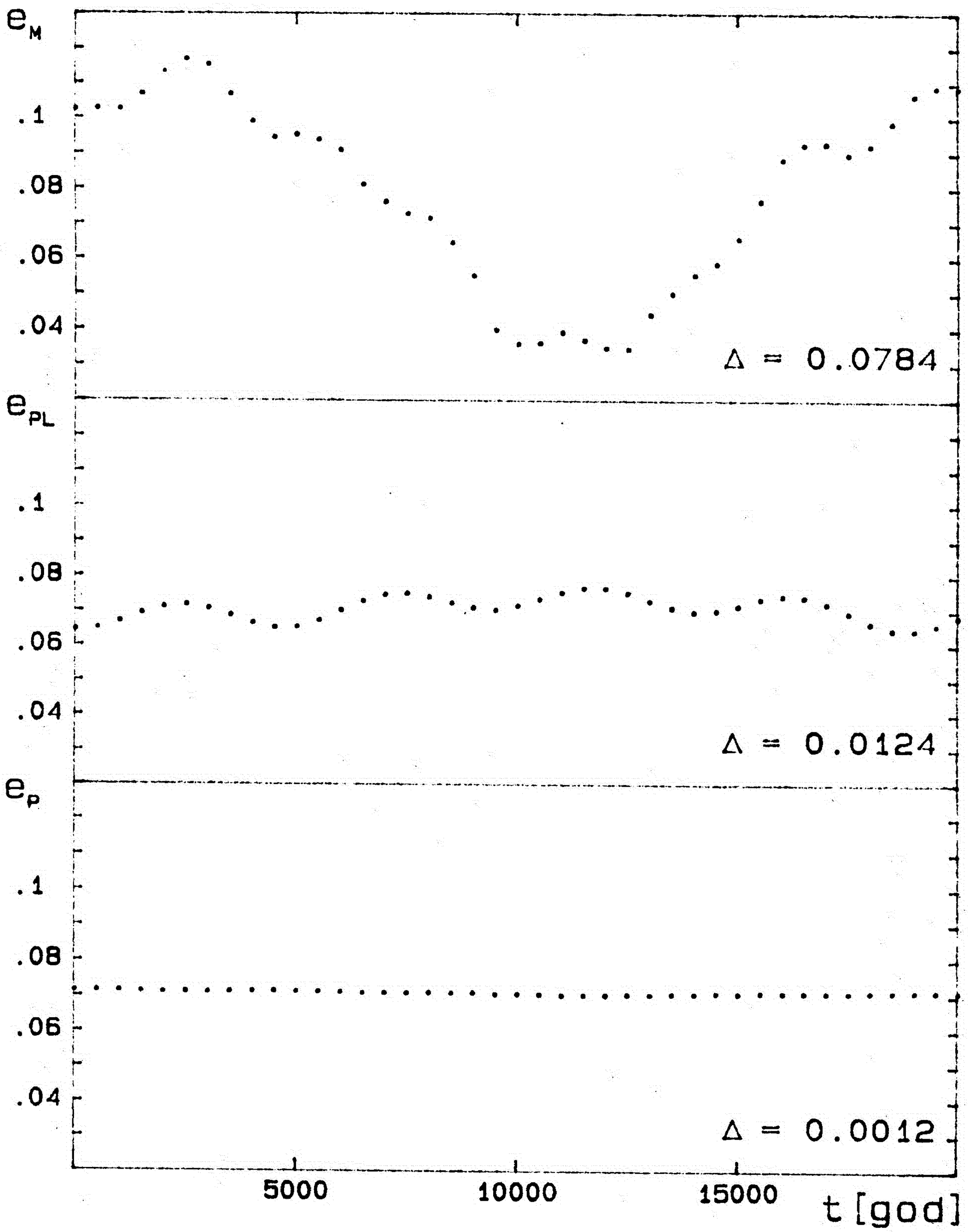
vremenskom intervalu) daje, konačno, konkretne i precizne odgovore na gore pomenuta pitanja u vezi tačnosti, pouzdanosti i dalje primenljivosti dobijenih rezultata.

Da bismo neposrednije i sveobuhvatnije ispitali i razumeli i proceduru i dobijene rezultate, i ovde smo, kao i kod kratkoperiodičnih poremećaja, analizu tačnosti vršili u okviru dva različita modela Sunčevog sistema, uzimajući pri tom u obzir razne aspekte problema u vezi određivanja i primene sekularnih frekvencija, uticaja rezonanci itd.

5.3.1 Slučaj tri tela

Pošli smo, naravno, od najjednostavnijeg, već opisanog modela tri tela (Sunce-Jupiter-mala planeta), koristeći takođe već prikazane i ispitane srednje elemente za četiri najveće male planete u istoimenim *Hirayama*-inim familijama - *Floru*, *Koronis*, *Eos* i *Themis*. U intervalu od $2 \cdot 10^4$ god. (za *Floru* $3 \cdot 10^4$ god.), koji približno pokriva jednu "linearnu" cirkulaciju longitude perihela, odnosno čvora ispitanih malih planeta, a sa korakom od ~ 500 god., paralelno su određivani sopstveni elementi kretanja ovih malih planeta pomoću Yuasa-ine teorije višeg reda i stepena i pomoću klasične, linearne teorije. Dobijeni rezultati su zatim analizirani i upoređeni, čime je ostvaren neposredan uvid u postignuti napredak, odnosno prirodu i uzroke problema s kojima smo se u ispitanim slučajevima suočili.

Na Slici 19. su, u svojstvu primera, za *Eos* prikazani, odozgo nadole, srednja ekscentričnost, zatim sopstvena ekscentričnost određena pomoću linearne teorije i, konačno,

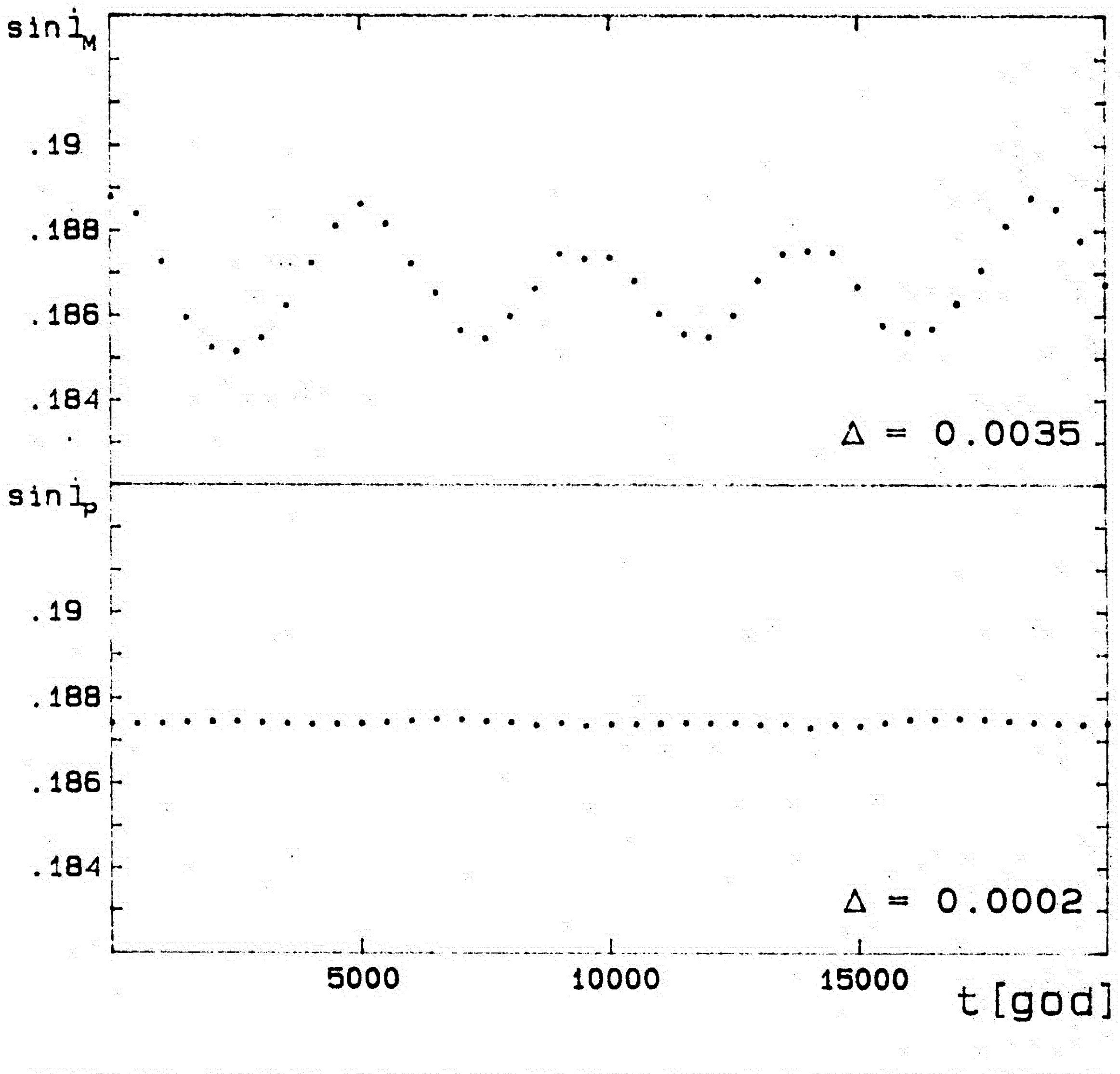


Slika 19. Srednja ekscentričnost *Eosa* (gore), sopstvena ekscentričnost iz linearne teorije (sredina) i sopstvena ekscentričnost iz Yuasa-ine teorije (dole). Δ predstavlja ukupnu varijaciju, tj. razliku najveće i najmanje vrednosti na datom grafiku. Slučaj tri tela.

sopstvena ekscentričnost određena pomoću Yuasa-ine teorije. Uz svaki grafik data je i odgovarajuća razlika Δ najveće i najmanje vrednosti u obuhvaćenom vremenskom intervalu.

Jasno da neki poseban komentar ovde nije potreban. Ukupna varijacija sopstvene ekscentričnosti izvedene pomoću teorije višeg reda i stepena za čitav red veličine je manja od one koja preostaje kod primene linearne teorije i po svojoj nominalnoj vrednosti je gotovo sasvim na granici one kritične vrednosti (10^{-8}), kojoj težimo u cilju obezbeđivanja pouzdanih parametara za klasifikaciju malih planeta u familije. Treba, međutim, reći da je, u stvari, rezultat dobijen pomoću linearne teorije veoma loš i da je otuda jasno zašto u svim dosadašnjim klasifikacijama familije kao *Eos* ili *Koronis* imaju znatno veći raspon u sopstvenoj ekscentričnosti nego u velikoj poluosi i nagibu. Pominjali smo već da je ekscentričnost od ova tri elementa najpodložniji poremećajima, ali zato tek sada možemo decidirano reći da su problemi sa sopstvenom ekscentričnošću *Eosa* u linearnoj teoriji u vezi sa njegovim relativno velikim nagibom. U linearnoj teoriji, naime, parovi elemenata ekscentričnost-longituda perihela i nagib-longituda čvora su razdvojeni u jednačinama kretanja i njihove se međuzavisnosti ne uzimaju u obzir. U teoriji višeg reda i stepena se ovi mešoviti članovi, naravno, uzimaju u obzir i odgovarajuće varijacije elemenata uspešno eliminišu. Primetimo, u vezi s tim, da glavna neodstranjena oscilacija "linearne" sopstvene ekscentričnosti ima period od oko $5 \cdot 10^3$ god., što tačno odgovara prominentnoj oscilaciji srednjeg nagiba (vidi Sliku 20.), premda ova poslednja ima znatno manju amplitudu. Lako se

može pokazati da je za ovu oscilaciju u oba slučaja odgovoran član prvog reda i četvrtog stepena ~ $e^2 sin^2 i \cos(2\tilde{\omega} - 2\Omega)$, a razlika amplituda je posledica činjenice da se u jednačinama kretanja u jednom slučaju javlja parcijalni izvod ovog člana po e, a drugi put po $sin\ i$.



Slika 20. Srednji (sinus) nagib Eosa (gore) i sopstveni (sinus) nagib (dole). Slučaj tri tela.

Na Slici 20. su prikazane varijacije srednjeg nagiba (gore) i odgovarajućeg sopstvenog nagiba (dole) Eosa izvedenog

pomoću Yuasa-ine teorije. U skladu sa gore rečenim vidi se da su već i varijacije srednjeg nagiba veoma male, dok je sopstveni nagib praktično konstantan. Treba, međutim, imati u vidu da su ovako dobri rezultati delimično uslovljeni i usvojenim modelom Sunčevog sistema, u kojem ravan Jupiterove fiksne putanje predstavlja ujedno i osnovnu ravan koordinatnog sistema, pa se u jednačinama ne javljaju napr. prinudne oscilacije nagiba.

Napomenimo u vezi sa ovim primerima da i rezultati nezavisno dobijeni pomoću *Fourier*-ove analize (Carpino et al., 1986) pokazuju odlično slaganje sa našim rezultatima; prvi harmonik filtrovane ekscentričnosti *Eosa* ima amplitudu 0.0707, a u slučaju (sinusa) nagiba 0.1866.

Tabela 13. Ukupne varijacije ($\Delta \cdot 10^4$) sopstvenih ekscentričnosti i nagiba. Slučaj tri tela.

Mala planeta	Δe_P	Δe_{PL}	$\Delta \sin i_P$
Flora	4	27	0
Koronis	10	17	0
Eos	12	124	2
Themis	105	57	2

U Tabeli 13. sumirani su rezultati dobijeni u okviru modela tri tela. Za sve četiri odabrane male planete tu su date razlike Δ najvećih i najmanjih vrednosti sopstvenih ekscentričnosti i nagiba određenih pomoću *Yuasa*-ine teorije; radi upoređenja date su i odgovarajuće razlike sopstvenih ekscentričnosti određenih pomoću linearne teorije. Kao što je već napomenuto u vezi opisanog primera *Eosa*, ukupni rezult
za sopstveni nagib ne mogu se, zbog modela koji fa

njihovo dobijanje sa izuzetno visokom tačnošću, smatrati sasvim reprezentativnim za našu analizu i moraju se uzimati sa izvesnom rezervom. S druge strane, međutim, rezultati dobijeni za sopstvenu ekscentričnost su i reprezentativni i dovoljno indikativni u smislu interpretacije i identifikacije raznih poremećajnih uticaja i efekata. Očigledan napredak u tačnosti i dugo-periodičnoj stabilnosti sopstvene ekscentričnosti ostvaren je, premda u nešto manjoj meri nego u slučaju *Eosa*, i kod *Flore* i *Koronisa*. Kod obe ove male planete, naime, zahvaljujući relativno velikoj udaljenosti od poremećajne planete (*Flora*), odnosno maloj ekscentričnosti i nagibu (*Koronis*), već su i rezultati dobijeni primenom linearne teorije prilično dobri, pa i razlike "novih" i "starih" rezultata nisu toliko velike (kod *Flore*, koja ima nešto veću ekscentričnost, poboljšanje je ipak znatnije nego kod *Koronisa*).

Poseban osvrt zahteva, međutim, slučaj *Themisa*, kod kojeg je rezultat dobijen pomoću teorije višeg reda i stepena približno dvostruko lošiji od onog koji se dobija pomoću linearne teorije !? Iako na prvi pogled paradoksalan, ovaj rezultat se lako može razumeti ako imamo u vidu dve stvari. Prvo, obzirom na činjenicu da se *Themis* nalazi u blizini rezonance 2:1 u srednjem kretanju, koeficijenti D_i drugog reda po masi, kod kojih se javlja odgovarajući mali imenilac, ne računaju se tačno i drugo, u imeniocima dugo-periodičnih poremećajnih članova prvog reda i četvrtog stepena generatrise S_1^* (3.127) javlja se frekvencija g_o slobodnih oscilacija, dobijena iz (3.122) po definiciji iz linearne teorije (rešenja 3.121 iz linearne teorije, podsetimo se, koriste se u

Yuasa-inoj teoriji za razdvajanje sekularnih i periodičnih članova višeg reda i stepena). Kako iz (3.131) i (3.132) sledi, "linearna" frekvencija g_o može se bitno razlikovati od stvarne, naročito kod malih planeta velikih ekscentričnosti i/ili nagiba, onih u blizini sekularnih rezonanci i rezonanci u srednjem kretanju (slučaj *Themisa*). Ustanovljeno je, kako izračunavanjem popravke frekvencije na osnovu (3.131), tako i pomoću *Fourier*-ove analize (Carpino et al., 1986), da je "linearna" frekvencija *Themisa* (85"/god.) za oko 40% manja od odgovarajuće popravljene vrednosti (126"/god. na osnovu 3.131, odnosno 131"/god. na osnovu *Fourier*-ove analize) za par *Poincaré*-ovih promenljivih p, q, koji predstavlja kanonički analog sistema e, $\tilde{\omega}$. Jasno da ovakvo "popravljanje" rezultata linearne teorije, uzimanjem u obzir članova višeg reda i stepena sa ovoliko pogrešnim parametrom, doprinosi samo daljem pogoršavanju tačnosti. Ovako velikoj razlici "linearne" i stvarne frekvencije opet u najvećoj meri doprinosi rezonanca 2:1, jer su za svega 3"/god. od ukupno 41"/god. popravke odgovorni članovi prvog reda i četvrtog stepena. Na taj način rezonanca i indirektno utiče na rezultate i na kraju sve to dovodi do "apsurdnog" ishoda.

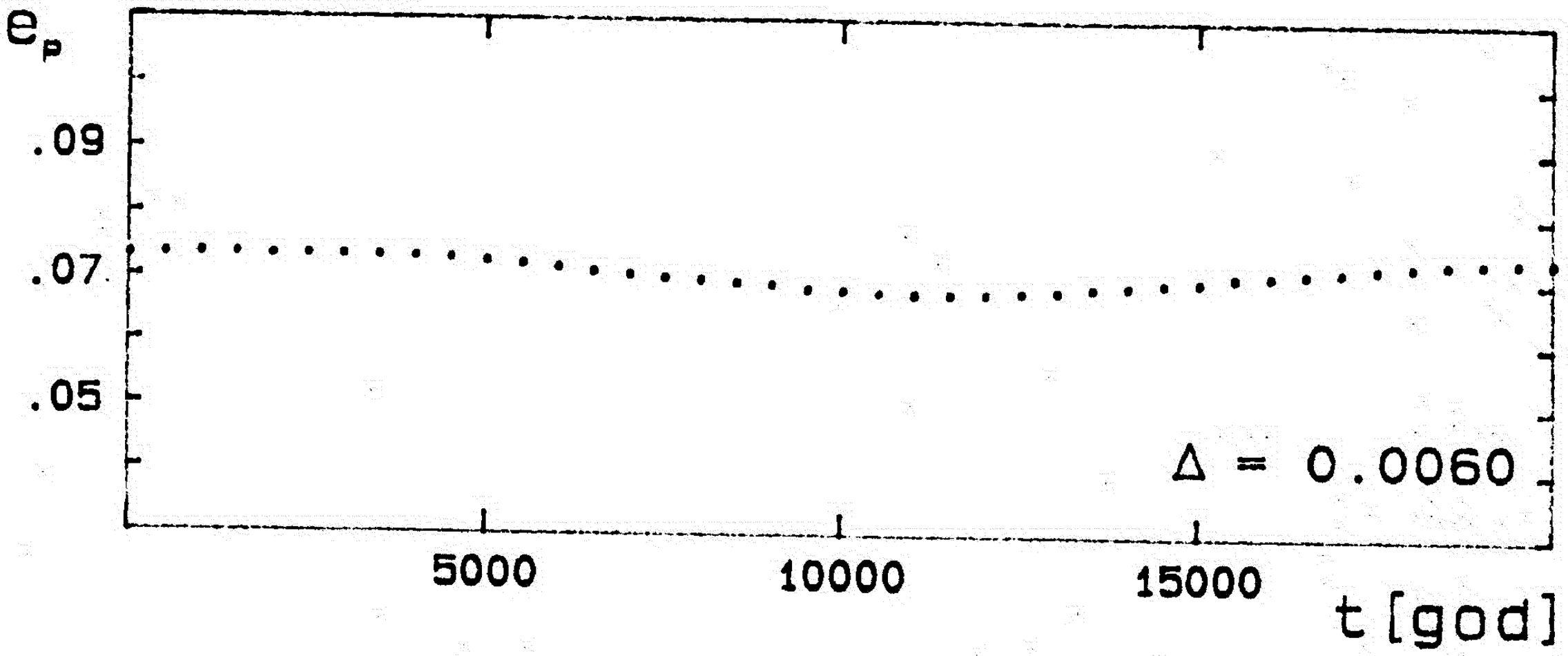
Postavlja se odmah, u vezi sa ovim slučajem, očigledno pitanje šta činiti u praksi sa onim malim planetama kod kojih se javljaju velike razlike "linearne" i popravljene frekvencije i za koje, stoga, možemo opravdano pretpostaviti da su im sopstveni elementi određeni sa umanjenom tačnošću. Jedna je mogućnost, naravno, da se takve male planete na neki način označe i izdvoje, pa da se ili uopšte ne koriste u postupku

klasifikacije malih planeta u familije, ili da se koriste uslovno. Druga i naravno komplikovanija varijanta je da se teorija unapredi napr. u smislu uvođenja iterativne procedure za određivanje sopstvenih elemenata, pri čemu bi se u svakoj iteraciji popravljale frekvencije i svi ostali relevantni parametri, sve dok se ne ispuni neki dati uslov tačnosti, odnosno dok se eventualno ne utvrdi da je proces divergentan. Premda, naravno, ova diskusija u neku ruku već izlazi iz okvira neposrednih zadataka predviđenih za ovu tezu, obzirom na važnost čitavog problema, kao i mogućnost pojave sasvim novih poteškoća u primeni iterativnog postupka, na tu drugu mogućnost ćemo se još vratiti nešto kasnije.

Pomenimo na kraju još jedan rezultat koji smo najavili u odeljku 5.1, a sada smo u prilici da ga i pobliže analiziramo. Radi se o testu koji je trebalo da pokaže da li i u kojoj meri pogrešna vrednost koeficijenta D_σ, koju je Yuasa naveo u svom radu (vidi Tabelu 5.), utiče na tačnost određivanja sopstvenih elemenata pomoću njegove teorije. Pošto je Yuasa-ina vrednost izvedena za odnos velikih poluosa $\alpha = 0.58$, što vrlo približno odgovara maloj planeti *Eos*, to smo za ovaj test iskoristili već izvedene rezultate za ovu malu planetu (Slika 19.), tako što smo izvođenje ponovili, ali koristeći za D_σ Yuasa-inu vrednost (-19.8671). Sopstvene ekscentričnosti dobijene na taj način prikazane su na Slici 21.

Poređenjem Slika 19. i 21., odnosno odgovarajućih ukupnih varijacija sopstvene ekscentričnosti, nalazimo da je odstupanje sopstvene ekscentričnosti od konstantne vrednosti pri korišćenju pogrešnog Yuasa-inog koeficijenta znatno veće od

onoga koje se dobija korišćenjem naše vrednosti. Odatle proizilazi da je ispravljanje grešaka u Yuasa-inom izrazu za Hamiltonijan drugog reda po poremećajnoj masi, po svemu sudeći, bitno uticalo na unapređenje tačnosti rezultata.



Slika 21. Varijacije sopstvene ekscentričnosti *Eosa* izvedene uz korišćenje *Yuasa*-ine vrednosti za koeficijent D_6.

5.3.2 Slučaj šest tela

Videli smo kod kratko-periodičnih poremećaja da je bilo dovoljno kao alternativni ("realni") model Sunčevog sistema, pandan uprošćenom modelu tri tela, usvojiti model četiri tela, jer se poremećaji sabiraju i uvođenje novih poremećajnih planeta u model ne menja suštinu stvari - mogućnost skoro potpunog odstranjivanja kratko-periodičnih poremećaja i izvođenja tačnih srednjih elemenata malih planeta. Kod dugo-periodičnih poremećaja stvar, međutim, nije tako jednostavna. Zbog postojanja mešovitih članova i članova koji opisuju međudejstva poremećajnih planeta, uvođenje novih poremećajnih

planeta zahtevalo bi preradu teorije i redefinisanje ključnih jednačina. Trebalo bi, sem toga, u cilju obezbeđenja konzistentnosti teorije, vršiti selekciju poremećaja po veličini, imajući u vidu red i stepen teorije, i sl.

Jasno je, dakle, da kad su u pitanju dugo-periodični poremećaji treba pre svega teoriju takvu kakva jeste primeniti na model što je moguće bliži realnosti, da bi i ocena mogućnosti teorije i tačnosti rezultata koji se pomoću nje postižu bila što objektivnija, a zatim razmotriti eventualna poboljšanja i unapređenja.

Tri su razloga što smo se pri izboru "realnog" modela Sunčevog sistema opredelili za onaj sa šest tela, gde se u ulozi poremećajnih planeta pojavljuju četiri velike spoljašnje planete - Jupiter, Saturn, Uran i Neptun. Prvo, pomenute četiri planete su i u stvarnosti one koje svojim neposrednim i međusobnim poremećajnim dejstvima uglavnom u potpunosti kontrolišu kretanja malih planeta u dužim vremenskim intervalima, tako da zanemarivanje unutrašnjih planeta, bar kada su u pitanju male planete glavnog prstena, ne bi trebalo da ima znatnijeg kvalitativnog ni kvantitativnog uticaja na rezultate; drugo, za ovakav model Sunčevog sistema imamo odgovarajuću teoriju kretanja velikih planeta - to je teorija *Duriez*-a (1979); treće, uvođenje svake nove poremećajne planete znatno uvećava računsko vreme potrebno za numeričko integrisanje putanja, tako da bi insistiranje na punoj realnosti modela zahtevalo korišćenje računara visokih performansi, s kakvim u ovom trenutku ne raspolažemo.

U Tabeli 14., koja je analogna Tabeli 2., dati su

parametri kretanja Jupitera poremećenog Saturnom za epohu 24. 07. 1987. god. i ekliptiku i ekvinokcij 1950.0, preuzeti iz teorije *Duriez-a* i korišćeni u svrhu eliminisanja dugo-periodičnih poremećaja putanjskih elemenata malih planeta u modelu šest tela. Već pomenuti program *Everhart-a* (1985) korišćen je za numeričku integraciju putanja, a inicijalni oskulatorni elementi malih i velikih planeta za epohu uzeti su iz Efemerida malih planeta za 1987. god.

Tabela 14. Konstante planetskog kretanja - teorija *Duriez-a*.

$\nu_{55} = 0.044544$	$\mu_{55} = 0.027612$
$\nu_{56} = -0.015741$	$\mu_{56} = -0.006320$
$g_{55} = 0.00003943605$	$f_{55} = 0$
$g_{56} = 0.00025926263$	$f_{56} = -0.00024024518$
$\lambda_{55} = 0.524439$	$\delta_{55} = 1.869525$
$\lambda_{56} = 2.238085$	$\delta_{56} = 2.210018$

Potpuno je jasno da su periodi u kojima je bilo neophodno integraliti putanje ovde znatno duži nego u slučaju tri tela. Efekti sekularnih rezonanci, koji u modelu šest tela dolaze do punog izražaja, imaju periode tipično reda 10^3 - 10^6 god., pa je i integracije, u cilju pune objektivnosti analize, trebalo vršiti u vremenskim intervalima uporedljive dužine. U tu svrhu su, na naš zahtev, na tokijskoj opservatoriji (Yoshikawa, 1988), napravljene probne integracije putanja već pominjane četiri odabrane male planete, u slučaju četiri tela i u vremenskom rasponu od 10^6 god., na osnovu kojih je zaključeno da je period od oko $4 \cdot 10^5$ god. zapravo sasvim dovoljan za

obuhvatanje svih važnijih uočenih efekata, tipičnih za ceo raspon, i da je sve što se sa putanjama zbiva nakon toga uglavnom samo ponavljanje istih varijacija. Štaviše, ovaj period treba pokriti samo u slučaju *Flore*, dok je i znatno kraći period od $1\text{-}2\cdot10^3$ god. izgleda sasvim dovoljan za *Koronis*, *Eos* i *Themis*. Naravno, kod *Flore* se radi o uticaju ranije pomenute sekularne rezonance $\dot{\nu}_6$, čiji mali imenilac $g_0 - g_{56}$ ima za *Floru* otprilike upravo toliki period. Radi jednostavnosti, međutim, putanje sve četiri male planete integraljene su u modelu šest tela u rečenom intervalu od $4\cdot10^5$ god., samo ovoga puta, a opet na naš zahtev, na Opservatoriji Brera u Milanu (Carpino, 1988).

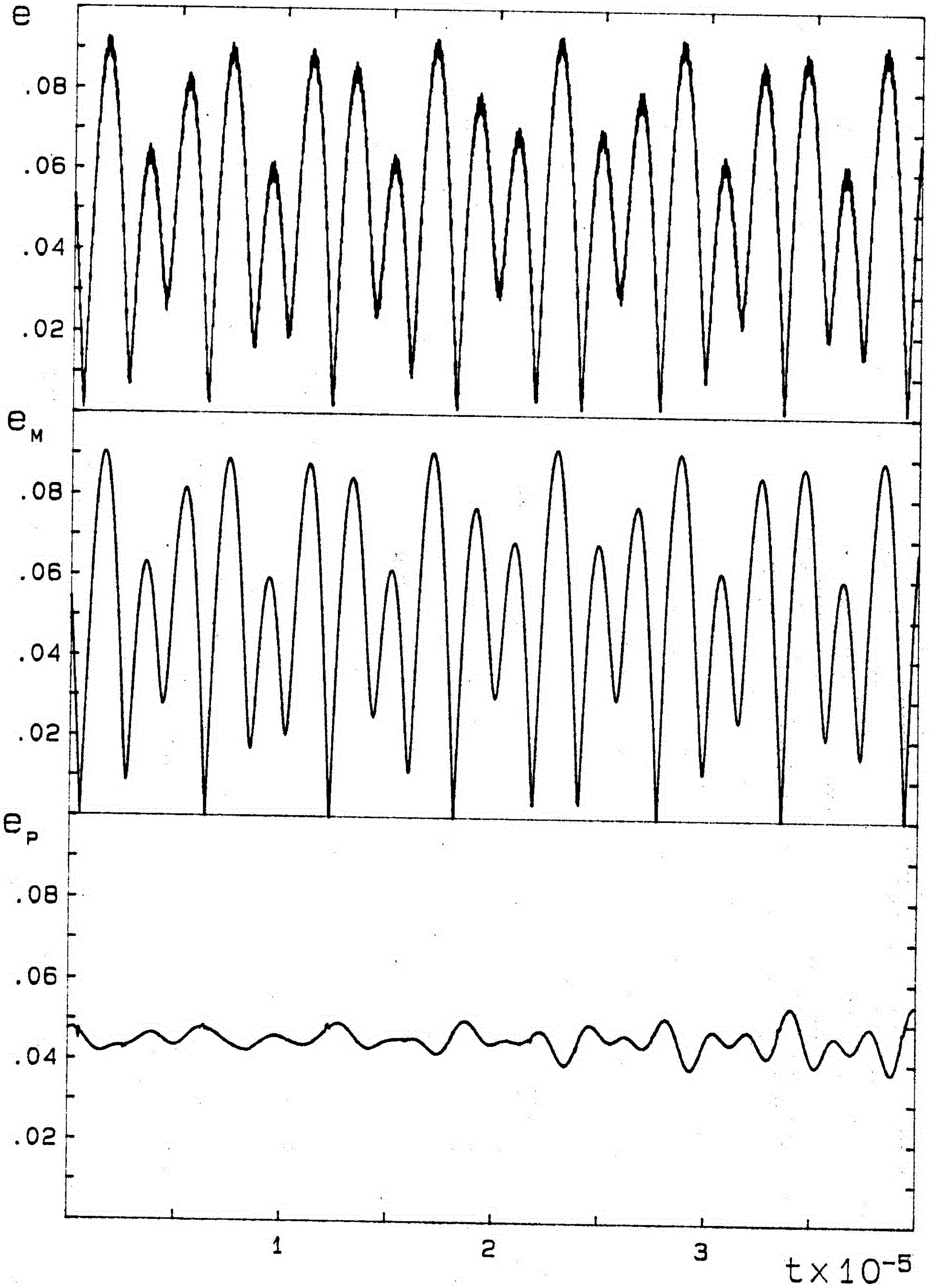
Rezultate naše analize ćemo, obzirom na potrebu da se ispitivanje tačnosti sopstvenih elemenata dobijenih pomoću Yuasa-ine teorije ovim zaokruži i da se izvedu konačni zaključci, prikazati u nešto kompleksnijoj formi nego što smo to činili do sada, sagledavajući čitav problem i sa nekih do sada još nerazmotrenih aspekata. Redosled izlaganja rezultata prilagođen je značaju uočenih problema i složenosti interpretacije, tako da od jednostavnijih slučajeva postepeno prelazimo na one komplikovanije.

5.3.2.1 *Koronis*

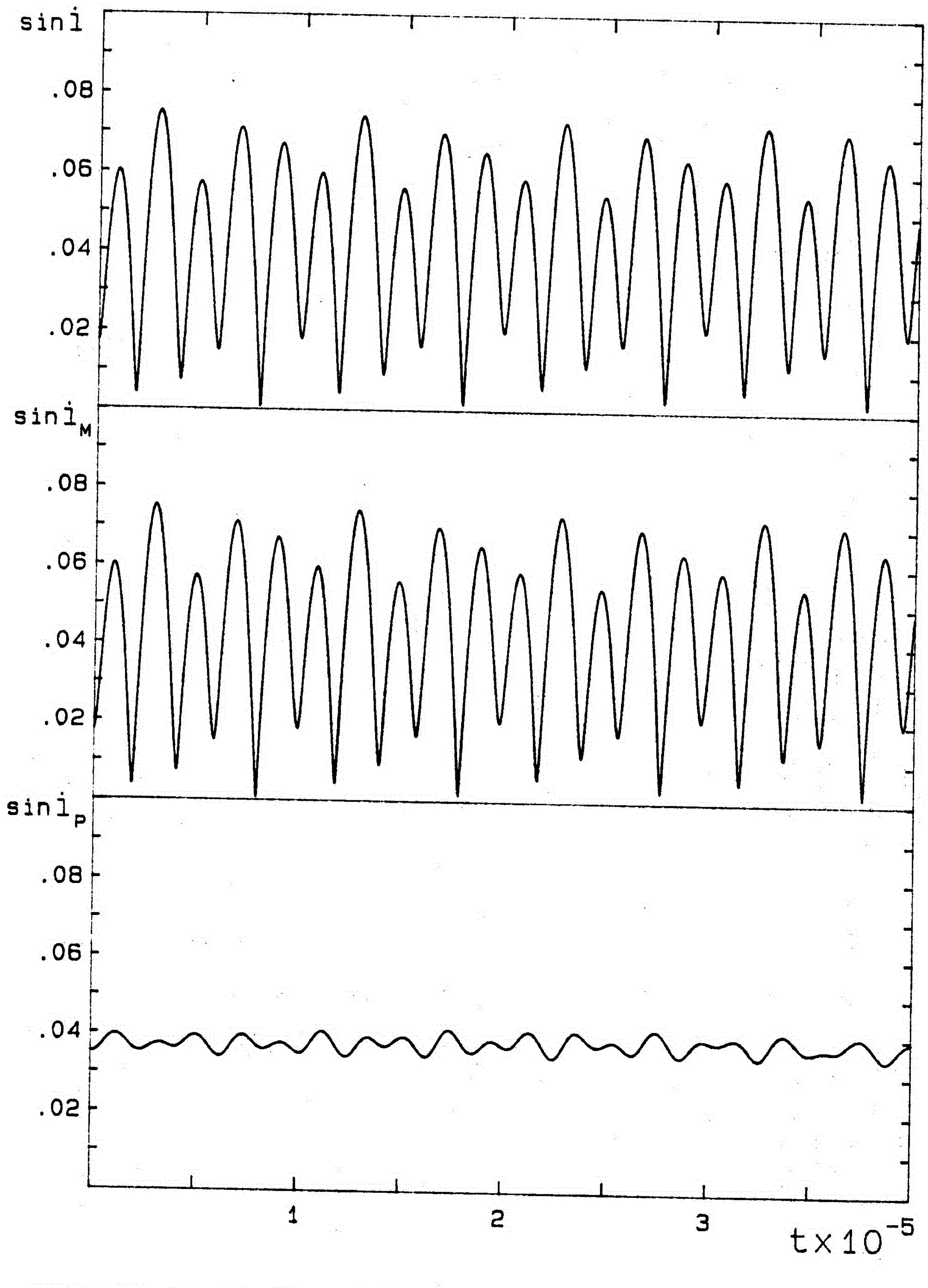
Obzirom na to da je mala planeta 158 *Koronis* objekat čija putanja ima i malu ekscentričnost i mali nagib, može se očekivati da sopstvene vrednosti ovih elemenata budu izvedene sa relativno visokom tačnošću, a i da se previše ne razlikuju od odgovarajućih rezultata linearne teorije. Kao što se može

videti na Slikama 22. i 23., na kojima su odozgo nadole i u istoj razmeri, a u vremenskom intervalu od $4 \cdot 10^5$ god., prikazane oskulatorne (e, $\sin i$), srednje (e_M, $\sin i_M$) i sopstvene (e_P, $\sin i_P$) vrednosti ekscentričnosti, odnosno sinusa nagiba, oskulatorna i srednja ekscentričnost u rečenom periodu ne prelazi 0.10, dok su odgovarajuće vrednosti za sinus nagiba čak ispod 0.08. Glavni poremećajni efekti su oni vezani za revoluciju perihela, odnosno čvora i u oba slučaja imaju period od približno $2 \cdot 10^4$ god.

Kratko-periodični poremećaji su kod ekscentričnosti znatno izraženiji nego kod nagiba, kao što se na Sl. 22. može uočiti naročito u blizini maksimuma, i izazivaju kolebanja oskulatornih vrednosti u intervalu od oko $5 \cdot 10^{-3}$. Srednje, pak, ekscentričnosti imaju izrazito monoton i "gladak" tok, čime je još jednom potvrđena puna efikasnost procedure eliminisanja kratko-periodičnih poremećaja i visoka tačnost dobijenih rezultata. Kratko-periodični poremećaji nagiba su izuzetno mali i dostižu svega nekoliko desethiljaditih, tako da se u razmeri upotrebljenoj na Sl. 23. teško mogu i razlučiti. Sopstvene vrednosti, inače, i ekscentričnosti i nagiba pokazuju znatan dostignuti stepen konstantnosti, ali i još uvek prisutne male varijacije sa osnovnim periodima koji odgovaraju periodima revolucije perihela, odnosno čvora. Što se dugo-periodične stabilnosti rezultata tiče, naročito kod sopstvene ekscentričnosti jasno se vidi trend postepenog uvećanja amplitude neodstranjenih oscilacija, koji već nakon $1.5\text{-}2.0 \cdot 10^5$ god. u priličnoj meri utiče na njihovu tačnost. Najverovatnije da uzrok ovog nagomilavanja greške treba tražiti u nedovoljno



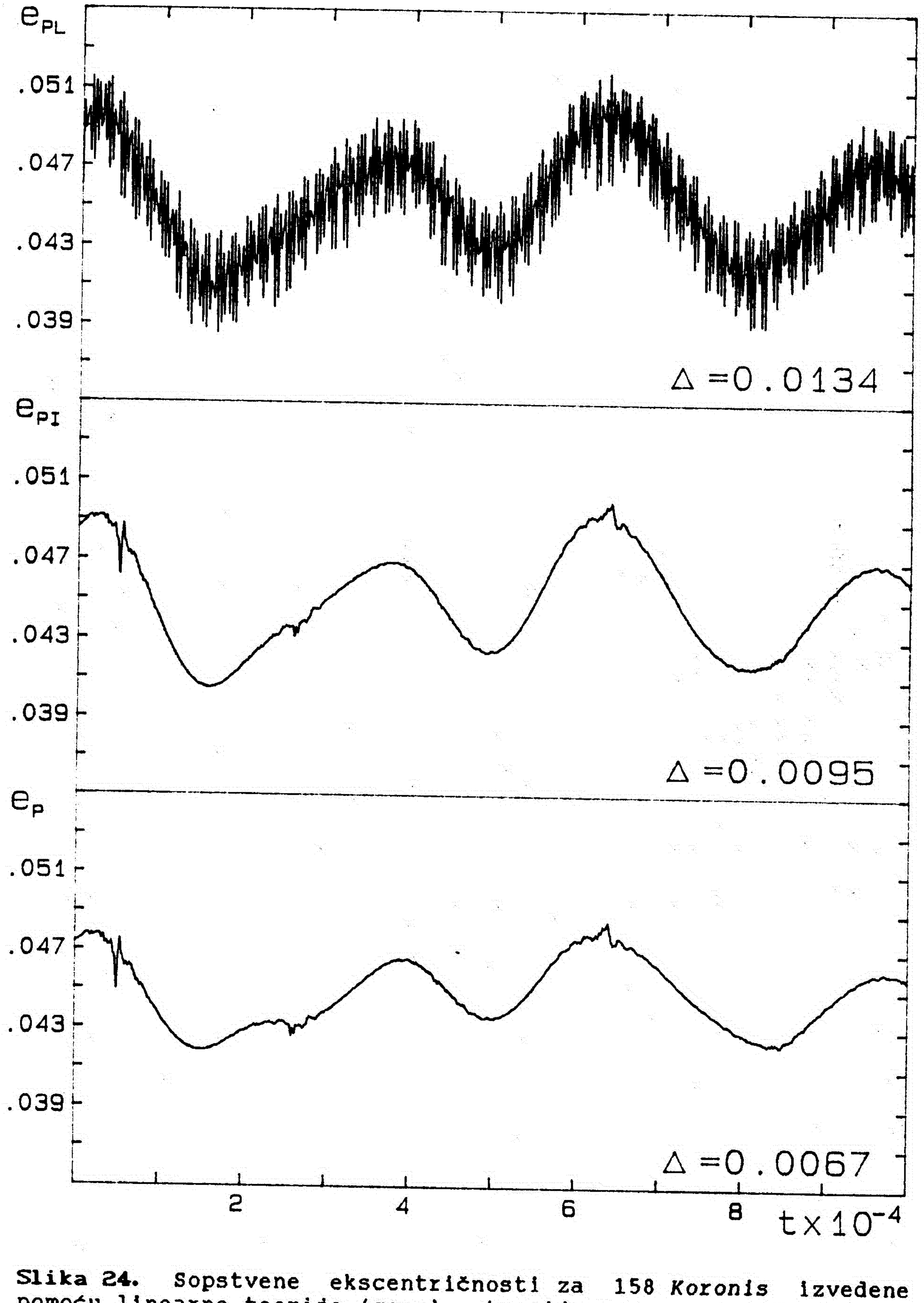
Slika 22. Varijacije oskulatornih (gore), srednjih (u sredini) i sopstvenih (dole) ekscentričnosti za 158 *Koronis*.



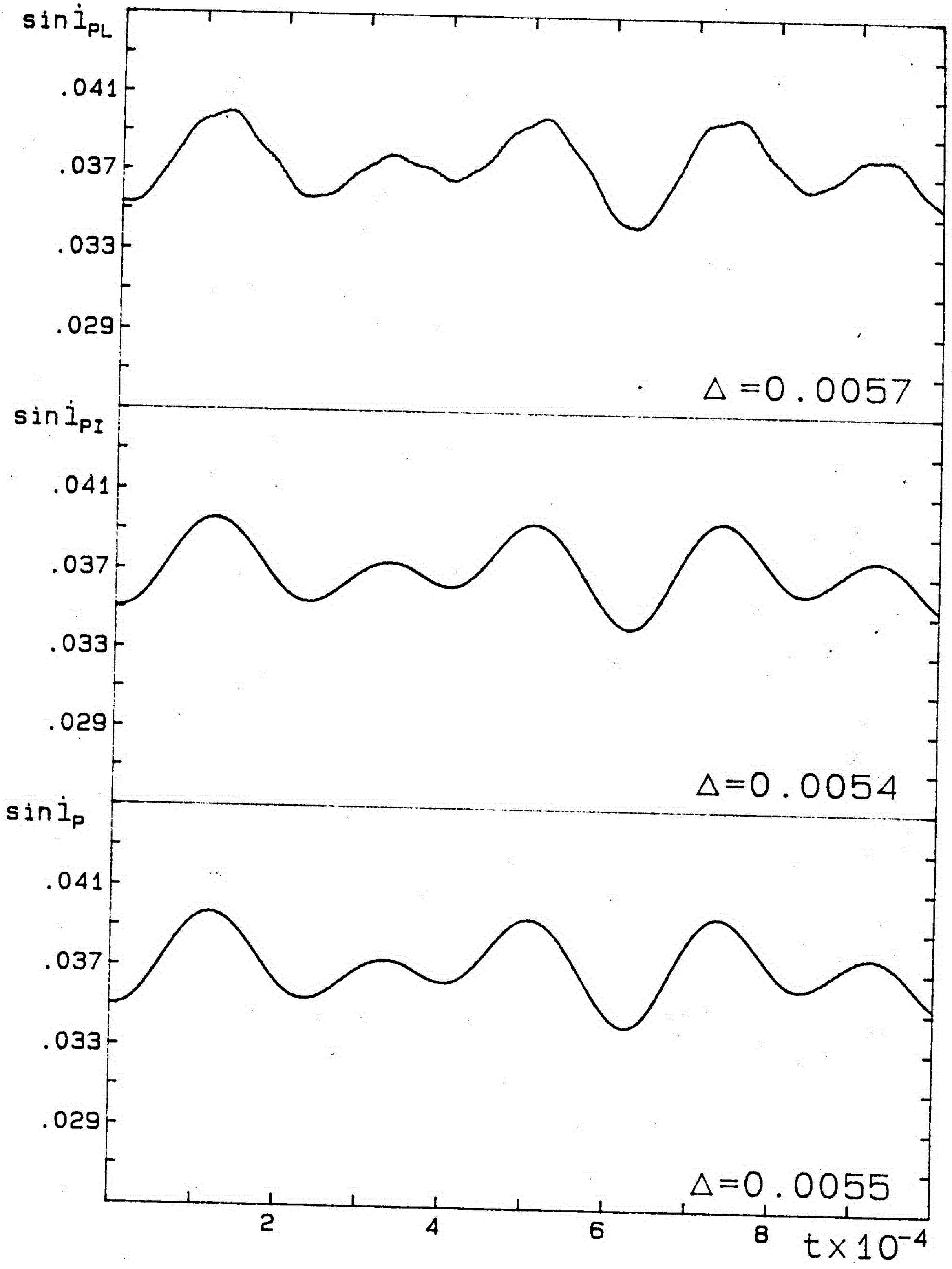
Slika 23. Varijacije oskulatornog, srednjeg i sopstvenog sinusa nagiba za 158 *Koronis*.

pouzdanim teorijama sekularnih poremećaja velikih planeta, ili bliže, u nedovoljno tačnim sekularnim frekvencijama revolucije perihela i čvora Jupitera i Saturna g_{55}, g_{56}, f_{56}. Ove se frekvencije, naime, u našim računima koriste za određivanje srednjih longituda perihela i čvora poremećajnih planeta za svaku konkretnu epohu unutar celog obuhvaćenog intervala vremena, a polazeći uvek od početne epohe, tako da se sa udaljavanjem od početnog trenutka svaka eventualna inicijalna mala greška frekvencije neprestano multiplicira, uvećavajući i greške izvedenih longituda, a što se konačno odražava i na dobijenim sopstvenim vrednostima.

Zato smo na Slikama 24. i 25. ove iste sopstvene elemente ponovo prikazali, ali za jedan kraći vremenski interval i u uvećanoj razmeri, gde se bolje mogu uočiti, oceniti i uporediti kako ukupne varijacije, tako i detalji važni za interpretaciju rezultata i donošenje konačnih sudova. Sa Sl. 22. i 23. neposredno proizilazi da je u ovom slučaju već i samo 10^5 god. sasvim dovoljno za izvođenje relevantnih rezultata, jer se van tog intervala ponavljaju manje-više iste varijacije oskulatornih vrednosti, a i uvećanje amplitude neočišćenih varijacija je zanemarljivo. Ponovo su elementi dobijeni pomoću Yuasa-ine teorije u kompletnoj formi prikazani na donjim graficima (e_P, $sin\ i_P$), a radi potpunijeg uvida na gornjim i srednjim graficima dati su sopstveni elementi izvedeni pomoću klasične, linearne teorije (e_{PL}, $sin\ i_{PL}$), odnosno pomoću Yuasa-ine teorije, ali uzimajući u obzir samo članove prvog reda (e_{PI}, $sin\ i_{PI}$). Ova poslednja varijanta bi trebalo da u izvesnom smislu simulira teoriju *Williams*-a, koja je, kao što



Slika 24. Sopstvene ekscentričnosti za 158 *Koronis* izvedene pomoću linearne teorije (gore), teorije prvog reda (u sredini) i kompletne teorije (dole).



Slika 25. Sopstveni sinusi nagiba za 158 *Koronis* izvedeni pomoću linearne teorije, teorije prvog reda i kompletne teorije.

smo rekli, prvog reda po poremećajnoj masi, pa premda se dve teorije ne podudaraju u potpunosti, može se na osnovu ovih rezultata steći makar i okvirna predstava o tome šta se u principu može očekivati od teorija prvog reda u smislu tačnosti njihovih rezultata.

Očigledan napredak u tačnosti postiže se kod sopstvene ekscentričnosti sa svakim novim korakom u proširivanju i unapređenju teorije, a ukupno poboljšanje meri se približno faktorom dva. Ovaj napredak je u dobroj saglasnosti sa onim ostvarenim u slučaju tri tela, ali su konačne ukupne varijacije u slučaju šest tela znatno veće. Razlike ukupnih varijacija nađenih u okviru ova dva modela su, dakako, prirodne, ali treba reći da su možda i nešto veće od očekivanih (zahvaljujući, naravno, suviše "optimističkim" rezultatima u slučaju tri tela) i da, u stvari, pokazuju u kojoj meri je model tri tela ponekad neadekvatan i daleko od stvarnosti kada su u pitanju precizne analize kretanja malih planeta u dugim vremenskim intervalima. Linearna teorija je dala sopstvene ekscentričnosti relativno slabe tačnosti, a značajan doprinos u tom smislu daju neodstranjene kratko-periodične varijacije. Kod sopstvenih ekscentričnosti prvog reda, kao i kod konačnih sopstvenih ekscentričnosti, oko epoha $5 \cdot 10^3$ god., $2.5 \cdot 10^4$ god. i $6.3 \cdot 10^4$ god. javljaju se izvesni karakteristični, na sreću ne suviše veliki, poremećaji za koje se lako može utvrditi da su posledica pojave izuzetno malih oskulatornih, a odatle i srednjih ekscentričnosti (vidi Sl. 22.). Premda se u našim jednačinama kretanja, zahvaljujući tome što koristimo kanoničke promenljive, ne javljaju singulariteti tipični za jednačine

promena eliptičkih elemenata (male ekscentričnosti i nagibi u imeniocima faktora uz parcijalne izvode funkcije poremećaja), zbog insistiranja da se pri prikazivanju rezultata držimo upravo uobičajenih eliptičkih elemenata, pri prelazu sa jednih promenljivih na druge javljaju se u ovakvim slučajevima problemi. Srednji elementi oko pomenutih epoha dobijaju se zato sa bitno umanjenom tačnošću (čak su neke od izvedenih vrednosti bile neznatno manje od nule; zaokružene, međutim, na nulu one su prikazane na x-osi), a to onda utiče i na određivanje sopstvenih ekscentričnosti. Ipak, obzirom da čitava stvar ima uglavnom sporadičan karakter i da su odstupanja koja se tu javljaju mala ($\leq 2 \cdot 10^{-3}$), to je i njihov doprinos ukupnoj varijaciji sopstvene ekscentričnosti marginalan.

Možda nije naodmet pozabaviti se upravo ovde nešto bliže fizičkim smislom i implikacijama definicije ukupne varijacije sopstvenog elementa - veličine koju smo uveli kao meru tačnosti naših rezultata. Pitanje je, naime, šta u konkretnom slučaju znači ta ukupna varijacija sopstvene ekscentričnosti *Koronisa* od približno $7 \cdot 10^{-3}$, i to kako sa aspekta tačnosti primenjene teorije, tako i sa aspekta pouzdanosti sopstvenih elemenata kao parametara klasifikacije malih planeta u familije. Napomenimo, uzgred, da uobičajene mere tačnosti, kao srednja kvadratska greška, standardna devijacija i sl., nisu mogle da se koriste u našoj analizi, jer nas, zbog potreba klasifikacije u familije, interesuju baš maksimalna odstupanja. Takođe, amplitude kao mere maksimalnih odstupanja ne bi odgovarale, jer se kod naših rezultata najčešće radi o više superponiranih kvazi-periodičnih promena, pa amplituda ukupne promene često varira od ciklusa do

ciklusa.

Prilično je očigledno da ukupna varijacija sopstvene ekscentričnosti *Koronisa* od $7 \cdot 10^{-3}$ znači, u stvari, da će se određivanjem sopstvenih elemenata za bilo koju epohu unutar obuhvaćenog intervala, za male planete u *Koronisovom* susedstvu u faznom prostoru elemenata kretanja, dobiti sopstvene ekscentričnosti čija odstupanja od tačnih vrednosti ne prelaze $3\text{-}4 \cdot 10^{-2}$. Možda je, međutim, nešto manje jasno da ovaj rezultat ima vremenski ograničeno važenje, koje se proteže na možda svega nekoliko miliona godina. Kao što je poznato, naime, međusobna dejstva velikih poremećajnih planeta, koja na ovom nivou tačnosti mogu da imaju izvesne reperkusije na sopstvene elemente, kao i još nedovoljno ispitani uticaji sekularnih rezonanci, imaju u nekim slučajevima periode reda 10^6, pa čak i 10^7 god. (*Milani et al.*, 1987; *Carpino et al.*, 1987). Ako, dakle, familije malih planeta nisu sasvim mladi objekti, što sudeći po dinamičkim i kosmohemijskim dokazima nije slučaj (*Farinella et al.*, 1989), ili ako se van ispitanog vremenskog raspona kod putanja dešavaju promene koje se na osnovu raspoloživog materijala ne mogu sa sigurnošću predvideti, bilo kako da je pouzdana metoda klasifikacije malih planeta u familije, čak i uz korišćenje najboljih danas raspoloživih sopstvenih elemenata, teško da mogu da se obezbede valjane, precizno razgraničene i jednoznačno definisane familije.

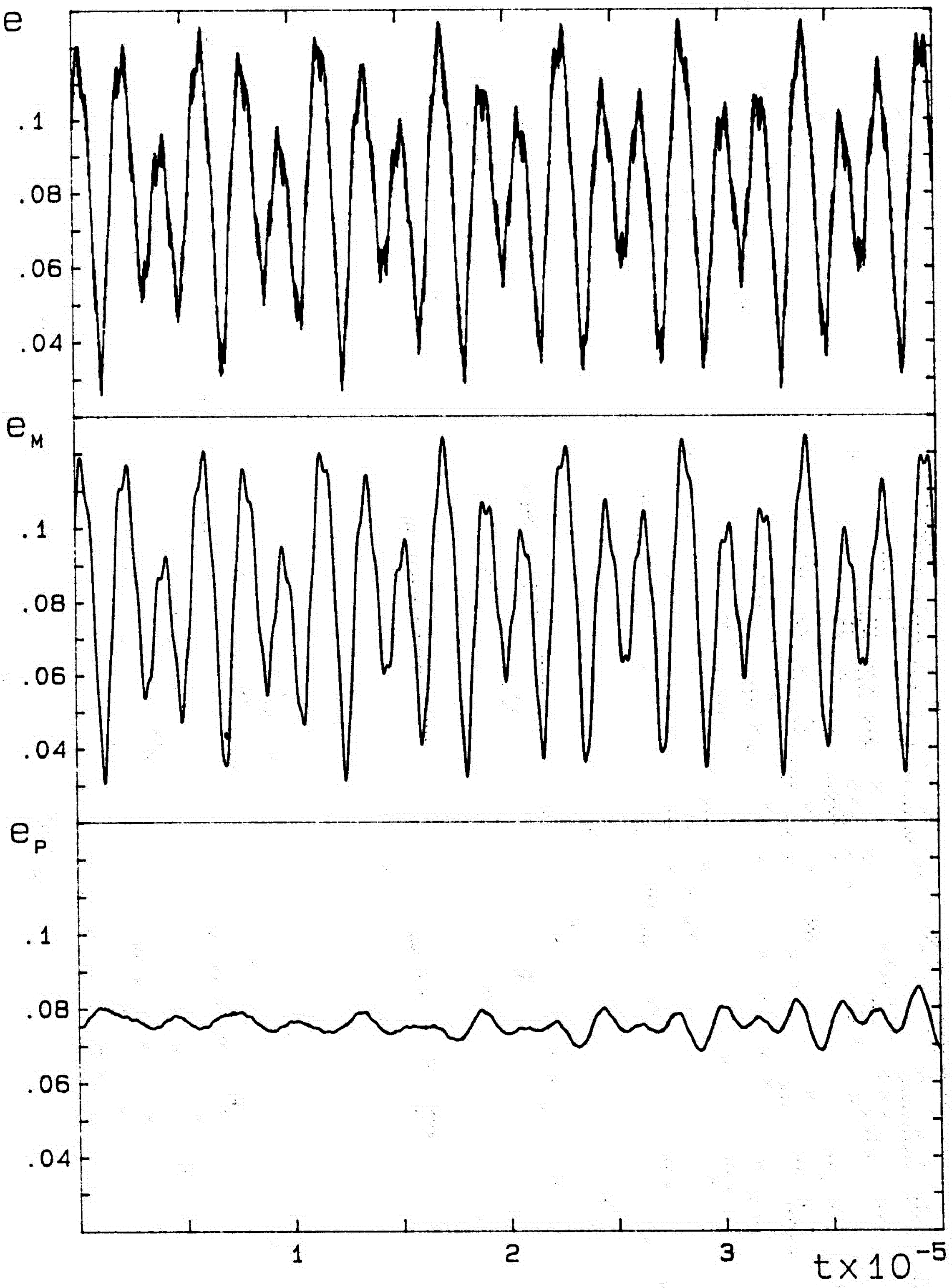
Kod sopstvenog nagiba situacija je sasvim različita od one kod ekscentričnosti. Obzirom na već pomenute male vrednosti oskulatornog i srednjeg nagiba, pa zato i zanemarljive kratko-periodične poremećaje, sopstvene vrednosti izvedene pomoću

linearne teorije, Yuasa-ine teorije prvog reda i kompletne Yuasa-ine teorije, pokazuju i solidnu tačnost i praktično zanemarljive međusobne razlike. Ako pažljivije pogledamo grafik koji prikazuje sopstvene nagibe izvedene pomoću linearne teorije, naći ćemo da je na osnovnu neočišćenu varijaciju superponirana još jedna dopunska varijacija nešto kraće periode, koje nema na ostala dva grafika. Očigledno se radi o najvećoj varijaciji prvog reda i četvrtog stepena, čija amplituda je reda 10^{-4}, pa se može zaključiti da, uopšte uzev, članovi prvog reda i četvrtog stepena ovde nemaju skoro nikakvog uticaja na konačni rezultat. Upoređenjem, nadalje, rezultata dobijenih pomoću teorije prvog reda i pomoću kompletne teorije lako zaključujemo da su i poremećaji drugog reda isto tako reda 10^{-4}. No, oni upravo za toliko uvećavaju ukupnu varijaciju sopstvenog nagiba i na taj način zapravo kvare konačni rezultat !? Ovu, na prvi pogled, paradoksalnu pojavu lako je razumeti u svetlu činjenice da je preostala ukupna varijacija sopstvenog nagiba znatno veća od ovog "anomalnog" efekta, što zapravo znači da neki važniji uticaji, mnogo veći od ovog uopšte nisu uzeti u obzir. Ovi uticaji, pak, imaju upravo takve periode i faze da stvaraju privid pogrešnog i kontraproduktivnog dejstva uzimanja u obzir poremećaja drugog reda. Stoga i otklanjanje ovih uticaja, kao što ćemo videti nešto kasnije, uklanja i pomenuti privid. Naravno, ova diskusija ima samo načelan značaj, jer su, da ponovimo, dugo-periodični poremećaji drugog reda u slučaju nagiba mali i zaista praktično i potpuno zanemarljivi.

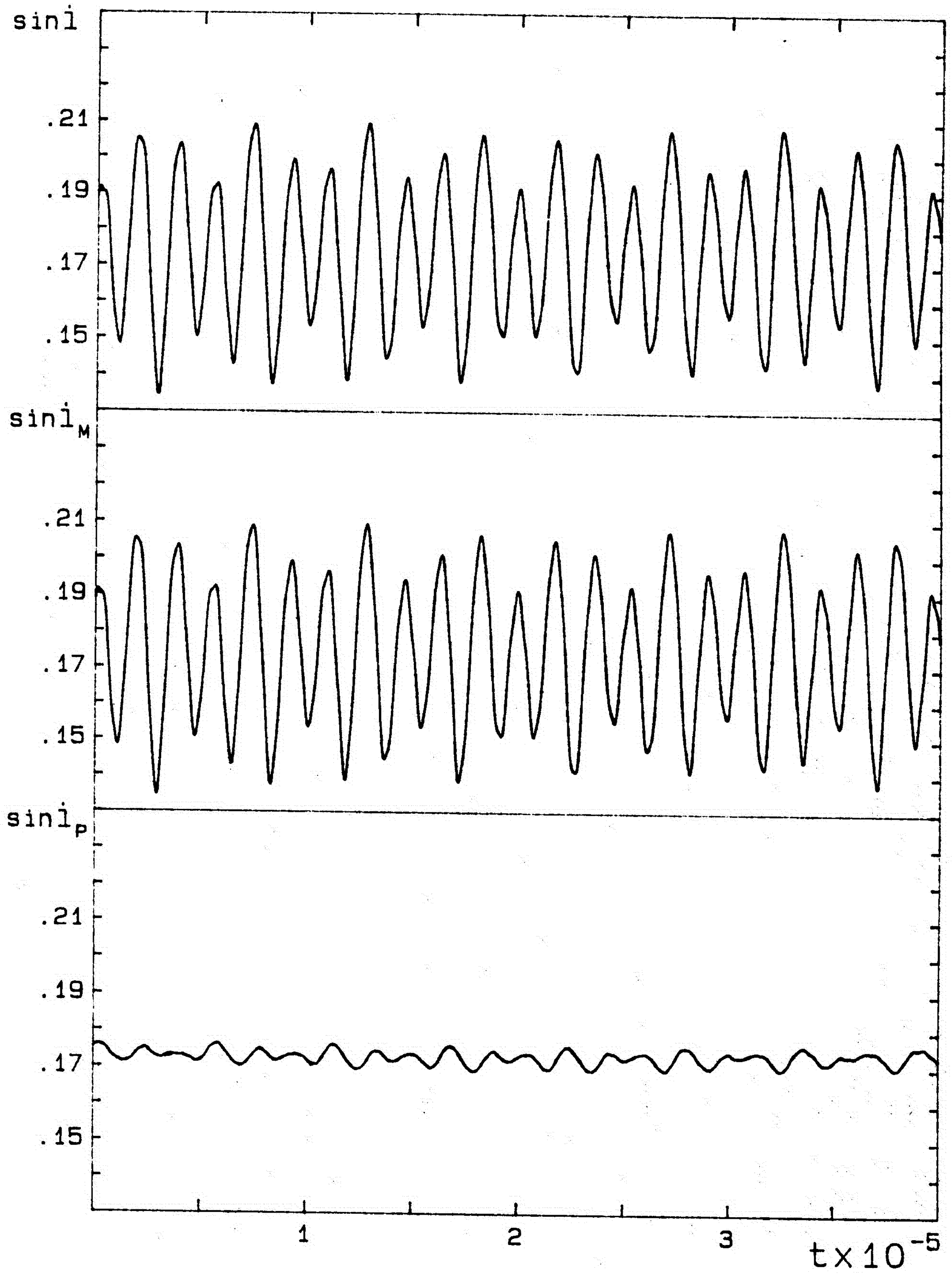
5.3.2.2 *Eos*

Putanja male planete 221 *Eos* ima relativno malu ekscentričnost, čije oskulatorne i srednje vrednosti u periodu od $4 \cdot 10^5$ god. variraju u intervalu od 0.02 - 0.13, ali i umereno veliki nagib, za koji odgovarajuće vrednosti sinusa idu i preko 0.2. Zato ovde treba očekivati nešto veće razlike rezultata raznih varijanti teorije, a interesantno je videti i kakvog to uticaja ima na tačnost izvedenih sopstvenih elemenata.

Na Slikama 26. i 27. predstavljene su oskulatorne, srednje i sopstvene vrednosti ekscentričnosti, odnosno sinusa nagiba, pa možemo konstatovati da su, kao i kod *Koronisa*, kratko-periodični poremećaji ekscentričnosti znatno veći nego oni nagiba i da, grubo uzev, na dugo-periodičnu varijaciju superponiraju šum od nekih $\pm 4 \cdot 10^{-8}$. Grafici na kojima su predstavljeni srednji elementi pokazuju, međutim, da su u oba slučaja ti kratko-periodični članovi efikasno odstranjeni i da je postignuta tražena visoka tačnost srednjih vrednosti. Kod srednje ekscentričnosti, s druge strane, lako je uočiti nešto složeniju strukturu dugo-periodičnih varijacija, sa jasno izraženim malim oscilacijama koje, kako je već napomenuto u analizi rezultata u slučaju tri tela, odgovaraju članovima prvog reda i četvrtog stepena. Sopstvene vrednosti opet pokazuju relativno visok stepen konstantnosti i dugo-periodične stabilnosti, a male preostale varijacije izgledaju približno isto kao i kod *Koronisa*. Jedinu razliku u tom smislu predstavlja izvesni, jedva primetni trend opadanja sopstvene ekscentričnosti, koja svoj minimum dostiže oko epohe $2 \cdot 10^5$ god.



Slika 26. Varijacije oskulatornih (gore), srednjih (u sredini) i sopstvenih (dole) ekscentričnosti za 221 *Eos*.

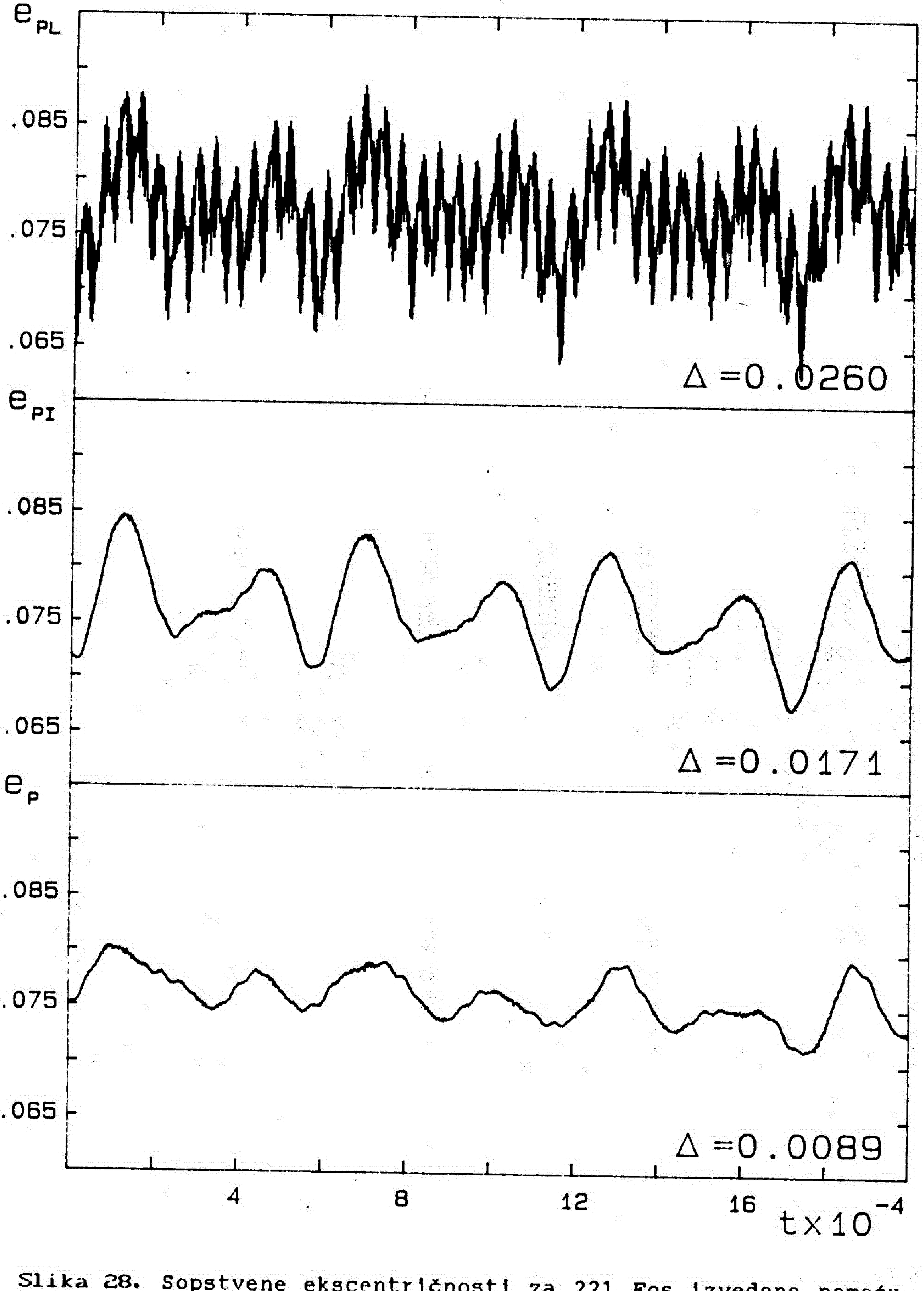


Slika 27. Varijacije oskulatornog, srednjeg i sopstvenog sinusa nagiba za 221 Eos.

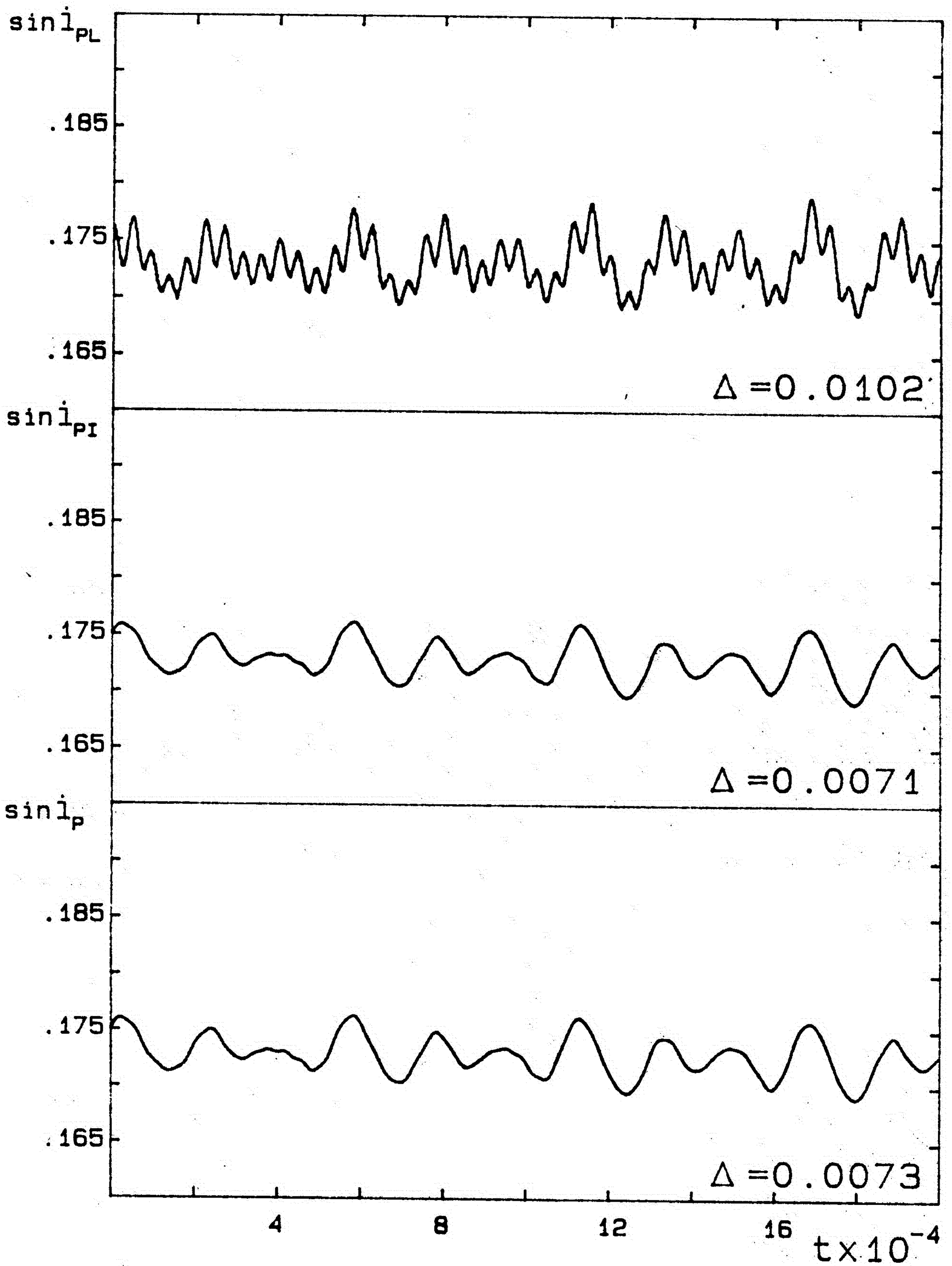
a zbog čega je i upoređenje sopstvenih vrednosti izvedenih pomoću tri opisane varijante teorije neophodno izvršiti na ovom nešto dužem vremenskom intervalu nego u slučaju *Koronisa*. U manjoj meri će tako, doduše, na ocenu tačnosti, naročito sopstvene ekscentričnosti, uticati efekat uvećanja amplitude zbog nagomilavanja greške u longitudama perihela i čvora Jupitera, ali taj uticaj srećom (zahvaljujući povoljnom rasporedu faza neodstranjenih oscilacija) u ovom slučaju nije bitan. Naravno, trend o kojem je reč samo je deo neke varijacije male amplitude i izuzetno dugog perioda (sekularna rezonanca ?), čiju kompletnu oscilaciju vremenski interval naše integracije nije u potpunosti obuhvatio.

Slike 28. i 29. na kojima su u uvećanoj razmeri date sopstvene ekscentričnosti i nagibi izvedeni pomoću tri varijante teorije, pokazuju da je u svih šest slučajeva tačnost sopstvenih elemenata *Eosa* uglavnom znatno lošija od one postignute kod *Koronisa*. To, naravno, znači da i u pogledu tačnosti sopstvenih ekscentričnosti nešto veći nagib *Eosa* ima određenog uticaja na konačne rezultate, iako su očigledno relevantni poremećajni članovi uzeti u obzir u kompletnoj teoriji.

Sopstvene ekscentričnosti izvedene pomoću linearne teorije, pored toga što su opterećene znatnim nivoom kratko-periodičnog šuma, imaju i tu karakterističnu osobinu da su im neočišćene dugo-periodične varijacije komponovane od praktično samo dva dominantna poremećajna efekta - jednog sa periodom od oko $2 \cdot 10^4$ god. i drugog sa periodom od $4 \cdot 10^4$ god. Oba ova efekta opisana su i objašnjena već i u slučaju tri tela



Slika 28. Sopstvene ekscentričnosti za 221 Eos izvedene pomoću linearne teorije (gore), teorije prvog reda (u sredini) i kompletne teorije (dole).



Slika 29. Sopstveni sinusi nagiba za 221 *Eos* izvedeni pomoću linearne teorije, teorije prvog reda i kompletne teorije.

(Sl. 19.); prvi je, naravno, u vezi sa revolucijom perihela *Eosove* putanje, a drugi odgovara najvećem članu prvog reda i četvrtog stepena. "Linearni" sopstveni nagib takođe kontrolišu isti zaostali dugo-periodični poremećajni efekti, dok su kratko-periodični efekti doduše nešto veći nego kod *Koronisa*, ali i dalje ukupno sasvim zanemarljivi.

Uopšte uzev, a to potvrđuju i grafici koji prikazuju sopstvene elemente izvedene pomoću teorije prvog reda, članovi prvog reda i četvrtog stepena, u skladu sa očekivanjima, igraju daleko značajniju ulogu u slučaju *Eosa* nego kod *Koronisa*. No, u teoriji prvog reda je važna oscilacija sa periodom od $4 \cdot 10^{-3}$ god. u potpunosti odstranjena kod oba elementa i premda, a naročito kod sopstvene ekscentričnosti, ukupna varijacija i dalje nije baš mala, ostvaren je značajan napredak u tačnosti u odnosu na rezultate linearne teorije. Nadalje, a što se može zaključiti na osnovu upoređenja rezultata teorije prvog reda i kompletne teorije, članovi prvog reda i četvrtog stepena su u slučaju sopstvenog nagiba daleko značajniji i od odgovarajućih članova drugog reda, za koje, uzgred budi rečeno, ponovo registrujemo prividno kontraproduktivni efekat, uočen i objašnjen već kod *Koronisa*. Što se, međutim, sopstvene ekscentričnosti tiče, članovi drugog reda daju i te kako značajan doprinos ukupnoj varijaciji, pa se njihovim eliminisanjem ostvaruje bitan napredak u tačnosti i dugo-periodičnoj stabilnosti rezultata. Iako, dakle, ukupno nešto lošiji nego kod *Koronisa*, konačni rezultati za *Eos* mogu se još uvek smatrati manje-više zadovoljavajućim.

Osvrnimo se kratko i na upoređenje ovih rezultata sa

rezultatima dobijenim u slučaju tri tela. Kao što smo već mogli i pretpostaviti, model tri tela se i u ovom slučaju pokazao kao potpuno neadekvatan za izučavanje karaktera kretanja male planete u dugim vremenskim razmacima, a naročito kada su u pitanju iole finiji efekti u tom kretanju i kada se traži visoka tačnost rezultata. Suviše "optimistički" rezultati dobijeni u okviru tog modela nedvosmisleno ukazuju na njegovu preveliku uprošćenost, a to daje iskrivljenu sliku o dinamičkim procesima koji nas ovde interesuju i može da dovede do potpuno pogrešnih zaključaka.

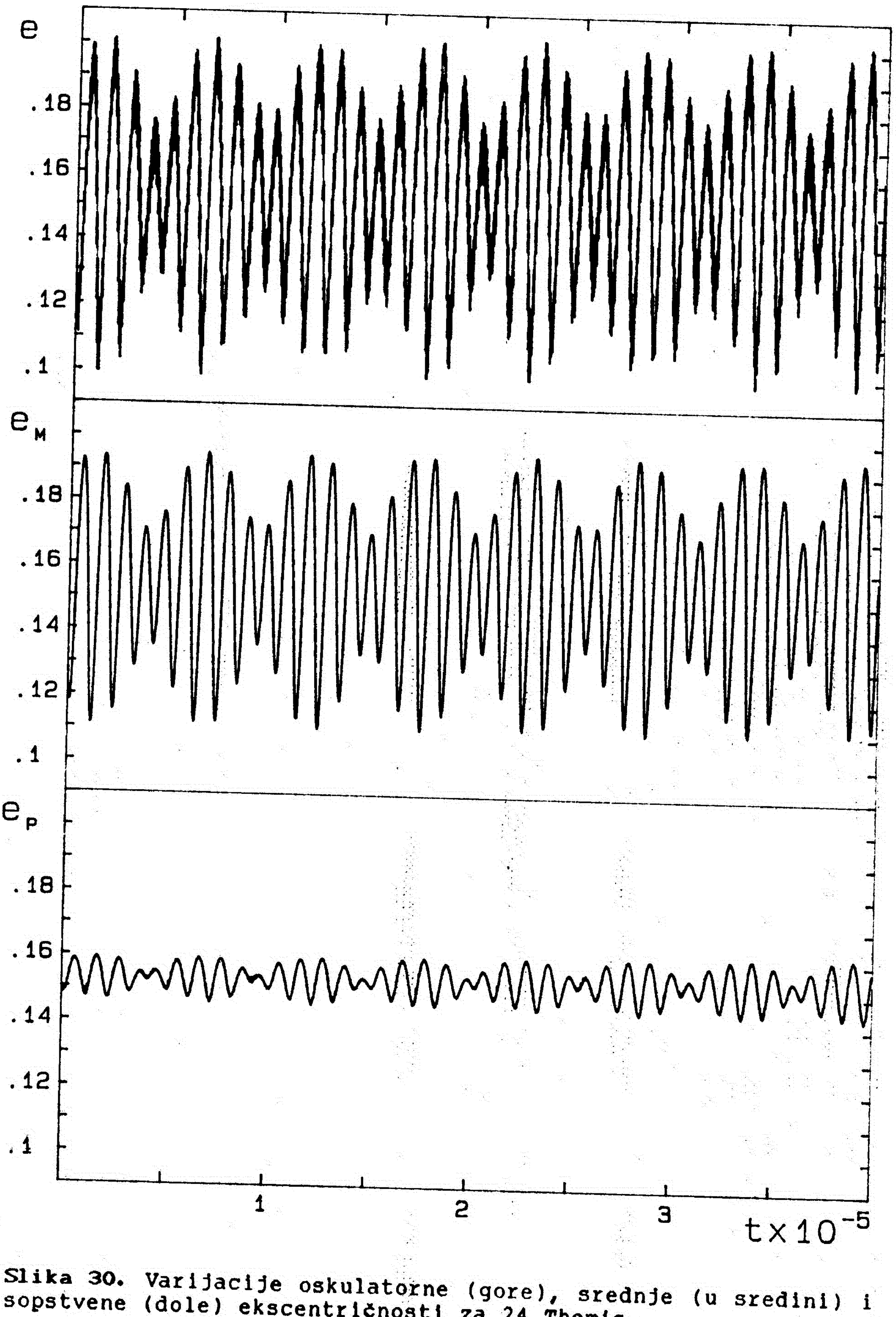
Pomenimo na kraju da je sada već sasvim jasno da u realnom slučaju ni jedna od postojećih teorija sekularnih poremećaja, pa ni naša nova teorija višeg reda i stepena, ne može da dâ sopstvene ekscentričnosti i nagibe sa greškom na nivou jednog hiljaditog, o čemu smo govorili na samom početku. No, isto tako je jasno da je ostvaren značajan napredak i da smo se dosta primakli toj granici. Sem toga, tačno nam je poznato koliko smo još od nje daleko, što nam može pomoći u nastojanju da nađemo prave puteve za postizanje ovog cilja.

5.3.2.3 *Themis*

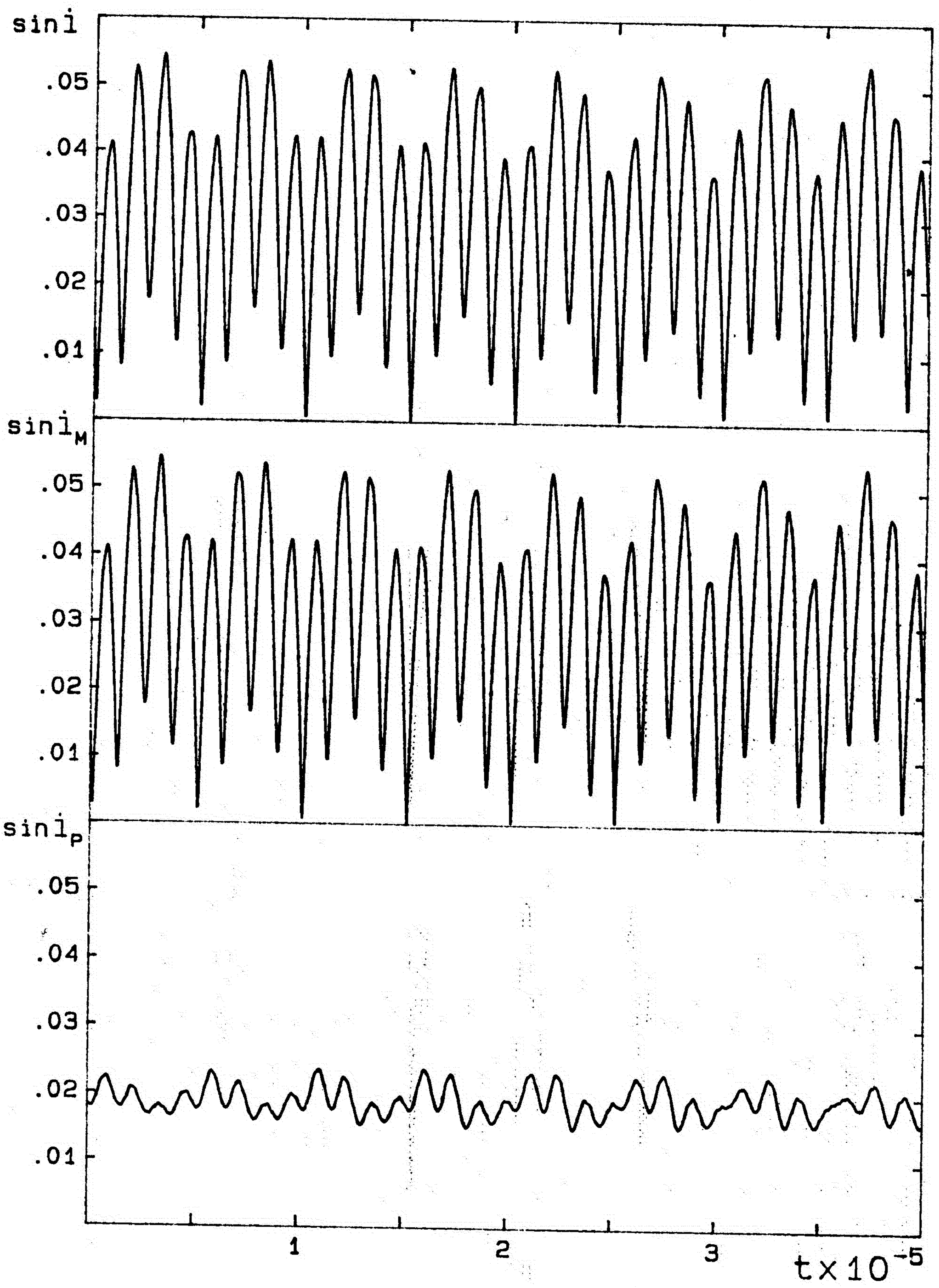
24 *Themis* je mala planeta sa putanjom umerene ekscentričnosti ($0.1 \leq e \leq 0.2$) i malog nagiba ($\sin i \leq 0.05$), ali koja se, kao što je već napomenuto, nalazi u blizini rezonance 2:1 u srednjem kretanju. Rezonantni član sa periodom od oko 86 god. izaziva poremećaje čiji značaj i efekte u vezi s kratko-periodičnim uticajima na kretanje malih planeta smo opisali u glavi 5.2, analizirajući tačnost s kojom je u okviru

Yuasa-ine teorije određena srednja (≡ sopstvena) velika poluosa *Themisa*. Ova rezonanca, međutim, ima velikog udela i u "naduvavanju" odstupanja frekvencije g_o slobodnih oscilacija ekscentričnosti određene na osnovu linearne teorije od odgovarajuće tačne vrednosti, čemu smo, inače, pripisali probleme sa sopstvenom ekscentričnošću *Themisa* izvedenom u slučaju tri tela pomoću teorije višeg reda i stepena.

Pogledajmo, dakle, šta se dešava sa rezultatima za *Themis* u slučaju šest tela. Na Slikama 30. i 31. predstavljene su, na već uobičajen način, oskulatorne, srednje i sopstvene vrednosti ekscentričnosti i sinusa nagiba *Themisa* u periodu od $4\cdot10^5$ god. Odmah se uočava da je dominantni poremećajni uticaj kod oba elementa povezan sa revolucijom perihela ($P \simeq 10^4$ god.), odnosno čvora ($P \simeq 1.5\cdot10^4$ god.), ali i da u oba slučaja ovu osnovnu varijaciju modulira još jedna, znatno dužeg perioda, koji iznosi negde oko $5\cdot10^4$ god. Kratko-periodične promene oskulatorne ekscentričnosti dostižu čak 0.02, ali se i pored toga uspešno odstranjuju, a dobijene srednje ekscentričnosti očigledno su visoke tačnosti. Na žalost, ovo poslednje se ne bi moglo reći i za odgovarajuće sopstvene vrednosti. Zahvaljujući u određenoj meri i relativno velikoj ekscentričnosti putanje *Themisa*, odnosno odgovarajućoj grešci prouzrokovanoj zanemarivanjem dela razvoja funkcije poremećaja u red, zaostale varijacije sopstvene ekscentričnosti znatno su veće nego kod *Koronisa* i *Eosa*, a interesantno je primetiti da u kvalitativnom smislu praktično preslikavaju varijacije oskulatornih, odnosno srednjih vrednosti. Pomenuli smo već i kod prethodnih slučajeva ovu korelaciju, pa možemo reći da se, uopšte uzev, stiče utisak



Slika 30. Varijacije oskulatorne (gore), srednje (u sredini) i sopstvene (dole) ekscentričnosti za 24 *Themis*.

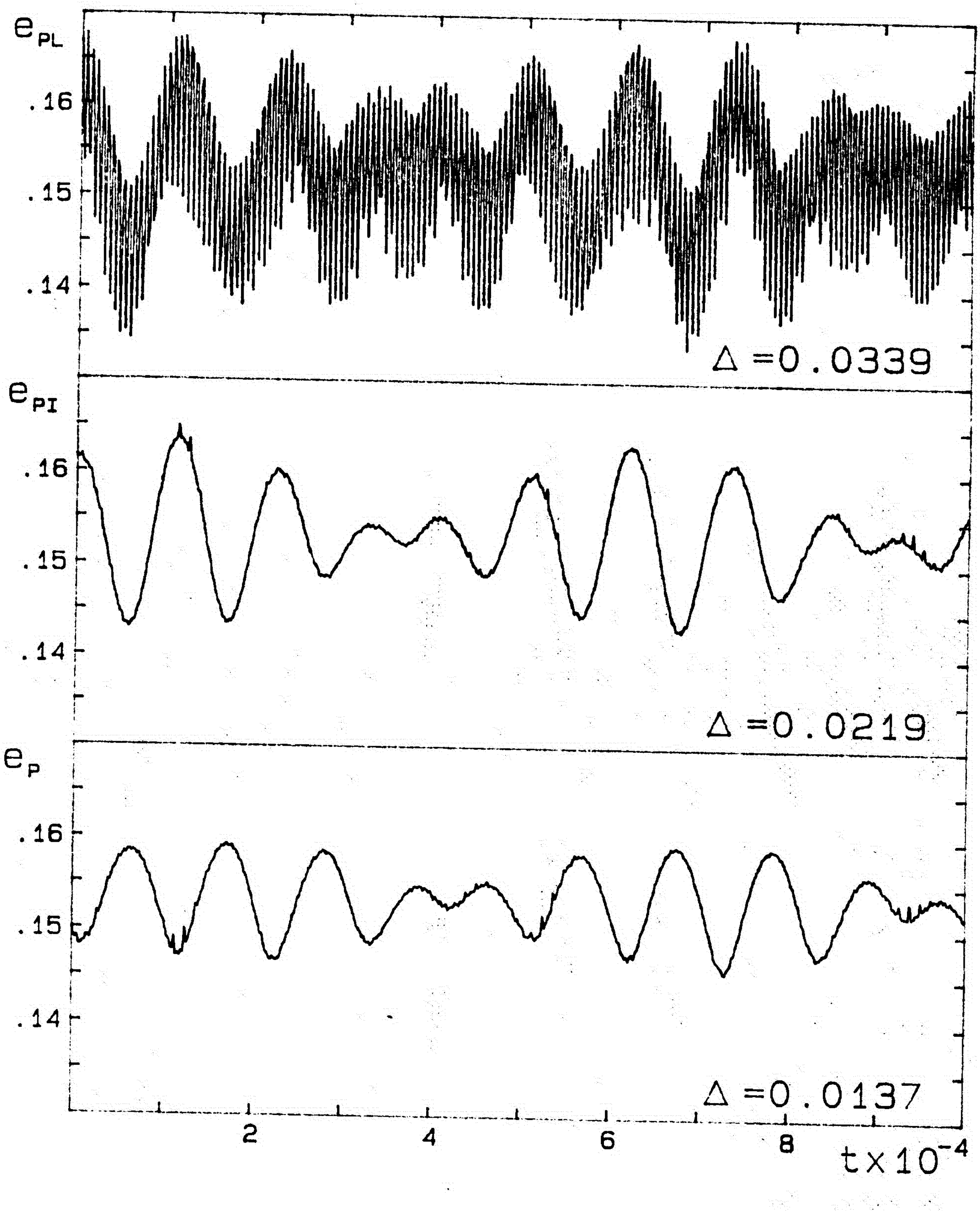


Slika 31. Varijacije oskulatornog, srednjeg i sopstvenog sinusa nagiba za 24 *Themis*.

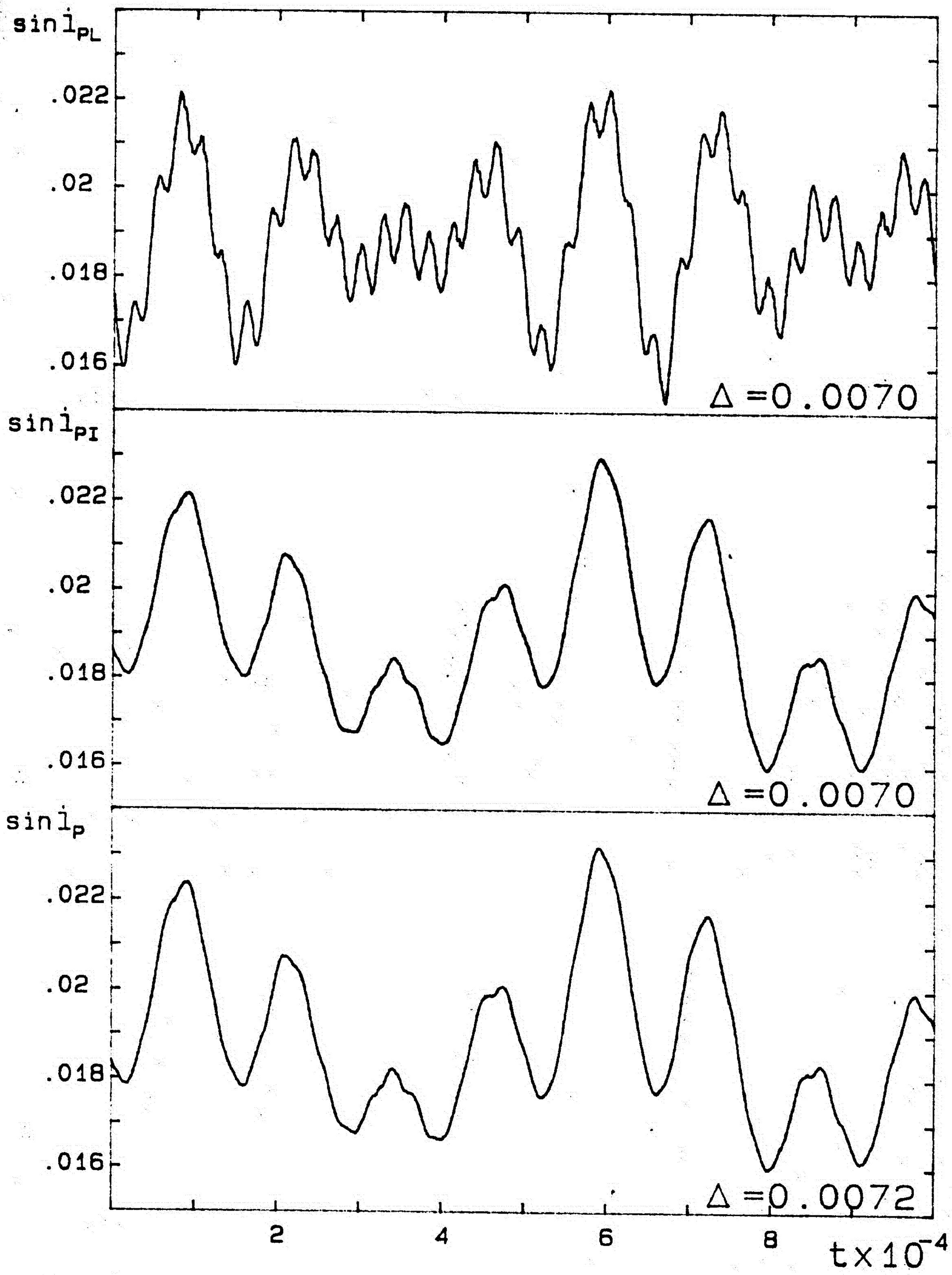
da se u proceduri obračuna dugo-periodičnih poremećaja upravo ti glavni efekti ne odstranjuju u potpunosti, već im se samo smanjuju amplitude. Slično važi i za nagib, s tim što ovde kratko-periodični poremećaji ne igraju gotovo nikakvu praktičnu ulogu, pa varijacije oskulatornih i srednjih vrednosti izgledaju gotovo isto. Takođe, tačnost sopstvenih vrednosti nagiba bolja je od one postignute kod ekscentričnosti i, kao što ćemo se ubrzo uveriti, sasvim uporedljiva sa odgovarajućom tačnošću postignutom kod *Koronisa* i *Eosa*.

Zanimljivo je da sopstveni nagib kod *Themisa* dosta odstupa od prosečne oskulatorne vrednosti; dok se sopstveni sinus nagiba uglavnom vrti oko vrednosti 0.02, približna srednja vrednost oskulatornih i srednjih vrednosti mogla bi se proceniti na nekih 0.03. Naravno, ovde se radi o tome da je nagib putanjske ravni *Themisa* izrazito mali i da su otud maksimalne vrednosti oskulatornog sinusa nagiba uporedljive sa vrednostima prinudnih oscilacija, što, sa svoje strane, dovodi do toga da sopstvene vrednosti moraju biti male i ne obavezno bliske prosečnim poremećenim vrednostima (vidi Sl. 1.). Ne treba, naravno, ni pominjati kakvu ulogu u tome ima već pomenuti problem netačne frekvencije g_o, koja se, da podsetimo, javlja i u imeniocima članova što opisuju prinudne oscilacije.

Vrlo interesantne zaključke moguće je izvesti na osnovu Slika 32. i 33., na kojima su sopstvene vrednosti izvedene pomoću tri varijante teorije prikazane u uvećanoj razmeri i u ovde opet dovoljno dugom intervalu od 10^5 god. Pre svega, pomenimo da svoj kvantitativni izraz i potvrdu nalazi gore pomenuto zapažanje o relativno velikoj zaostaloj ukupnoj



Slika 32. Sopstvene ekscentričnosti za 24 *Themis* izvedene pomoću linearne teorije (gore), teorije prvog reda (u sredini) i kompletne teorije (dole).



Slika 33. Sopstveni sinusi nagiba za 24 *Themis* izvedeni pomoću linearne teorije, teorije prvog reda i kompletne teorije.

varijaciji sopstvene ekscentričnosti, što bi se moglo, u izvesnom smislu, okvalifikovati i kao nezadovoljavajući rezultat. Ipak, nešto povoljniji utisak o ovom rezultatu može se steći na osnovu njegovog upoređenja sa rezultatima linearne teorije, odnosno teorije prvog reda i četvrtog stepena. Veliki kratko-periodični poremećaji, kako se na Sl.32. jasno vidi, čine linearne sopstvene ekscentričnosti veoma nestabilnim i doprinose njihovoj ukupnoj varijaciji sa oko 30%. Za razliku od slučaja tri tela, ovde je, dakle, rezultat kompletne Yuasa-ine teorije bolji od odgovarajućeg rezultata linearne teorije, a ista konstatacija ostaje na snazi čak i kada linearnu teoriju primenimo polazeći od srednjih, a ne oskulatornih elemenata, kako je to bilo urađeno i u slučaju tri tela (u tom slučaju ukupna varijacija sopstvene ekscentričnosti iznosi $\Delta = 0.0186$). S druge strane, naravno, i ovde pogrešno g_o utiče na tačnost, inače relativno malih, članova prvog reda i četvrtog stepena, pa je i razlika ukupnih varijacija sopstvene ekscentričnosti dobijenih pomoću linearne teorije primenjene na srednje elemente i pomoću teorije prvog reda takođe mala, ali i taj ukupan efekat članova četvrtog stepena ima opet prividno kontraproduktivno dejstvo. No, ovde imamo lep primer slučaja u kojem se lako može pokazati da se zaista radi o prividu, jer, ako uočimo da su varijacije sopstvenih ekscentričnosti dobijenih pomoću kompletne teorije invertovane u odnosu na one dobijene pomoću teorije prvog reda, tako da maksimumima na jednoj krivoj odgovaraju minimumi na drugoj i obrnuto, sledi jasan zaključak da su poremećaji ekscentričnosti *Themisa* drugog reda, prvo, znatno veći od onih prvog reda i četvrtog stepena,

a zatim i da ovi poslednji, delujući u suprotnom smeru, deluju zapravo produktivno i smanjuju ukupnu varijaciju koju bismo inače imali, uzimajući u obzir napr.samo (pogrešne, prevelike) članove drugog reda.

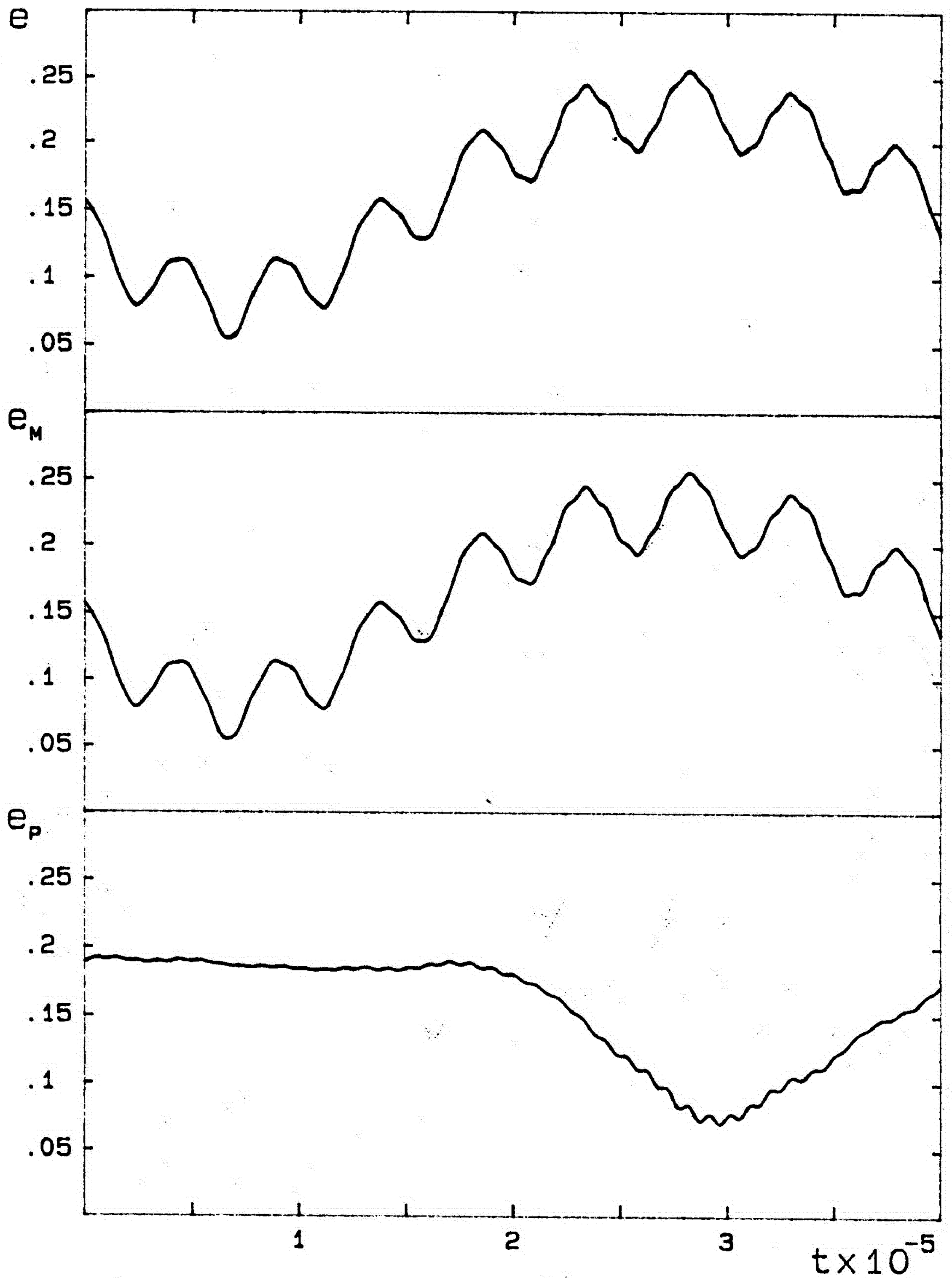
Na donja dva grafika Slike 32., koji prikazuju sopstvene ekscentričnosti izvedene uz prethodno odstranjivanje kratko-periodičnih poremećaja, jasno se uočavaju mala odstupanja od generalnog toka varijacija ("zupci"), koji dostižu maksimalno $2 \cdot 10^{-3}$ i koji se gusto nižu duž cele krive. Očigledno se radi o rezonantnim efektima 2:1 člana sa periodom od 86 god. opisanim već u okviru analize tačnosti srednjih ekscentričnosti (Sl. 6. i 10.), a čemu ide u prilog i činjenica da na odgovarajućim graficima za nagib (Sl. 33.) ovih odstupanja nema (kao ni na Sl. 7. i 11.). Interesantno je otuda primetiti da, u skladu sa očekivanjima, a kao što smo se u prethodnom mogli uveriti, rezonanca 2:1 u srednjem kretanju ima znatno veći uticaj na varijacije ekscentričnosti preko dugo-periodičnih efekata drugog reda, nego neposredno, u sklopu kratko- periodičnog efekta.

Što se sopstvenog nagiba *Themisa* tiče, u vezi upoređenja rezultata tri teorije nema nešto posebno da se kaže. Poremećaj četvrtog stepena sa periodom od oko $2.5 \cdot 10^{8}$ god. koji se uočava kod "linearnog" sopstvenog nagiba, uspešno je odstranjen kod proširene teorije, ali to, sticajem okolnosti, ne utiče na ukupnu varijaciju. Opet poremećaji drugog reda naizgled deluju u smislu pogoršavanja tačnosti konačnog rezultata, ali su takođe opet praktično zanemarljivi. Solidna konačna ukupna varijacija obezbeđuje da, bar kad su ovaj element u pitanju,

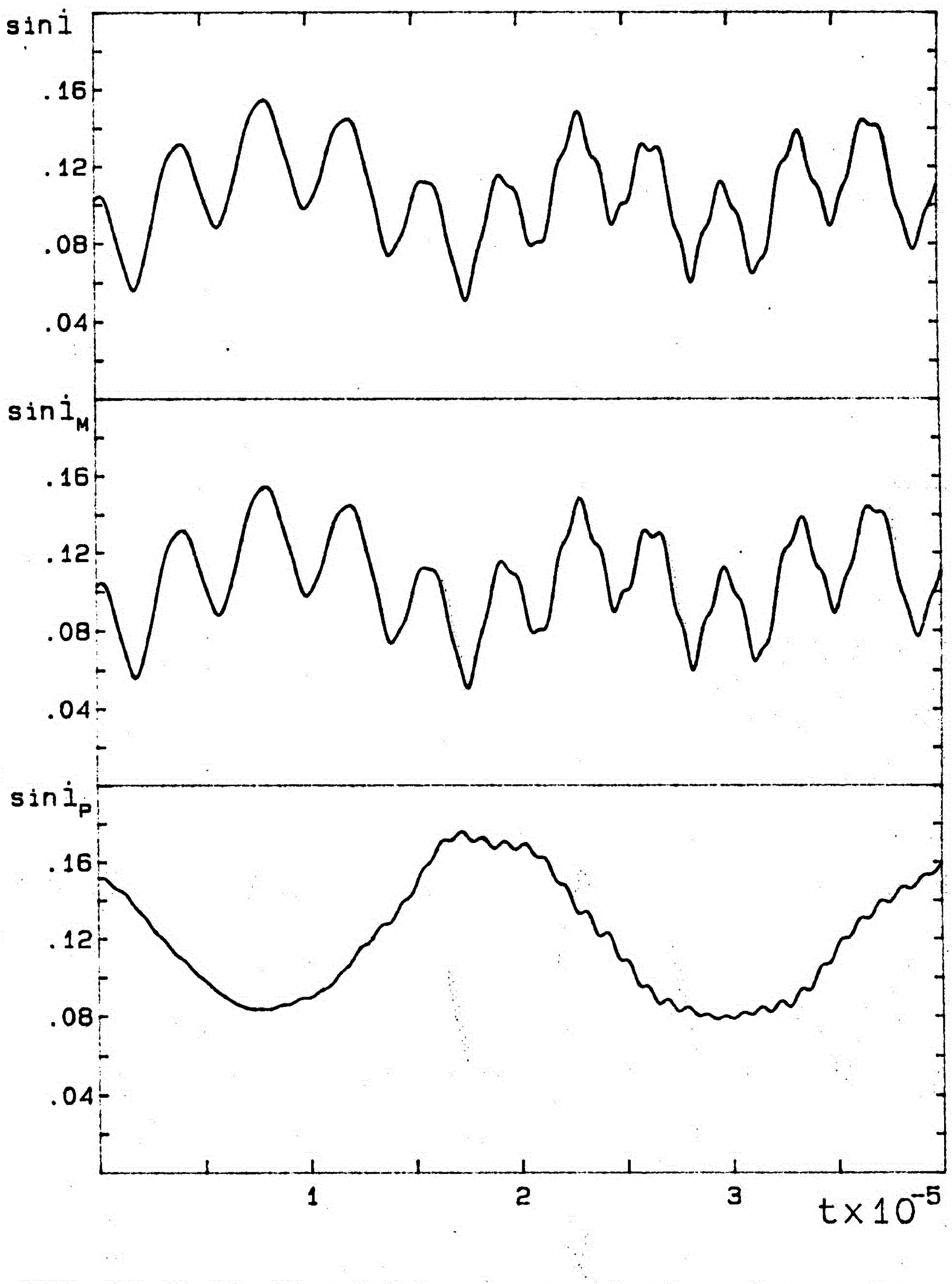
rezultati mogu da se smatraju relativno dobrim, no, ukupno uzev, rezultati određivanja sopstvenih elemenata za *Themis* nisu baš najbolji. Problem pouzdane identifikacije članova familije *Themis* ni sa novim sopstvenim elementima neće biti lako rešiti, a i ovako velika "neuravnoteženost" grešaka sopstvenih elemenata, koji inače služe za izvođenje komponenata relativne brzine fragmenata u odnosu na roditeljsko telo familije, nepovoljno može da se odrazi na rešavanje pitanja rekonstrukcije polja relativne brzine za ovu familiju, jer može da unese dopunsku, veštačku asimetriju u polje relativnih brzina i time dovede do konfuzije i pogrešnih zaključaka.

5.3.2.4 *Flora*

Videli smo u slučaju tri tela da su rezultati određivanja sopstvenih elemenata pomoću teorije višeg reda i stepena za malu planetu 8 *Flora*, zahvaljujući umerenoj ekscentričnosti i nagibu njene putanje, odnosno njenoj relativno velikoj udaljenosti od Jupitera, bili izuzetno dobri. Premda je integracijom u intervalu od $3 \cdot 10^4$ god. pokriveno tek nešto oko 75% perioda revolucije (određenog na osnovu linearne teorije) perihela, odnosno čvora *Florine* putanje, karakter nađenih promena dao nam je za pravo da rezultate smatramo reprezentativnim i za daleko duži vremenski raspon. Zato su u prvi mah izvesno iznenađenje predstavljali rezultati dobijeni za *Floru* u slučaju šest tela, a u intervalu od $4 \cdot 10^3$ god. Slike 34. i 35. na kojima su prikazane oskulatorne, srednje i sopstvene ekscentričnosti i nagibi *Florine* putanje pokazuju da, u prvom redu, oskulatorne, a takođe i srednje ekscentričnosti



Slika 34. Varijacije oskulatorne (gore), srednje (u sredini) i sopstvene (dole) ekscentričnosti za 8 *Floru*.



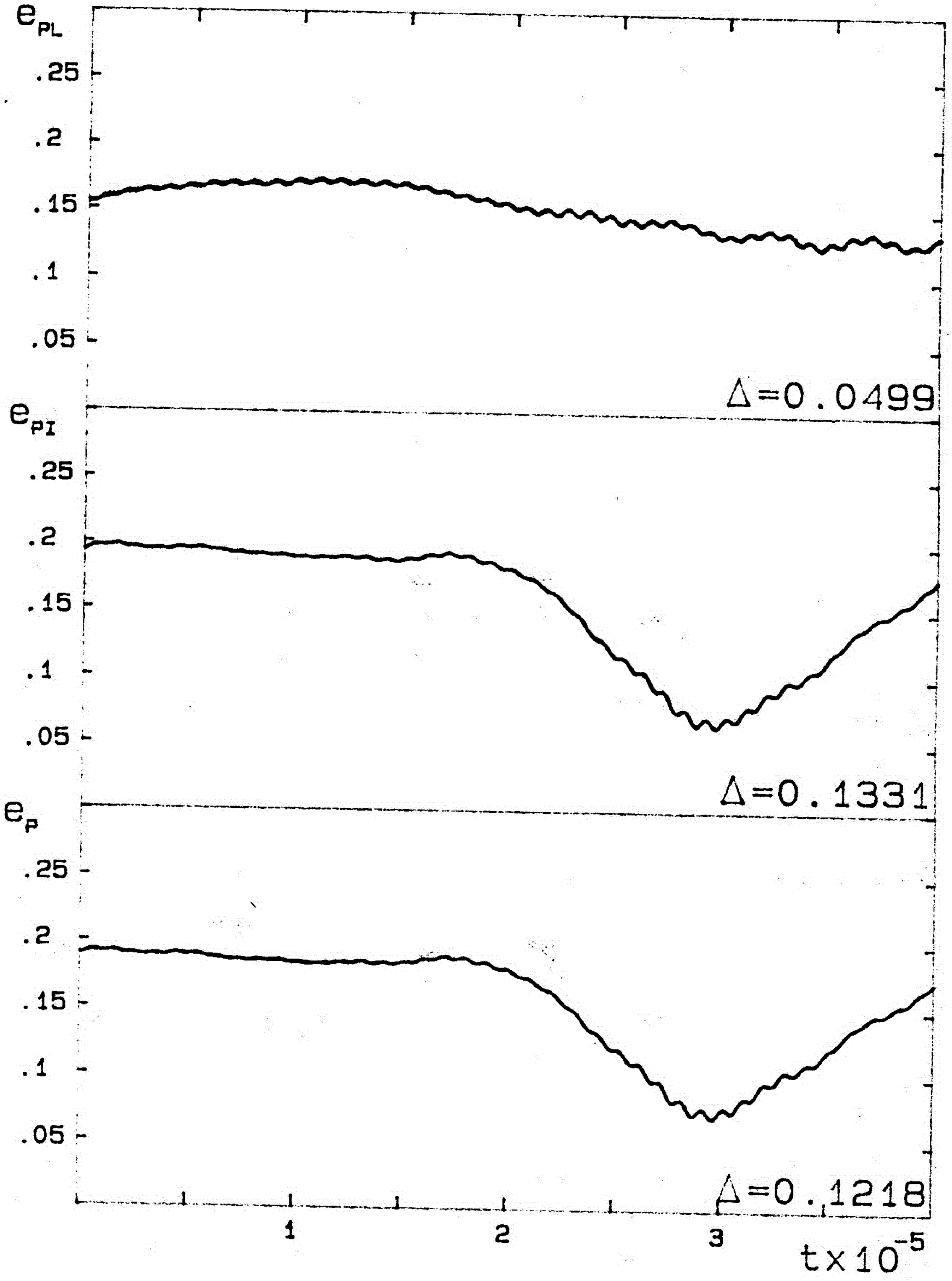
Slika 35. Varijacije oskulatornog, srednjeg i sopstvenog sinusa nagiba za 8 *Floru*.

mogu da porastu do čitavih 0.25, što više nikako ne može da se smatra umerenom vrednošću. Štaviše, oskulatorni i srednji sinus nagiba dostiže nekih 0.16, što je, recimo, umerena, ali ne i mala vrednost. Kod oba elementa su kratko-periodični poremećaji ipak sasvim zanemarljivi, jer je, kao što smo već maločas pomenuli, *Flora* relativno daleko od poremećajnih planeta koje smo uzeli u obzir, a s druge strane i dovoljno daleko od svih opasnijih rezonanci u srednjem kretanju. Što se dugo-periodičnih poremećaja ekscentričnosti tiče, lako se uočava da su varijacije komponovane od ukupno tri dominantna efekta - jednog sa periodom od oko $4 \cdot 10^5$ god. (što se može objasniti samo uticajem sekularnih rezonanci, a koliko i kojih videćemo nešto kasnije), drugog sa periodom od oko $4.5 \cdot 10^4$ god. (revolucija perihela) i trećeg, male amplitude i perioda od oko 10^4 god., čija priroda za sada nije sasvim jasna. Kod nagiba stvari izgledaju nešto komplikovanije, jer sa sigurnošću možemo identifikovati samo poremećaje s periodima od $3.7 \cdot 10^4$ god. (revolucija čvora) i 10^4 god., dok su efekti dužih perioda, koji na složen način dopunski moduliraju varijacije nagiba, najverovatnije posledica preklapanja i slaganja dejstava bliskih sekularnih rezonanci. Ipak, najvažnije što se može zaključiti sa ovih slika je da očigledno nešto u *Florinom* slučaju ne funkcioniše kako treba u računu dugo-periodičnih poremećaja i izvođenja sopstvenih elemenata, jer su nađene ukupne varijacije sopstvenih vrednosti oba elementa otprilike iste kao i one odgovarajućih oskulatornih i srednjih vrednosti, a takve se sopstvene vrednosti, naravno, ne mogu koristiti ni u kakve suvisle svrhe. Primetimo još i da, u oba slučaja,

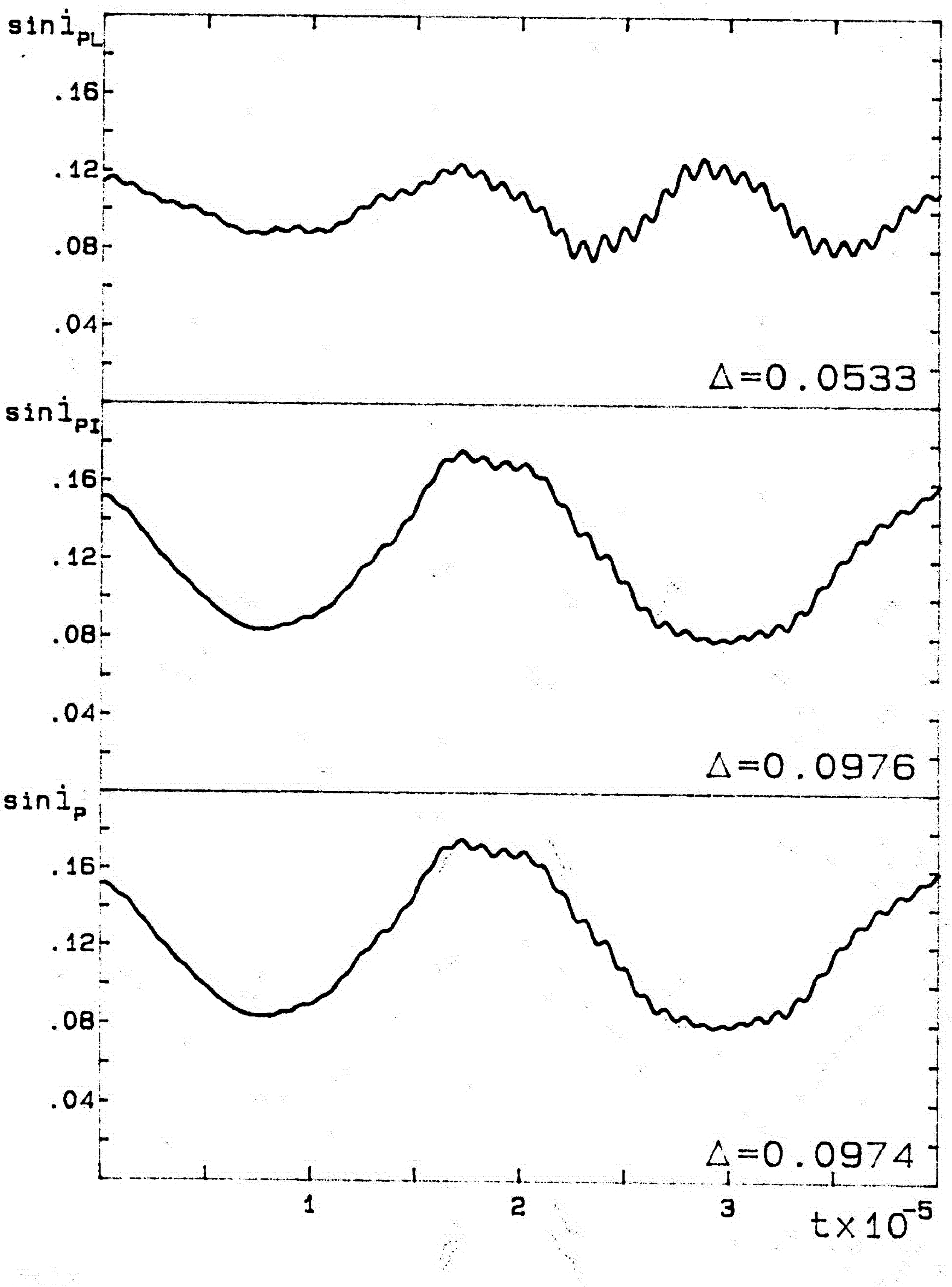
minimumi na krivama varijacije sopstvenih elemenata odgovaraju maksimumima oskulatornih, odnosno srednjih vrednosti i obrnuto. Konačno, čak i tamo gde pokazuju relativno stabilno ponašanje, kao napr. sopstvena ekscentričnost u prvoj polovini obuhvaćenog vremenskog intervala, sopstvene vrednosti su sistematski veće u odnosu na prosečne oskulatorne vrednosti, a to se ovde ne može objasniti istim razlozima kao napr, kod *Themisa*.

I sada smo, naravno, kao i u prethodnim slučajevima, uporedili sopstvene elemente izvedene pomoću linearne teorije, teorije prvog reda i kompletne teorije. Na Slikama 36. i 37. prikazani su rezultati ovog upoređenja, s tim što su iz očiglednih razloga i obuhvaćeni interval vremena i razmere na graficima isti kao i na pretodnim Sl. 34. i 35. Odmah mogu da se zapaze dve stvari: prvo, da je za oba elementa rezultat dobijen pomoću linearne teorije bolji od rezultata i teorije prvog reda i kompletne teorije, i drugo, da se ova dva potonja rezultata relativno malo razlikuju jedan od drugoga. Zaključak koji se nameće na osnovu ovih zapažanja je sasvim očigledan - problemi koje imamo u vezi određivanja sopstvenih elemenata za *Floru* javljaju se kao posledica uključivanja u račun članova prvog reda i četvrtog stepena, dok su članovi drugog reda ovde relativno mali i bez praktične važnosti. Štaviše, interesantno je primetiti da je kod sopstvenog nagiba jedan od efekata prvog reda i četvrtog stepena izgleda uspešno odstranjen (dvostruka oscilacija u drugoj polovini obuhvaćenog intervala), ali je zato ono što je kao ukupna varijacija preostalo znatno uvećano umesto umanjeno u odnosu na "linearne" vrednosti.

Naravno, ni sopstvene vrednosti dobijene pomoću linearne



Slika 36. Sopstvene ekscentričnosti za 8 Floru izvedene pomoću linearne teorije (gore), teorije prvog reda (u sredini) i kompletne teorije (dole).



Slika 37. Sopstveni sinusi nagiba za 8 *Floru* izvedeni pomoću linearne teorije, teorije prvog reda i kompletne teorije.

teorije, premda bolje od ostalih, nisu ni izdaleka dovoljno tačne da bi se u toj oblasti faznog prostora mogla izvršiti pouzdana klasifikacija malih planeta u familije, tako da se ovde izgleda, bar što se primene analitičke teorije tiče, suočavamo sa nepremostivim praktičnim poteškoćama i metodskim ćorsokakom. S druge strane, međutim, ovo u potpunosti razjašnjava konfuziju u vezi familije *Flora* i razlike u identifikaciji njenih članova, koje se javljaju kod raznih autora. Podsetimo da jedni *Floru* smatraju jedinstvenom, velikom familijom, dok je drugi dele na više podfamilija i sl. Naša analiza pokazuje da je tačnost sopstvenih elemenata izvedenih za male planete u okolini *Flore* tako slaba, da je zapravo potpuno nemoguće napraviti iole pouzdaniju klasifikaciju na osnovu takvih parametara.

Pitanje koje se u vezi s tim prirodno postavlja je da li onda familija *Flora* uopšte postoji !? Naravno, nije sada lako odgovoriti na ovo pitanje, ali svakako u obzir treba uzeti činjenicu da je gustina objekata u krajnjem unutrašnjem delu prstena malih planeta znatno veća nego u ostalim njegovim delovima, što bi se moglo pripisati i postojanju familije(a). Ima i izvesnih kosmohemijskih indicija da je struktura potencijalnih članova familije *Flora* uglavnom ista i ne sasvim tipična za taj deo prstena, što bi takođe išlo u prilog postojanja ove familije. No, ponovimo još jednom, sa aspekta klasifikacije slučaj familije *Flora* je u ovom trenutku praktično beznadežan, a takva je onda situacija i sa pitanjem razjašnjenja načina njenog nastanka, rekonstrukcije polja relativnih brzina, itd.

U vezi sa svim ovim napred rečenim postavlja se i drugo pitanje - zašto su greške sopstvenih elemenata *Flore* tako velike i zašto su baš članovi prvog reda i četvrtog stepena ti koji unose ovu pometnju u račun poremećaja ? Implicitno smo se već ranije dotakli odgovora na ovo pitanje - reč je o pojavi malih imenilaca kod ovih članova, odnosno o rezonantnim efektima, koji, dakako, unose velike greške u zbirni efekat.

Najjednostavnije bi bilo, u cilju provere ove konstatacije, naprosto izdvojiti sve članove sa imeniocima manjim od neke izabrane kritične vrednosti i pokazati da doprinosi tih članova čine najveći deo ukupnog efekta. No, obzirom da je ovo možda prilika da naš račun dugo-periodičnih poremećaja i izvođenja sopstvenih elemenata malo bliže upoznamo i analiziramo, u Tabeli 15. su dati svi detalji ovog računa, počev od polaznih, srednjih vrednosti *Poincaré*-ovih promenljivih, preko njihovih konačnih, popravljenih vrednosti i odgovarajućih sopstvenih elemenata, vrednosti komponenata prinudnih oscilacija, pa do liste vrednosti svih pojedinačnih poremećajnih efekata koji ulaze u taj račun. Uz svaki član čija vrednost prelazi 10^{-3} dat je i njegov imenilac, tako da se odmah mogu identifikovati rezonantni članovi i videti koliki je njihov doprinos u poređenju sa ostalim "normalnim" članovima. Tabela je organizovana po kolonama i po tom principu se u njoj i može pratiti tok izvođenja i nalaziti pojedine interesantne međurezultate. Lista pojedinačnih članova napravljena je tako što su, kao i u generatrisi S_1^* (3.127), svi članovi koji ulaze u parcijalne izvode generatrise po ρ_1, ρ_2, σ_1, σ_2 grupisani po zajedničkom koeficijentu (napr. $m_3' B_2$, $m_3'^2 D_1$), s tim što se

Tabela 15. Analiza računa dugo-periodičnih poremećaja i izvođenja sopstvenih elemenata (Flora, t = 0).

Sopstveni elementi:

t	a_P	e_P	sin i_P	$\tilde{\omega}_P$	Ω_P	e_{PL}	sin i_{PL}
0	2.20140	0.18909	0.15133	86°.312	160°.880	0.15495	0.11407

"Linearna" frekvencija slobodnih oscilacija: g_o = 31.191 "/god.

Poincaré-ove promenljive (početne vrednosti):

$p_o/(L)^{1/2}$	$q_o/(L)^{1/2}$	$r_o/(L)^{1/2}$	$s_o/(L)^{1/2}$
0.128002	-0.090861	-0.035752	-0.095638

Poincaré-ove promenljive (konačne vrednosti):

$p_1/(L)^{1/2}$	$q_1/(L)^{1/2}$	$r_1/(L)^{1/2}$	$s_1/(L)^{1/2}$
0.090108	-0.133377	-0.126422	-0.043643

Zbirni efekat dugo-periodičnih poremećaja:

$\frac{1}{L}\frac{\partial S_1^*}{\partial \rho_2}$	$\frac{1}{L}\frac{\partial S_1^*}{\partial \rho_1}$	$\frac{1}{L}\frac{\partial S_1^*}{\partial \sigma_2}$	$\frac{1}{L}\frac{\partial S_1^*}{\partial \sigma_1}$
-0.037894	-0.042516	-0.090670	0.052005

Prinudne oscilacije:

$\xi_{55}\cos\lambda_{55}$	$\xi_{55}\sin\lambda_{55}$	$\eta_{55}\cos\delta_{55}$	$\eta_{55}\sin\delta_{55}$
0.023101	0.013363	-0.008126	0.026389
$\xi_{56}\cos\lambda_{56}$	$\xi_{56}\sin\lambda_{56}$	$\eta_{56}\cos\delta_{56}$	$\eta_{56}\sin\delta_{56}$
0.054790	-0.069543	0.023799	-0.032016

Parcijalni izvodi (zbirni efekat):

$\frac{\partial S_1^*}{\partial \rho_2}$	$\frac{\partial S_1^*}{\partial \rho_1}$	$\frac{\partial S_1^*}{\partial \sigma_2}$	$\frac{\partial S_1^*}{\partial \sigma_1}$
-0.024649	-0.027656	-0.058980	0.033822

Poremećajni članovi:

$m_5'(B_1 - A_1/4)$

-0.001957	-0.001470	-0.002559	-0.001883
-0.000036	-0.000012	-0.000095	0.000048
-0.000042	0.000024	0.000120	0.000391
-0.001426	$g_o - g_{56}$	-0.000486	-0.000859	0.000436
-0.000769	-0.000976	-0.002117	$-g_o - f_{56}$	-0.002848
0.000069	0.000023	0.000156	-0.000079
-0.000002	-0.000000	0.000005	0.000038
0.000255	-0.000024	0.000363	0.000347
0.000001	0.000001	0.000001	-0.000015
-0.000008	0.000009	-0.000047	-0.000032
0.000002	-0.000030	-0.000086	-0.000170

$m_5'B_2$

$m_5'B_6$

0.002865	0.003363	-0.000259	-0.000363
0.000255	-0.000147	0.000018	0.000058
0.003041	$g_o - g_{56}$	0.003859	-0.000289	-0.000389
-0.000553	-0.000188	0.000029	-0.000015
-0.000009	-0.000022	0.000000	-0.000006
0.000132	-0.000138	-0.000018	-0.000012

$m_5'(B_7 + A_3/2)$

$m_5'(B_7 + A_3/2)$

-0.023030	-0.033817	-0.067758	0.040311
-0.000986	0.000570	-0.001545	$g_o - g_{55}$	0.000784
-0.021942	$g_o - g_{56}$	-0.027851	0.001483	$g_o - g_{55}$	-0.000753
0.000379	0.000129	-0.061372	$g_{55} - g_{56}$	0.031166
-0.000310	-0.000106	-0.000640	$-g_o - f_{56}$	-0.002079
0.003417	$-g_o - f_{56}$	0.001164	0.011835	$-g_o - f_{55}$	0.015921
0.001370	$-f_{55} - g_{55}$	-0.000505	0.000813	$-f_{55} - g_{56}$	-0.001825
-0.000083	0.000069	-0.000126	-0.000078
0.000351	0.000648	0.000080	-0.000038
-0.000456	-0.000410	-0.000676	0.000106
0.000027	-0.000032	0.000970	0.000275
0.003435	$g_o - g_{55} - f_{55} + f_{56}$	-0.000639	-0.000538	0.000643
0.000213	0.000134	0.000045	-0.000565
-0.000101	-0.000297	0.000382	0.000083
0.000319	-0.000265	-0.000174	0.000172
0.000268	-0.000099	-0.000327	0.000177
-0.010775	$-f_{56} - g_{56}$	-0.009724	-0.019812	$-f_{56} - g_{56}$	0.001273
0.001846	$-2g_o - f_{56} + q_{56}$	0.003395	0.001845	$-2g_o - f_{56} + q_{56}$	-0.004953

$m'_5 B_8$

-0.000596

-0.000045
-0.000999
-0.000042
 0.000004
 0.000471
 0.000029
-0.000014

$m'_5 B_9$

 0.000761

-0.000038
 0.000699
 0.000381
 0.000021
-0.000173
-0.000045
-0.000084

$g_o - g_{56}$

$m'_5 (B_{13} + A_5/4)$

-0.001410

-0.000353
-0.000505
 0.000335
 0.000122
 0.002722
-0.001278
 0.000078
-0.000327
 0.000425
-0.000047
-0.000040
 0.001592
-0.000273
-0.000029
-0.003711
-0.000230
 0.000109

$g_o - g_{55} - f_{55} + f_{56}$

$m'_5 (B_{11} - A_5/8)$

 0.000822

 0.000104
-0.000151
 0.000149
 0.000880
-0.000197
-0.000011
-0.000126
-0.000001
 0.000068
 0.000109

$-g_o - f_{56}$

$m'_5 (B_{15} - A_6/8)$

-0.006235

-0.000741
-0.000967
-0.003838
-0.003136
 0.001574
-0.000100
 0.001120
 0.000024
-0.000205
 0.000034

$g_o - g_{56}$
$g_o - g_{56}$
$g_{55} - g_{56}$
$g_o - g_{56}$

$m'_5 B_{12}$

 0.000028

-0.000006
 0.000033
-0.000000
 0.000001

m'_5B_{16}		$m'_5(B_{12} + A_5/4)$	
-0.000695	-0.000586	0.001026	0.001005
-0.000137	0.000079	0.000597	$-g_o-f_{55}$ 0.001939
-0.000553	-0.000702	-0.001748	$-g^o-f^{56}$ -0.002352
0.000009	0.000022	-0.000758	$-f^o_{55}-g^{56}_{55}$ 0.001701
-0.000014	0.000015	0.000118	0.000073
		-0.000904	-0.000256
		0.000502	-0.000600
		-0.000007	0.000083
		-0.000056	-0.000012
		0.002927	$-f_{56}-g_{56}$ -0.000188
		-0.000273	0.000732
		-0.000075	0.000035
		0.000630	-0.000099
		0.000026	-0.000025
		0.000048	-0.000026

m'_5B_{17}		m'_5B_{14}	
-0.001168	0.004985	0.000100	-0.000058
0.001084	g_o-g_{55} -0.000627	0.000038	0.000123
0.002570	$g^o-g^{56}_{55}$ 0.003262	-0.000111	-0.000149
-0.001506	$-f^o_{55}-g^{56}_{55}$ 0.000556	-0.000021	0.000010
0.000091	-0.000076	0.000173	-0.000027
-0.000041	-0.000076	0.000007	-0.000007
0.000053	0.000048	0.000013	-0.000007
-0.000350	0.000291		
-0.000294	0.000109		
0.001262	$-f_{56}-g_{56}$ 0.001139		
-0.000216	-0.000398		
-0.000030	0.000035		
-0.003776	$g_o-g_{55}-f_{55}+f_{56}$ 0.000703		
-0.000025	-0.000016		
0.000012	0.000035		

$m'_5 B_{18}$

-0.000413	0.000258	0.009883	-0.003516
0.000057	-0.000033	0.001698 $g_o - g_{55}$	-0.000863
0.000135	0.000172	0.007188 $g_o - g_{56}$	-0.003650
-0.000005	0.000006	0.000067	0.000216
-0.000598	0.000111	-0.001232 $-g - f_{56}$	-0.001657
-0.000004	-0.000002	-0.000894 $-f_{55} - g_{55}$	0.002006
0.000002	0.000006	0.000139	0.000086
		-0.000114	-0.000032
		0.000063	-0.000075
		-0.000098	0.000046
		0.000822	-0.000129
		0.000211	-0.000210
		0.000397	-0.000215
		-0.000049	0.000621
		-0.000420	-0.000091
		0.002320 $-f_{56} - g_{56}$	-0.000149
		-0.000216	0.000580

$m'_5 B_{19}$

0.005194	-0.001708	-0.000086	-0.001979
-0.000076	0.000044	-0.000035	-0.000114
-0.000180	-0.000228	0.000103	0.000138
0.001586 $-f_{55} - g_{55}$	-0.000585	0.000941 $-f_{55} - g_{55}$	-0.002112
0.000043	0.000080	0.000120	0.000034
0.000058	-0.000049	0.000008	-0.000104
-0.000211	-0.000190	-0.000387	0.000025
0.000005	-0.000006	0.000010	-0.000005
0.003976 $g_o - g_{55} - f_{55} + f_{56}$	-0.000740	-0.000782	0.000123
0.000004	0.000003	-0.000003	0.000003
-0.000012	-0.000037	-0.000060	0.000032

$m'_5 B_{20}$

0.000326	-0.000225	-0.000060	-0.000058
-0.000068	0.000039	-0.000032	-0.000102
-0.000162	-0.000205	0.000092	0.000124
-0.000087	0.000072	-0.000131	-0.000081
-0.000051	-0.000045	-0.000060	0.000071
0.000044	-0.000016	0.000063	0.000014
0.000032	0.000060	0.000032	-0.000087
0.000567	-0.000105	-0.000075	0.000012
0.000028	-0.000033	0.000084	-0.000040
-0.000002	-0.000005	-0.000006	0.000003
0.000024	0.000015	-0.000029	0.000028

$m'_5 B_{22}$

0.000277

0.000099
0.000222
0.000097
-0.000116
-0.000006
-0.000022
0.000004

$m'_5 B_{21}$

0.000322

-0.000057
0.000282
0.000019
0.000011
0.000127
-0.000055
-0.000004

$m'_5 B_{21}$

-0.000028

0.000009
-0.000037
0.000005
0.000009
-0.000014
0.000001
-0.000001

$m'_5 B_{21}$

-0.000016

0.000029
-0.000050
0.000038
0.000009
-0.000027
-0.000015
-0.000001

$m'_5 B_{23}$

-0.001240

-0.001171 $4g_o$
-0.000708
0.000889
-0.000246
0.000193
-0.000116
-0.000164
0.000281
-0.000186
0.000166
0.000047
-0.000224
-0.000044
-0.000006
-0.000027
0.000055
0.000067
-0.000046

$m'_5 B_{23}$

0.000121

-0.000366
-0.000363
0.000119
0.000108
0.000689
-0.000087
0.000006
0.000088
0.000046
-0.000110
0.000465
-0.000474
0.000003
0.000086
0.000025
0.000079
-0.000029
-0.000167

$m'_5 B_{23}$

-0.001386

-0.001515 $4g_o$
-0.000444
0.000591
-0.000708
0.000256 $-3g_o - g_{3\sigma}$
0.000048
0.000435
0.000324
-0.000261
0.000246
-0.000026
-0.000212
-0.000026
0.000013
0.000162
-0.000134
0.000098
-0.000136

$m'_5 B_{23}$

-0.001223

0.000721
0.000314
-0.000166
-0.000199
-0.001941
-0.000073
0.000371
-0.000285
-0.000027
0.000117
-0.000639
0.000685
-0.000028
0.000030
0.000096
-0.000161
-0.000122
0.000084

$m'_5 B_{24}$

-0.000121

-0.000116
-0.000004
0.000045
-0.000044
-0.000006
-0.000001
0.000001
0.000011
-0.000007

$m'_5 B_{25}$

-0.000012

-0.000087
0.000000
0.000014
0.000003
0.000086
0.000001
0.000002
-0.000005
-0.000027

$m'_5 B_{25}$

0.000438

0.000444
-0.000094
0.000261
0.000026
-0.000039
0.000034
0.000026
-0.000162
-0.000002
0.000021
-0.000098
0.000022

$m'_5 B_{25}$

0.000312

-0.000314
0.000026
0.000027
0.000639
-0.000018
-0.000108
0.000028
-0.000096
-0.000005
0.000025
0.000122
-0.000013

$m'_5 B_{25}$

0.000740	0.000011	0.000243	0.000424
0.000708	0.000363	0.000403	0.000113
-0.000141	-0.000019	-0.000016	0.000118
0.000232	0.000174	0.000054	0.000083
0.000052	-0.000002	-0.000053	-0.000045
-0.000326	-0.000102	-0.000204	0.000180
0.000186	-0.000046	0.000149	0.000015
-0.000047	-0.000465	-0.000140	-0.000066
-0.000026	0.000017	0.000002	0.000039
0.000035	0.000075	0.000013	-0.000042
0.000087	-0.000006	0.000029	0.000031
0.000012	-0.000173	-0.000015	-0.000034
0.000009	-0.000008	-0.000020	-0.000012
-0.000017	-0.000025	0.000016	0.000020
-0.000077	0.000034	-0.000062	0.000077
0.000054	0.000194	0.000086	-0.000053

$m'_5 B_{26}$

0.000153	-0.000066	-0.000092	-0.000123
0.000140	-0.000062	-0.000149	-0.000015
-0.000012	-0.000042	0.000022	0.000011
0.000106	-0.000026	-0.000002	-0.000039
-0.000094	0.000062	-0.000002	0.000007
-0.000003	-0.000028	0.000062	-0.000077
0.000014	0.000029	-0.000014	0.000008
0.000025	-0.000002	-0.000023	-0.000031
0.000015	-0.000014	0.000020	0.000012
0.000000	-0.000005	0.000002	0.000005
-0.000003	-0.000005	-0.000003	-0.000003
-0.000038	0.000017		
0.000003	0.000010		

$m'_5 B_{27}$

0.000020	-0.000003	-0.000008	-0.000033
0.000025	-0.000002	-0.000016	-0.000024
0.000000	-0.000000	0.000002	0.000001
-0.000006	0.000003	0.000011	-0.000010
0.000000	-0.000005	-0.000008	-0.000009
-0.000000	-0.000000	0.000001	0.000000
0.000000	0.000002	0.000004	0.000010
		-0.000000	-0.000001
		0.000003	-0.000004
		-0.000005	0.000003

$m'_5 B_{28}$

$m'_5 B_{29}$

$m'_5 B_{20}$

-0.000104	0.000029
-0.000106	0.000026
0.000015	-0.000010
0.000003	0.000028
-0.000002	-0.000005
0.000044	-0.000019
-0.000003	-0.000012
-0.000050	0.000004
-0.000005	0.000005
-0.000001	0.000010
0.000001	0.000002

$m'_5 B_{21}$

0.000005	0.000011
0.000008	0.000009
-0.000001	-0.000000
-0.000003	0.000004
-0.000001	-0.000002
0.000000	0.000000
0.000001	-0.000000

$m'_5 {}^2D_1$

0.001872	0.002228
0.000080	-0.000047
0.001792	0.002274

$g_o - g_{56}$

$m'_5 {}^2D_2$

-0.000056	-0.000069
0.000003	0.000010
-0.000059	-0.000080

$m'_5 {}^2D_6$

0.000871	0.000628
0.000258	-0.000149
0.000613	0.000778

$m'_5 {}^2D_5$

0.000006	0.000002
-0.000003	-0.000010
0.000009	0.000013

Lista najvećih članova po apsolutnoj vrednosti (jedan po imeniocu) -ekscentričnost.

$g_o - g_{56}$	2.864 "/god.	$2.7 \cdot 10^{-2}$
$-f_{56} - g_{56}$	-2.078	$1.1 \cdot 10^{-2}$
$g_o - g_{55} - f_{55} + f_{56}$	0.633	$4.0 \cdot 10^{-3}$
$-g_o - f_{56}$	-4.942	$3.4 \cdot 10^{-3}$
$-2g_o - f_{56} + g_{56}$	-7.805	$3.4 \cdot 10^{-3}$
$g_{55} - g_{56}$	-24.019	$1.6 \cdot 10^{-3}$
$-f_{55} - g_{55}$	-4.309	$1.6 \cdot 10^{-3}$
$4g_o$	124.766	$1.2 \cdot 10^{-3}$
$g_o - g_{55}$	26.883	$1.1 \cdot 10^{-3}$

Lista najvećih članova po apsolutnoj vrednosti (jedan po imeniocu) -nagib.

$g_o - g_{56}$	2.864 "/god.	$6.1 \cdot 10^{-2}$
$-f_{56} - g_{56}$	-2.078	$2.0 \cdot 10^{-2}$
$-g_o - f_{56}$	-4.942	$1.6 \cdot 10^{-2}$
$-2g_o - f_{56} + g_{56}$	-7.805	$5.0 \cdot 10^{-3}$
$-f_{55} - g_{55}$	-4.309	$2.1 \cdot 10^{-3}$
$-g_o - f_{55}$	31.191	$1.9 \cdot 10^{-3}$
$-3g_o - g_{56}$	-121.902	$1.9 \cdot 10^{-3}$
$g_o - g_{55}$	26.883	$1.7 \cdot 10^{-3}$
$4g_o$	124.766	$1.5 \cdot 10^{-3}$

imenioci ispisani između prve i druge, odnosno treće [illegible] kolone odnose uvek na obe vrednosti između kojih se nalaze. Za svaki koeficijent prvo je dat zbir vrednosti svih članova kojima je taj koeficijent zajednički, a zatim i lista vrednosti svih pojedinačnih članova. Na samom kraju nalaze se spiskovi najvećih poremećajnih članova za ekscentričnost (par promenljivih *p*, *q*) i nagib (par *r*, *s*), sa pripadajućim imeniocima i vrednostima tih imenilaca izraženim u "/god. Pri tom je za svaki dati imenilac navedena vrednost za samo jedan i to najveći među poremećajnim članovima s tim imeniocem.

Poređenjem početnih i konačnih vrednosti *Poincaré*-ovih promenljivih, zbirnih efekata dugo-periodičnih poremećaja (popravki), pa čak i komponenata prinudnih oscilacija, dolazimo do zaključka da sve ove veličine imaju iste, ili bar približno iste vrednosti, što nedvosmisleno upućuje na to da naš račun poremećaja, koji se zasniva na razvoju funkcije poremećaja po malom parametru i podrazumeva brzu konvergenciju odgovarajućeg reda, ne funkcioniše u ovom slučaju kako treba. Jasno, kako se uvidom u vrednosti pojedinih članova razvoja može utvrditi, u gotovo svim grupama po zajedničkom koeficijentu najveći su upravo oni članovi kojima su, pre svega, imenioci mali. Drugorazrednu ulogu imaju ovde razne kombinacije ekscentričnosti i nagiba male i poremećajne planete, koje se javljaju kao faktori u svakom članu. Sledeće što uočavamo je da se među izdvojenim malim imeniocima nalaze svi poznati imenioci koji definišu osnovne sekularne rezonance opisane od strane *Williams*-a ($g_o - g_{55}$, $g_o - g_{56}$, $-g_o - f_{56}$), ali i oni koji se, zahvaljujući činjenici da se u *Yuasa*-inoj teoriji uzimaju u

obzir i članovi četvrtog stepena, sada po prvi put mogu odrediti i analizirati, a koji predstavljaju kombinacije po četiri fundamentalne frekvencije. Ovo je otud potpuno novo i do sada u teoriji nedotaknuto pitanje, koje očigledno zaslužuje punu pažnju i koje će, stoga, biti šire razmotreno u sledećem odeljku.

Najinteresantniji materijal, u ovom kontekstu, predstavljaju ipak liste najvećih poremećajnih članova i njima pripadajućih imenilaca, date na samom kraju Tabele 15. Kod ekscentričnosti su dva člana uporedljivih malih imenilaca: $g_o - g_{5\sigma}$ i $-f_{5\sigma} - g_{5\sigma}$ (perioda 4.5, odnosno $6.2 \cdot 10^3$ god.) veći od ostalih za čitav red veličine. I dok se u prvom slučaju radi o Williams-ovoj sekularnoj rezonanci, čiji uticaj je i na ovom relativno velikom rastojanju od tačne rezonance na kojem se nalazi *Flora* i te kako značajan (vidi takođe napred diskusiju u vezi promena oskulatornih elemenata), u drugom slučaju je reč o jednoj od maločas pomenutih do sada neispitanih "četverofrekventnih" rezonanci (primetimo, naime, da u skladu s *d'Alambert*-ovim pravilom, ovaj imenilac zapravo ima oblik: $g + f - g_{5\sigma} - f_{5\sigma}$, gde je $g = g_o$, a $f = -g_o$). Sledeći na listi je opet član sa izuzetno malim imeniocem sastavljenim od četiri frekvencije (odgovarajući period duži je od $2 \cdot 10^7$ god.), pa zatim još dva člana sa imeniocima manjim od 10 "/god. (perioda dužih od $1.3 \cdot 10^3$ god.), da bi listu zaključila četiri člana podjednakih vrednosti, od kojih je jedan sa malim imeniocem, a ostala tri imaju uglavnom "standardne" imenioce.

Slična situacija je, naravno, i kod nagiba, s tim što ovde

imamo tri mala imenioca koji daju uporedljive najveće doprinose ukupnom efektu (prva dva su ista kao i kod ekscentričnosti, dok treći odgovara *Williams*-ovoj rezonanci $-g_o - f_{56}$), dok su od ostalih šest članova prva dva sa malim, a ostali sa standardnim imeniocima.

Upoređenjem zbirnih efekata (parcijalni izvodi) sa ovim pojedinačnim vrednostima najvećih članova, gde nalazimo da ti članovi doprinose ukupnim efektima u nekim slučajevima i sa čitavih 90%, lako dolazimo do zaključka da su, kao što smo i pretpostavili, sekularne rezonance glavni razlog pojave velikih dugo-periodičnih poremećaja i nefunkcionisanja analitičke teorije u slučaju *Flore*. Ostaje, dakle, na snazi zaključak da je, na žalost, što se tiče sopstvenih elemenata, *Flora* (i njena okolina u faznom prostoru elemenata kretanja) za sada praktično beznadežan slučaj i da treba videti da li se za tu vrstu malih planeta mogu pronaći druge (napr. čisto numeričke !?) metode za njihovo precizno odredivanje.

5.3.3 Sekularne rezonance

U prethodnim odeljcima smo sekularne rezonance radi jednostavnosti predstavili u funkciji frekvencije slobodnih oscilacija g_o, izvedene iz linearne teorije (3.122). To, naravno, nije precizna definicija, jer g_o je konstanta koja zavisi samo od odnosa velikih poluosa male i poremećajne planete, pa bi se i tačna, tako određena sekularna rezonanca, poput onih u srednjem kretanju, u ravnima (a,e) i (a,i) predstavljala pravom paralelnom y-osi i fiksiranom na datom a. Kako smo, međutim, već konstatovali, u Yuasa-inoj teoriji

frekvencija slobodnih oscilacija predstavlja složenu funkciju odnosa velikih poluosa, ali i sopstvene ekscentričnosti i nagiba, amplituda prinudnih oscilacija itd. (vidi 3.131 i 3.132). Ako takvu popravljenu frekvenciju uvedemo u definiciju sekularne rezonance, kao što smo objasnili u odeljku 3.5, ova će se u pomenutim ravnima predstavljati krivom određenom presekom koordinatne i rezonantne površi; štaviše, u tom slučaju rezonanca se može prikazati i u (*i*,e) ravni.

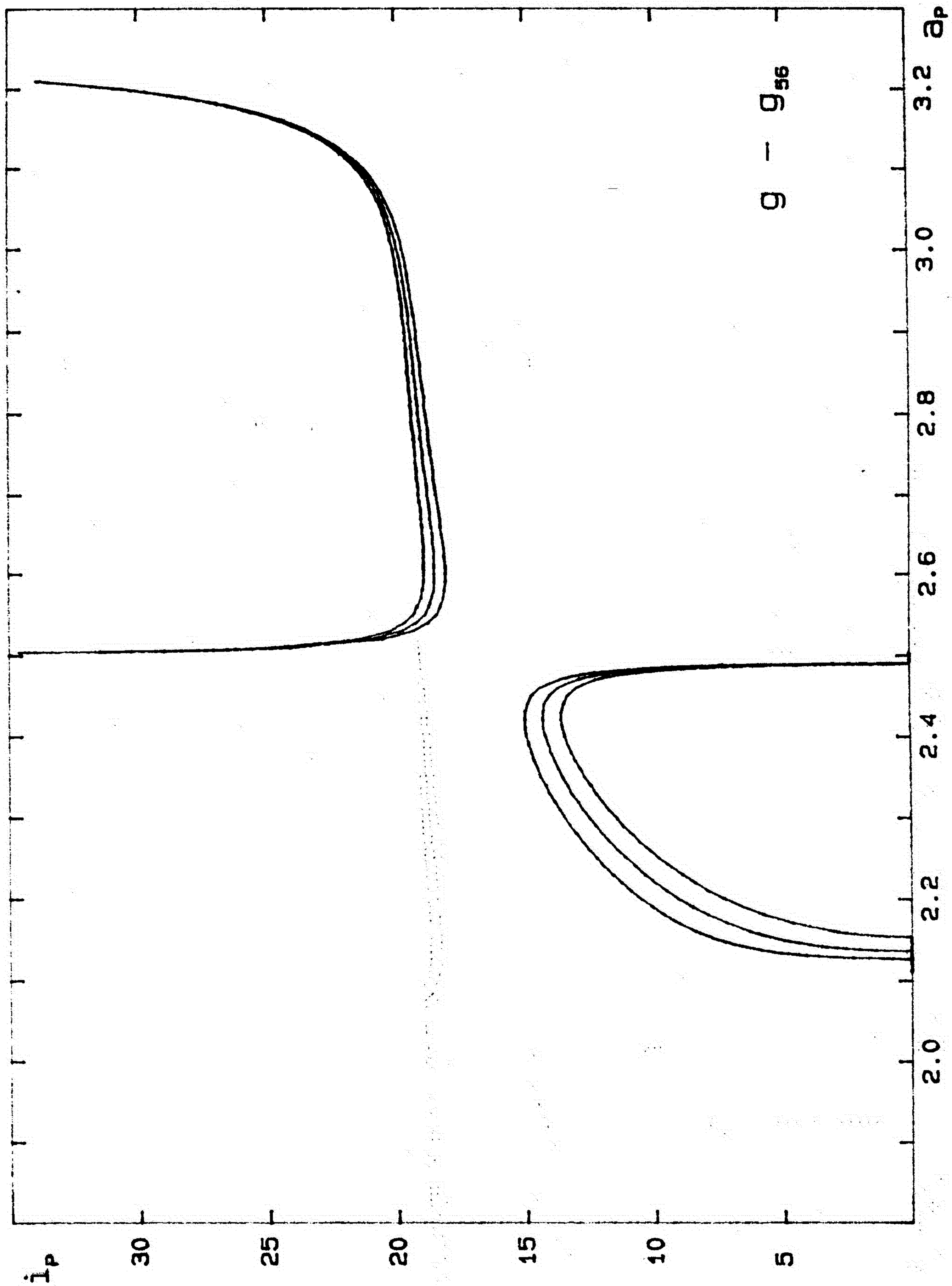
Relativno je lako prikazati sekularnu rezonancu u bilo kojoj od tri pomenute ravni. Ako napr. želimo da je prikažemo u (*i*,e) ravni, dovoljno je da za neku fiksnu vrednost velike poluose variramo ekscentričnost i nagib i pratimo promene vrednosti imenioca koji određuje posmatranu rezonancu. Kako je, po definiciji, za tačnu rezonancu imenilac jednak nuli, to treba naći sve one kombinacije sopstvenih vrednosti ekscentričnosti i nagiba za koje je taj uslov ispunjen (u praksi se, u stvari, prati kada će se promeniti znak imenioca, pa se rezonanca locira između dve susedne, dovoljno bliske probne vrednosti elemenata, za koje je došlo do promene znaka).

Većina od ukupno 55 raznih imenilaca koji se javljaju u računu dugo-periodičnih poremećaja u *Yuasa*-inoj teoriji, može da u realnim okolnostima postane dovoljno mala i dâ rezonantni efekat, ali nisu svi tako dobijeni efekti, kao što smo videli, važni za taj račun. Na Slikama 38. - 43. prikazano je u ravni (a_p, i_p) i za fiksnu vrednost e_p = 0.1 nekoliko tipičnih sekularnih rezonanci, s tim što je svaka rezonanca predstavljena pomoću tri krive koje odgovaraju vrednostima imenioca od -1, 0, +1 "/god. Naravno, rezonantni efekti se kod

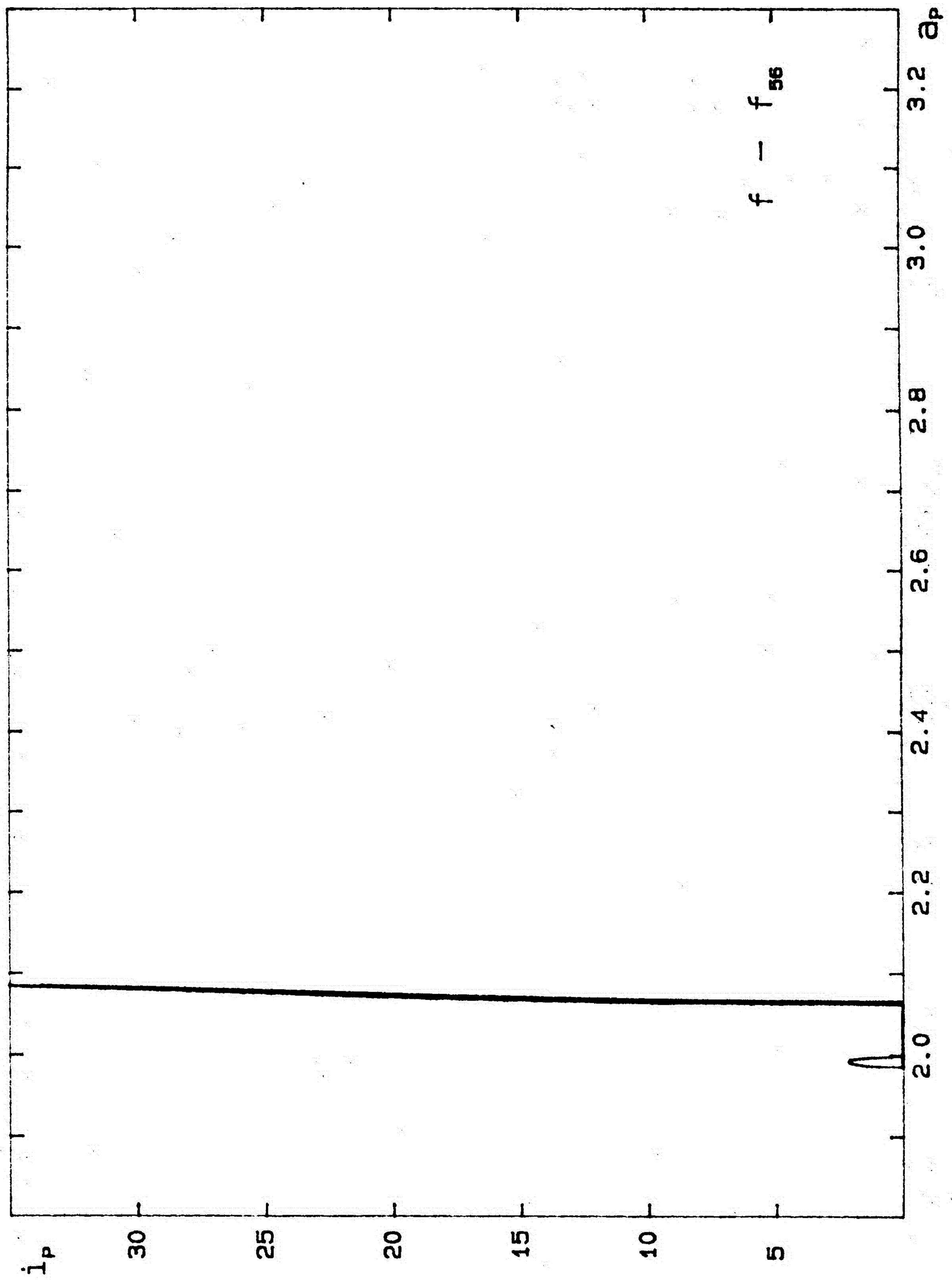
jednog broja sekularnih rezonanci osećaju i u mnogo širem opsegu vrednosti imenioca (u nekim slučajevima čak za vrednosti u intervalu -10,10 "/god.), ali je i odabrani opseg sasvim dovoljan da se jasno pokaže gde se u prstenu malih planeta rezonance nalaze, koliki prostor pokrivaju i kakav uticaj imaju na kretanje bliskih malih planeta.

Na Slikama 38., 39. i 40. prikazane su Williams-ove sekularne rezonance $\dot{\nu}_5(g - g_{55})$, $\dot{\nu}_6(g - g_{56})$ i $\dot{\nu}_{16}(f - f_{56})$, i može se videti da one ovde izgledaju dosta složenije nego u originalnoj Williams-ovoj verziji (uporedi sa Sl. 4.). Naročito treba uočiti mesta presecanja sekularnih rezonanci i rezonanci u srednjem kretanju, gde dolazi do prekida, naglih skokova i promena znaka vrednosti imenioca i gde će buduća ispitivanja stabilnosti kretanja sigurno otkriti haotične oblasti vrlo komplikovane strukture. Jasno, Williams-ova teorija, koja je prvog reda po poremećajnoj masi i u kojoj se stoga dugo-periodični efekti rezonanci u srednjem kretanju ne uzimaju u obzir, nije ni mogla da opiše sekularne rezonance u svoj njihovoj kompleksnosti. Tek je teorija drugog reda omogućila konkretnije sagledavanje ovih momenata, ali radi objektivnosti treba reći da ni naša verzija teorije nije sasvim kompletna u tom smislu, pošto joj, zbog ograničavanja funkcije poremećaja samo na članove drugog stepena u drugom redu po masi, nedostaju dugo-periodični članovi sa imeniocima koji određuju rezonance višeg reda u srednjem kretanju (napr. 5:2, 7:3, i sl.), pa se otud na našim slikama ne vide ni odgovarajući efekti presecanja sekularnih i ovih rezonanci. Ipak, i ovako je sasvim očigledno da rezonanca $\dot{\nu}_6$ ima ovde poseban značaj, jer se, kao što je

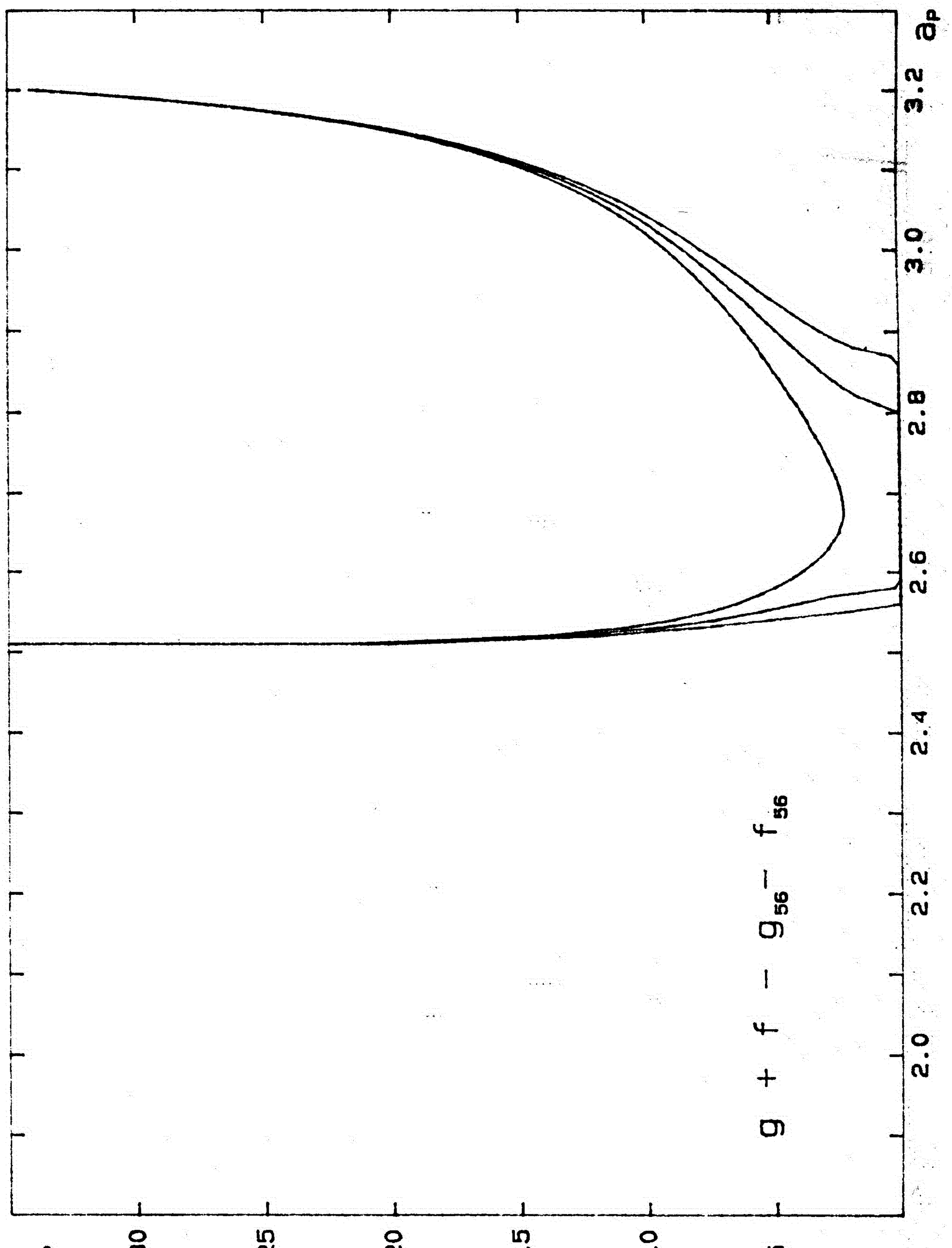
Slika 38. Sekularna rezonanca $g - g_{55}$.



Slika 39. Sekularna rezonanca $g - g_{56}$.

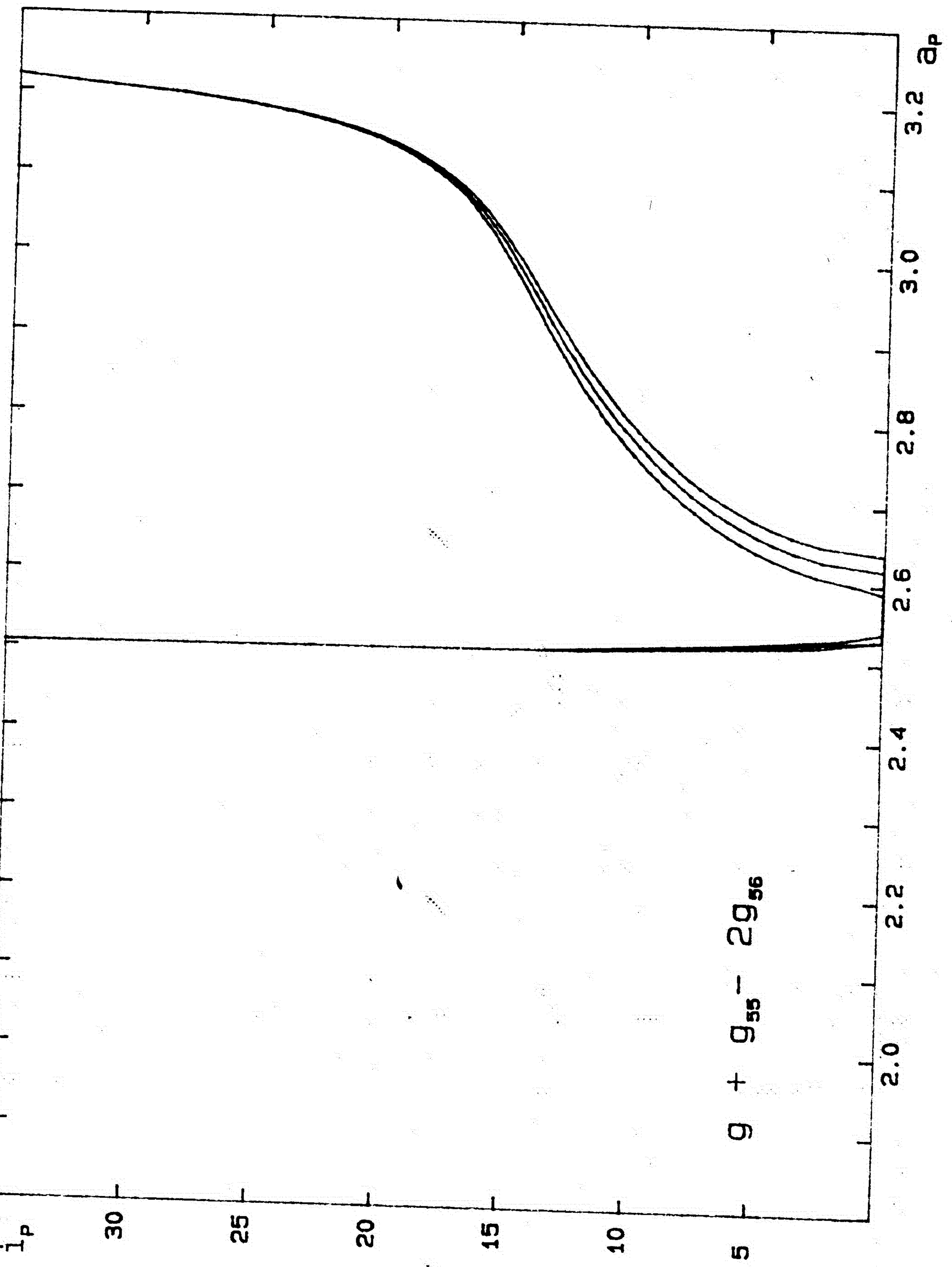


Slika 40. Sekularna rezonanca $f - f_{56}$.



Slika 41. Sekularna rezonanca $g + f - g_{56} - f_{56}$.

Slika 42. Sekularna rezonanca $g + f - g_{56} - f_{55}$.



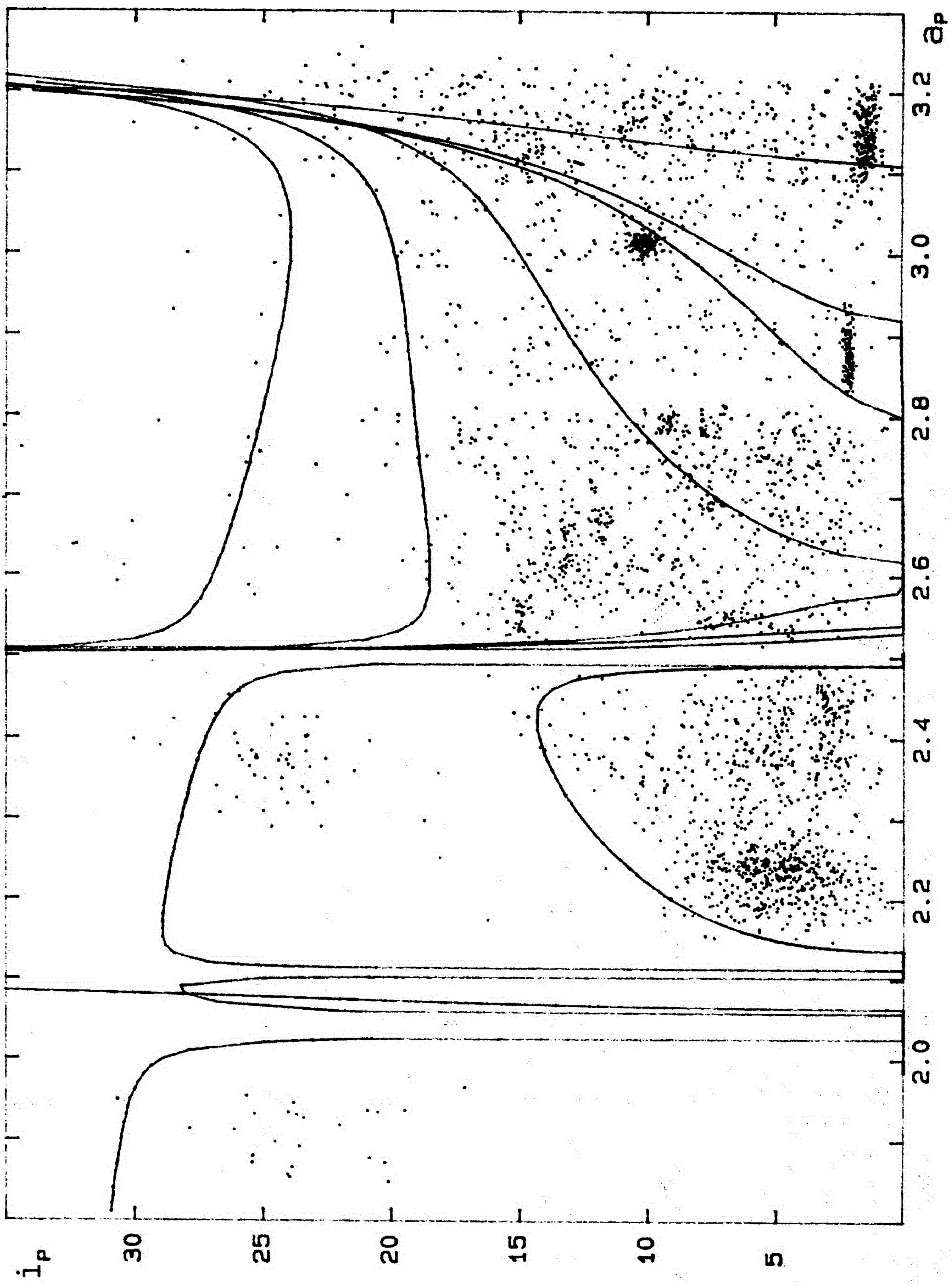
Slika 43. Sekularna rezonanca $g + g_{55} - 2g_{56}$.

poznato, ona poklapa sa velikom prazninom u raspodeli malih planeta i na taj način ograničava u nagibu glavni prsten malih planeta. Videli smo kod *Flore*, takođe, da ova rezonanca ima snažan uticaj u vrlo širokoj oblasti oko sebe i da čak dovodi u pitanje primenjivost analitičke teorije u dobrom delu prstena. Ostale dve *Williams*-ove rezonance, premda i one locirane u prazninama raspodele, nisu od tolikog značaja, $\dot{\nu}_5$ zato što utiče samo na objekte izrazito visokih nagiba, a $\dot{\nu}_{16}$ zato što je i dosta udaljena od glavnog prstena i što i inače ne proizvodi naročito velike efekte.

Na preostale tri Slike - 41., 42. i 43. - prikazane su tri karakteristične rezonance određene kombinacijama po četiri fundamentalne frekvencije. Zadržavajući se i dalje samo na nivou deskripcije, jer za neku detaljniju analizu ovde nemamo ni materijala ni prostora, možemo reći da je, pre svega, svim ovim rezonancama zajedničko to što, za razliku od *Williams*-ovih rezonanci, one prolaze kroz sam glavni prsten malih planeta. Rezonance prikazane na Sl. 41. i 43. pri tom slično i izgledaju - obe su sa unutrašnje strane ograničene rezonancom 3:1 u srednjem kretanju (2.5 AJ), u svom srednjem delu presecaju oblast malih nagiba, a sa spoljašnje strane ih zatvara rezonanca 2:1 (2.28 AJ). Interesantno je primetiti da rezonanca $g + f - g_{56} - f_{56}$ uopšte nije definisana u onoj oblasti unutrašnjeg dela prstena u kojoj se nalazi *Flora*, premda smo se uverili da član sa ovim imeniocem bitno utiče na tačnost računa dugo-periodičnih poremećaja za ovu malu planetu. To, naravno, ukazuje na činjenicu da malim imeniocima ne moraju obavezno da budu pridružene i tačne rezonance, a da njihov uticaj na račun

poremećaja ipak bude velik. Na žalost, ovo baš ne ide u prilog optimističkim očekivanjima u vezi daljeg razvoja i primene analitičke teorije na izučavanje poremećenog kretanja malih planeta, pošto ispada da je čitav prsten malih planeta ispresecan manje ili više važnim sekularnim rezonancama, da mali imenioci imaju znatan uticaj čak i tamo gde rezonanci uopšte i nema i da se, dakle, u računu dugo-periodičnih poremećaja za praktično svaku malu planetu neizbežno javljaju članovi koji tu unose manje ili veće greške.

Sudeći, dalje, prema Slici 44., na kojoj su ponovo prikazane neke od opisanih rezonanci, ali ovoga puta predstavljene samo krivama koje odgovaraju tačnoj rezonanci i na pozadini koju čine položaji u datoj ravni nekih 3000 malih planeta, sve tri velike *Hirayama*-ine familije koje se nalaze u spoljašnjem delu prstena - *Koronis*, *Eos* i *Themis* - ugrožene su bliskim sekularnim rezonancama. Tu, međutim, kako smo već više puta konstatovali, postoje znatne razlike od slučaja do slučaja, a i činjenica je da se ni jedna od tri odabrane "četverofrekventne" rezonance ne poklapa ni sa kakvom prazninom u raspodeli malih planeta (što ukazuje na njihov razmerno manji uticaj). Ipak, očigledno se jednim delom i ovim može tumačiti naš raniji nalaz, do kojeg smo došli analizirajući tačnost sopstvenih elemenata izvedenih pomoću *Yuasa*-ine teorije, a to je da su greške sopstvenih ekscentričnosti i nagiba u pravilu znatno veće od onih koje se dobijaju za odgovarajuće velike poluose. Otud, možemo sa prilično sigurnošću tvrditi da, bar kod *Koronisa* i *Eosa*, i ove sekularne rezonance igraju u tom smislu sasvim određenu ulogu.



Slika 44. Sekularne rezonance i prsten malih planeta.

Moglo bi se na kraju, sa nešto pesimističkijeg stanovišta, postaviti i pitanje da li je uopšte moguće dalje bitno unaprediti već dostignutu tačnost sopstvenih elemenata pomoću čisto analitičke teorije? Iako će konačan odgovor na to pitanje dati očigledno tek buduća istraživanja, mi ćemo ovde, u sledećem i završnom odeljku cele naše analize, ipak pokušati da skiciramo neke moguće ideje i puteve za postizanje ovog cilja.

6. MOGUĆNOSTI ZA BUDUĆI RAD

Ima, naravno, dosta mogućnosti i načina za dalje nadograđivanje i razvoj teorije poremećenog kretanja malih planeta i metoda za izvođenje njihovih sopstvenih elemenata, ali ćemo se mi ovde ograničiti samo na nekoliko najinteresantnijih. Pri tom ćemo posebnu pažnju posvetiti upravo onim mogućnostima koje se skupno mogu označiti kao razrada i poboljšanje već poznatih obrazaca, ali ćemo se malo pozabaviti i nekim sasvim novim i za sada još nedovoljno proverenim idejama. Takođe, premda ćemo reći nekoliko reči o perspektivi i problemima u vezi čisto numeričkih metoda za izvođenje sopstvenih elemenata malih planeta, težište naše diskusije biće ipak na mogućnostima za dalji razvoj analitičkog pristupa i u tom kontekstu naročito Yuasa-ine teorije.

Videli smo već i pominjali da su Carpino et al. (1986) inaugurisali jednu novu, čisto numeričku metodu za izvođenje sopstvenih elemenata, koja se sastoji iz dva osnovna segmenta - eliminisanja kratko-periodičnih poremećaja pomoću nisko-propusnog numeričkog filtera i Fourier-ove analize dugo-periodičnih varijacija, gde se slobodna oscilacija dobija kao prvi harmonik trigonometrijske serije. Takođe je već rečeno da se tu radi o potencijalno veoma efikasnom i tačnom postupku, koji u najvećoj meri pojednostavljuje izvođenje i izbegava sve one dobro poznate poteškoće koje se susreću kod analitičkih teorija. Iako je za sada primenjen samo u najjednostavnijem slučaju tri tela, ovaj postupak neosporno ima ozbiljnu perspektivu i u ne tako dalekoj budućnosti će verovatno biti sasvim konkurentan, ako ne i osnovni metod za određivanje

sopstvenih elemenata. Trenutno, međutim, još uvek nije potpuno jasno kako prevladati neke evidentne probleme i slabosti ovog postupka, a pre svega one koji se odnose na neophodnost da se, u cilju obezbeđivanja zaista tačnih sopstvenih elemenata, putanja svake male planete numerički integrali u "dovoljno dugom" vremenskom intervalu. Ako i pretpostavimo da je moguće prevazići tehničke probleme u vezi s činjenicom da treba integraliti nekoliko hiljada putanja malih planeta poremećenih od strane više velikih planeta, a što je za sada teško ostvariti u nekom razumnom vremenu čak i sa najboljim postojećim kompjuterima, ostaje i dalje problem kako u svakom konkretnom slučaju odrediti koliki je taj optimalni, dovoljno dugi vremenski period koji će nam sigurno obezbediti tačne rezultate; prisetimo se samo razlika s kojima smo imali prilike da se sretnemo kod onih nekoliko slučajeva koje smo detaljnije obradili u ovoj tezi. Treba, sem toga, imati u vidu da je za pouzdano provođenje *Fourier*-ove analize potrebno integracijom pokriti bar nekoliko ciklusa svake oscilacije, pa, dakle, i one sa najdužim periodom, tako da dolazimo do zaključka da su vremenski intervali neophodni za ovu svrhu uglavnom reda veličine 10^6 - 10^7 god., a u nekim slučajevima možda čak i duži. Napominjući, uz to, da je još uvek za potrebe provere rezultata numeričkih metoda neophodno upoređenje sa rezultatima odgovarajućih analitičkih teorija, postaje, čini se, jasno zašto se za sada numerička metoda još uvek ne može primeniti u punoj meri.

Ono što se ipak, u vezi s ovom metodom, jedino već i sada može poduzeti je da se ona primeni na manji broj odabranih

malih planeta (napr. u onim slučajevima u kojima analitička teorija ne daje dobre rezultate), u okviru realnog modela Sunčevog sistema, a radi provere same metode i njenog daljeg usavršavanja, pa bi to, možda, u neposrednoj budućnosti i u očekivanju novih, još moćnijih kompjutera, trebalo i pokušati.

Što se analitičke teorije tiče, a napose Yuasa-ine teorije sekularnih poremećaja malih planeta, najočigledniji način da se ode korak dalje u odnosu na već dostignuti nivo razvoja i primene je da se u funkciji poremećaja, odnosno odgovarajućem Hamiltonijanu, uzmu u obzir članovi viših redova i stepena od onih do sada već obuhvaćenih. No, podsetimo odmah na rezerve koje smo ranije izneli u vezi ove inače neosporno važne mogućnosti, a imajući u vidu komplikacije do kojih bi moglo doći zbog pojave novih rezonantnih članova i u tom sklopu naročito novih sekularnih rezonanci, odnosno zbog toga što bismo u cilju očuvanja konzistentnosti teorije morali uvesti u račun pored Jupitera i druge poremećajne planete. S druge strane, ovakvim proširenjem funkcije poremećaja obuhvatili bismo i rezonance u srednjem kretanju višeg reda, čime bi se i njihovi uticaji u sklopu kratko-periodičnih poremećaja, odnosno dugo-periodičnih poremećaja drugog reda, napr., mogli eksplicitno uračunavati. Treba, nadalje, imati u vidu i činjenicu da je razvoj teorije u kojoj bi bio uzet u obzir veći broj članova funkcije poremećaja izuzetno obiman zadatak, koji bi se mogao savladati verovatno samo uz pomoć kompjuterskih tehnika algebarske manipulacije, za šta bi opet trebalo razvijati i/ili primenjivati specijalni softver, itd.

Otuda, dakle, proizilazi da ni sa probitačnošću ove opcije

nismo za sada sasvim načisto, pa bi se verovatno u vezi s tim moglo zaključiti samo to da je neophodno još jednom pažljivo razmotriti sve argumente "za" i "protiv" ovakve mogućnosti razvoja teorije, pre nego što bi se eventualno upustili u pokušaj njene konkretne realizacije.

Sledeća mogućnost za unapređenje analitičke teorije odnosi se na već pomenuto uvođenje više poremećajnih planeta u račun i to kako u smislu uračunavanja njihovog neposrednog dejstva na malu planetu, tako i u smislu uzimanja u obzir njihovih međusobnih dejstava. Kod kratko-periodičnih poremećaja, kako smo se ranije uverili, ova se ideja može relativno lako provesti - poremećaji od strane svake velike planete zasebno se određuju, a ukupni efekat se dobija kao njihov prost zbir. U praksi, doduše, treba voditi računa o nekim tehničkim pojedinostima, kao napr. o različitim definicijama *Laplace*-ovih koeficijenata za unutrašnje i spoljašnje poremećajne planete i sl., ali, sve u svemu, jednom razrađen postupak lako je prilagoditi i tako odrediti uticaje za proizvoljan broj poremećajnih tela. Kod dugo-periodičnih poremećaja, na žalost, nije ista situacija i tu se, kao što smo takođe već ranije objasnili, javljaju znatne komplikacije sa uvođenjem u račun svake nove velike planete. Iako rešenja jednačina varijacije elemenata kretanja zadržavaju isti konačni oblik bez obzira na broj poremećajnih tela koja se uzimaju u obzir, jasno je da bi generatrisa S_1^* u slučaju uvođenja većeg broja poremećajnih tela bila znatno složenija, sa mnogo više članova i sa kompleksnijom strukturom pojedinih članova. Izvođenje proširene generatrise bi opet imalo smisla poduzeti samo uz primenu kompjuterske

algebre, to opet dovodi do potrebe za razvojem i/ili primenom odgovarajućeg softvera, itd.

Ima, ipak, nešto što se u vezi s ovom varijantom unapređenja teorije može bez većih poteškoća učiniti odmah, i na tome je nešto rađeno već i u okviru pripreme ove teze. Reč je o uvođenju novih poremećajnih tela, ali samo u račun prinudnih oscilacija, pošto se ove, kao što je poznato, jednostavno određuju na osnovu poznatih parametara kretanja velikih planeta, računaju se član po član, a ukupan efekat im je jednak prostom zbiru pojedinačnih doprinosa. U Yuasa-inoj teoriji se za izračunavanje dugo-periodičnih poremećaja, kao što je već više puta napomenuto, u funkciji poremećajnog tela koristi samo Jupiter i to i sam poremećen Saturnom, pa su, radi homogenosti, u celoj našoj analizi pri određivanju prinudnih oscilacija takođe uzimana u obzir samo ta dva člana. Jasno je da je to minimalan broj članova i da se ovde sigurno može uvođenjem drugih planeta postići izvestan napredak u tačnosti, no, imajući u vidu nesumnjivo dominantnu ulogu Jupitera u poremećajima kretanja malih planeta, pitanje je da li je taj napredak zaista i od bitnog značaja.

Odgovor na pomenuto pitanje potražili smo tako što smo ranije izvedene srednje elemente naše četiri stalno korišćene male planete - *Flore*, *Koronisa*, *Eosa* i *Themisa* - podvrgli proceduri eliminisanja dugo-periodičnih uticaja, ali uzimajući u obzir prinudne oscilacije prouzrokovane Jupiterom poremećenim Saturnom, Uranom i Neptunom, odnosno Saturnom poremećenim Jupiterom. Umesto dva, imali smo na taj način u zbiru ukupno šest prinudnih članova i to, naravno, upravo onih najvećih. Ne

ulazeći nepotrebno u detalje ovog računa, razmotrićemo ovde samo njegove rezultate predstavljene u Tabeli 16., kao i obično, preko ukupnih varijacija Δ izvedenih sopstvenih ekscentričnosti i sopstvenih sinusa nagiba.

Tabela 16. Ukupne varijacije sopstvenih ekscentričnosti i sinusa nagiba. Slučaj poboljšanog računa prinudnih oscilacija.

	FLORA ($4 \cdot 10^8$ god.)	KORONIS ($1 \cdot 10^8$)	EOS ($2 \cdot 10^8$)	THEMIS ($1 \cdot 10^8$)
Δe_p	0.1051	0.0057	0.0087	0.0139
$\Delta \sin i_p$	0.1016	0.0040	0.0051	0.0059

Na osnovu upoređenja ovde dobijenih vrednosti ukupnih varijacija sa vrednostima datim ranije uz odgovarajuće grafike u odeljku 3.5.2, može se videti da tačnije računanje samo prinudnih oscilacija, kao što smo i pretpostavili, uglavnom (mada ne i obavezno) dovodi do izvesnog unapređenja u tačnosti rezultata, ali je to unapređenje relativno malo i najčešće nebitno u odnosu na ukupna odstupanja. Sem kod *Flore*, kod koje su razlike ukupnih varijacija nešto veće (kao, uostalom, i same ukupne varijacije), kod ostalih testiranih malih planeta te promene dostižu jedva $1\text{-}2 \cdot 10^{-8}$ i nešto su, u opštem slučaju, veće za nagib nego za ekscentričnost. No, one definitivno ne rešavaju problem nedovoljne tačnosti izvedenih sopstvenih elemenata, niti značajnije doprinose u smislu njihove primenjivosti u klasifikaciji malih planeta u familije.

Poslednja koju ćemo opisati, ali zato možda najinteresantnija mogućnost za unapređenje analitičke teorije

sekularnih poremećaja kretanja malih planeta i procedure za izvođenje njihovih sopstvenih elemenata odnosi se na promene i poboljšanja samog formalizma na osnovu kojeg je izvedena ovde korišćena *Yuasa*-ina teorija. Unapređenje se, u stvari, sastoji od dva komplementarna zahvata i zasniva se na primeni poznate KAM (*Kolmogorov-Arnold-Moser*) teoreme u teoriji kanoničkih transformacija. Pokušaćemo ovde, ne ulazeći suviše u detalje komplikovane matematičke pozadine, da što jednostavnije predstavimo i problem i predloženo poboljšanje.

Izlažući ranije osnove teorije kanoničkih transformacija i mehanizam primene *Lie*-ovih redova, pomenuli smo, ali nismo izričito insistirali na činjenici da, u skladu sa KAM teoremom, transformaciona mapa T_s^*, koja se primenjuje u postupku eliminisanja dugo-periodičnih poremećaja, u stvari deluje kontravarijantno na faznom prostoru i otud upravo suprotno od onoga što je nama potrebno - od sopstvenih ka srednjim elementima (od novih ka starim promenljivim). Drugim rečima, generatrisa ove transformacije definisana je u funkciji novih promenljivih $S_1^* = S_1^*(p^*, q^*, r^*, s^*)$, pa tako ono što smo mi u praksi činili, a to je uvrštavanje srednjih elemenata (starih promenljivih) na desne strane jednačina (3.133), daje samo prvu aproksimaciju rešenja, odnosno odgovarajućih sopstvenih elemenata. Naravno, *Yuasa*-ina teorija je implicitno tako i definisana, a treba reći i da u nekim slučajevima već i prva aproksimacija daje zadovoljavajuće rezultate. Ipak, obzirom da u većini slučajeva i dalje postoji potreba za bitno boljom tačnošću rezultata (napr. sopstvenih elemenata), a da istovremeno postoji i prilično očigledan način za

prevazilaženje pomenutog teorijskog problema, Milani i Knežević (1989) su predložili jednu novu proceduru, čiju suštinu čini s jedne strane, uvođenje specifičnog iterativnog postupka, i, s druge, preuređenje polaznog Hamiltonijana. Napomenimo da, pošto se radi o originalnom pristupu, koji još nije prošao sve provere i kako za sada postoje samo neki preliminarni rezultati primene nove metode, ovo što sledi treba možda ipak uzimati s izvesnom rezervom, dakle, pre kao prvi pokušaj uobličavanja jednog novog pristupa, nego kao definitivno oformljenu i čvrsto potkrepljenu teoriju.

Naravno, iterativna procedura definisana je tako da se rešenja iz prethodne aproksimacije (nove promenljive i sopstveni elementi) ponovo uvrste u generatrisu S_1^* i ostale relevantne jednačine, pa se čitavo izvođenje ponavlja sve dok se ne zadovolji neki unapred dati uslov. Imajući u vidu činjenicu da je frekvencija slobodnih oscilacija malih planeta g_o, koja se javlja u generatrisi u Yuasa-inoj teoriji, konstanta definisana u okviru linearne teorije i da se u rešenjima ona popravlja za efekte prvog reda i četvrtog stepena, odnosno drugog reda i drugog stepena, s tim što popravka zavisi između ostalog i od sopstvenih elemenata, jasno je da u iteracijama treba ovu frekvenciju popravljati pri svakom koraku. Pri tom se mora voditi računa o činjenici da, nakon popravljanja, frekvencija za par promenljivih (p, q) više nije jednaka po apsolutnoj vrednosti onoj za par (r, s), pa ih, otud, u drugoj i narednim aproksimacijama treba u poremećajnim članovima odvojeno tretirati. S druge strane, pošto prinudne oscilacije zadržavaju iste definicije i u rešenjima iz linearne

teorije (3.121) i u odgovarajućim rešenjima *Yuasa*-ine teorije (3.132), amplitude ξ_{jl}, η_{jl} ovih članova se u iteracijama ne menjaju.

Što se preuređenja Hamiltonijana tiče, potsetićemo prvo da se *Yuasa*-in Hamiltonijan, koji se dobija nakon eliminisanja kratko-periodičnih članova, može u nešto proširenoj notaciji napisati u obliku:

$$F^* = F^*_{1,2} + F^*_{1,4} + F^*_{2,2} \tag{6.1}$$

gde je korespondencija sa ranijim oznakama data sa:

$$F^*_0 = F^*_{1,2}$$

$$F^*_1 = F^*_{1,4} + F^*_{2,2} \tag{6.2}$$

Kao što se može i pretpostaviti $F^*_{1,2}$ označava integrabilni Hamiltonijan prvog reda u odnosu na poremećajnu masu i drugog stepena u odnosu na promenljive, $F^*_{1,4}$ predstavlja članove prvog reda i četvrtog stepena, a $F^*_{2,2}$ one drugog reda i drugog stepena. Činjenica je, međutim, da integrabilni deo (6.1) nije samo $F^*_{1,2}$, već da se neposredno može integraliti i $F^*_{2,2}$. No, za tako nešto potrebno je prethodno odgovarajući red *Lie*-a srediti po stepenima promenljivih, a ne po stepenima malog parametra (kao u 3.81) i dobiti:

$$F^{**} = T_s{}^*F^* = F^* + \left\{F^*, S^*\right\} + \frac{1}{2}\left\{\left\{F^*, S^*\right\}, S^*\right\} + \ldots =$$

$$= F^*_2 + \left[\left\{F^*_2, S^*_4\right\} + F^*_4\right] + \ldots = F^*_2 + F^*_{4,\bullet} + \ldots \tag{6.3}$$

gde je očigledno:

$$F_2^* = F_{1,2}^* + F_{2,2}^*$$

$$F_4^* = F_{1,4}^* \qquad (6.4)$$

a $F_{4,e}^*$ je sekularni Hamiltonijan četvrtog stepena koji se dobija pogodnim izborom generatrise S_4^*. Sada je, dakle, celo F_2^* integrabilni deo, a samo se F_4^* podvrgava iterativnom postupku.

Ako izvršimo uobičajenu $F_2^* \longrightarrow F_2^{**}$ kanoničku transformaciju, dobijamo (analogno 3.120):

$$F_2^{**} = -K^* + \sum_j \left[\frac{m'_j A_1 + m'^2_j D_1}{L} \left(p^{*2} + q^{*2} \right) + \right.$$

$$+ \frac{m'_j A_3 + m'^2_j D_3}{L} \left(r^{*2} + s^{*2} \right) + \frac{m'_j A_5 + m'^2_j D_5}{L^{1/2}} \left(r^* r'_j - s^* s'_j \right) +$$

$$\left. + \frac{m'_j A_6 + m'_j D_6}{L^{1/2}} \left(p^* p'_j - q^* q'_j \right) \right] \qquad (6.5)$$

a kanonički sistem jednačina kretanja, koji uključuje samo ovaj Hamiltonijan:

$$\frac{dp^*}{dt} = \frac{\partial F_2^{**}}{\partial q^*} ; \quad \frac{dq^*}{dt} = -\frac{\partial F_2^{**}}{\partial p^*} ; \quad \frac{dr^*}{dt} = \frac{\partial F_2^{**}}{\partial s^*} ; \quad \frac{ds^*}{dt} = -\frac{\partial F_2^{**}}{\partial r^*} \qquad (6.6)$$

može da se reši na uobičajeni način, Lagrange-ovom metodom, pa se dobijaju rešenja:

$$p^* = L^{1/2}\left[\nu \cos(g_2 t + \beta) + \sum_j \sum_l \xi_{jl} \cos(g_{jl} t + \beta_{jl})\right]$$

$$q^* = -L^{1/2}\left[\nu \sin(g_2 t + \beta) + \sum_j \sum_l \xi_{jl} \sin(g_{jl} t + \beta_{jl})\right]$$

$$r^* = L^{1/2}\left[\mu \cos(f_2 t + \gamma) + \sum_j \sum_l \eta_{jl} \cos(f_2 t + \gamma_{jl})\right]$$

$$s^* = -L^{1/2}\left[\mu \sin(f_2 t + \gamma) + \sum_j \sum_l \mu_{jl} \sin(f_{jl} t + \gamma_{jl})\right] \qquad (6.7)$$

Rešenja (6.7) odgovaraju rešenjima (3.121) koja se dobijaju u okviru klasične linearne teorije, pa se otud ovde može govoriti o <u>linearnoj teoriji drugog reda</u>. Razlike rešenja svode se zapravo na razlike u definicijama frekvencija slobodnih oscilacija i amplituda prinudnih oscilacija, koje sada postaju:

$$g_2 = \sum_j 2\,\frac{m'_j A_1 + m'^2_j D_1}{L} \quad ; \qquad f_2 = \sum_j 2\,\frac{m'_j A_3 + m'^2_j D_3}{L}$$

$$\xi_{jl} = \frac{-\nu_{jl}(m'_j A_5 + m'^2_j D_5)}{(g_2 - g_{jl})\,L} \quad ; \qquad \eta_{jl} = \frac{-\mu_{jl}(m'_j A_5 + m'^2_j D_5)}{(f_2 - f_{jl})\,L} \qquad (6.8)$$

Naravno, generatrisa S_4^* više ne sadrži članove drugog reda, niti se oni pojavljuju u izrazima za popravke frekvencija (3.131). Ostatak procedure za izvođenje sopstvenih elemenata ostaje isti, čak i izrazi (3.129), odnosno (3.134) i (3.135), zadržavaju isti oblik, s tim što se mora voditi računa o novim definicijama.

Jedna od uzgrednih prednosti koje se postižu opisanim preuređenjem Hamiltonijana je i ta da sada iteracije počinju od vrednosti promenljivih i frekvencija koje su u većini slučajeva znatno bliže konačnim vrednostima, nego što je to bio slučaj sa vrednostima dobijenim na osnovu klasične linearne teorije. Takođe, i sam račun je nešto pojednostavljen, pošto se članovi drugog reda ne moraju uvek iznova računati u toku iteracija.

Označavajući vektore srednjih i sopstvenih elemenata sa **M** i **P**, respektivno, a vektor parametara prinudnih oscilacija sa Ψ, može se naša situacija šematski prikazati na sledeći način (α je, da podsetimo, odnos poluosa male i poremećajne planete):

$$\mathbf{M} \underset{\text{KAM}}{\overset{\text{Yuasa}}{\rightleftarrows}} \mathbf{P} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{M} + C\,[\mathbf{M},\ g_o(\alpha),\ \Psi] \\ \mathbf{M} &= \mathbf{P} + C\,[\mathbf{P},\ g(g_2,\mathbf{P},\Psi),\ f(f_2,\mathbf{P},\Psi),\ \Psi] \end{aligned} \tag{6.9}$$

Na isti način, naša iterativna procedura može da se predstavi kao:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_o &= \mathbf{M} \\ \mathbf{P}_1 &= \mathbf{M} + C\,[\mathbf{M},\ g_2(\alpha),\ f_2(\alpha),\ \Psi] \\ \mathbf{P}_2 &= \mathbf{M} + C\,[\mathbf{P}_1,\ g_4(g_2,\mathbf{P}_1,\Psi),\ f_4(f_2,\mathbf{P}_1,\Psi),\ \Psi] \\ &\vdots \\ \mathbf{P}_\infty &= \mathbf{M} + C\,[\mathbf{P}_\infty,\ g_4(g_2,\mathbf{P}_\infty,\Psi),\ f_4(f_2,\mathbf{P}_\infty,\Psi),\ \Psi] \end{aligned} \tag{6.10}$$

i ako je ista konvergentna, rezulatat $\mathbf{P}_\infty$ treba da zadovolji drugu (KAM) jednačinu (6.9):

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}_\infty + C\,[\mathbf{P}_\infty,\ g,\ f,\ \Psi] \tag{6.11}$$

U praksi, naravno, iteracije se zaustavljaju kada se ispuni neki unapred zadati uslov tačnosti; u primerima koje ćemo opisati, za izlaz iz iterativne procedure korišćen je uslov da razlike frekvencija g i f u dve uzastopne iteracije moraju obe istovremeno biti manje od 10^{-2} "/god. (što se može smatrati dosta strogim uslovom). U slučajevima kada pomenuti uslov nije bio ispunjen u prvih 20 iteracija, procedura je smatrana divergentnom. Od ukupno 3530 numerisanih malih planeta za koje smo pomoću iterativnog postupka pokušali izvesti sopstvene elemente, u 396 slučajeva procedura se pokazala divergentnom, dok je kod ostalih najčešće bilo potrebno 4-6 iteracija da bi se dobio rezultat.

Tačnost sopstvenih elemenata izvedenih pomoću nove teorije proverili smo na već uobičajeni način - koristeći integracije u periodima od $4 \cdot 10^3$ god. za *Floru*, *Koronis*, *Eos* i *Themis*. Pokazalo se, međutim, da je za *Floru* i za *Eos* procedura divergentna, za *Koronis* je bila konvergentna u celom obuhvaćenom intervalu vremena, dok je za *Themis* konvergirala u prvih $2.5 \cdot 10^3$ god. (ali sa promenljivom brzinom, mereno brojem iteracija potrebnih za ispunjenje postavljenog uslova), dok je kasnije, za pojedine epohe, dolazilo do pojava divergencije i čak "ispadanja" i zaustavljanja izvršenja kompjuterskog programa. Ukupna varijacija sopstvene ekscentričnosti *Koronisa* u intervalu od 10^3 god. iznosila je ovde $\Delta e_p = 0.0069$, a ona sopstvenog nagiba $\Delta \sin i_p = 0.0058$, što je čak nešto lošije od rezultata dobijenih pomoću Yuasa-ine teorije, ali je zato kod *Themisa* dobijeno $\Delta e_p = 0.0065$, $\Delta \sin i_p = 0.0058$, što u svakom slučaju predstavlja, naročito za sopstvenu ekscentričnost,

izuzetan napredak.

Ne može se, naravno, na osnovu ovo malo materijala doneti konačan sud o efikasnosti i tačnosti nove, iterativne procedure za izvođenje sopstvenih elemenata malih planeta, ali se zato, na kraju ove naše analize, možda može predložiti jedan drugi zaključak, opšteg značenja i domašaja, koji bi mogao da znači važnu promenu u dosadašnjem gledanju na analitičku teoriju sekularnih poremećaja kretanja malih planeta, i u tom sklopu i na izvođenje njihovih sopstvenih elemenata. Imajući u vidu, naime, ovo što je rečeno o raznim mogućnostima unapređenja teorije, kao i ono što smo ranije našli ispitujući tačnost izvedenih sopstvenih elemenata, a u vezi sa činjenicom da napr. kod *Flore* članovi prvog reda i četvrtog stepena imaju daleko veći značaj od onih drugog reda, da je kod *Themisa* upravo suprotno, da jednom sekularne rezonance, drugi put one u srednjem kretanju, a treći put i jedne i druge, znatno utiču na tačnost rezultata itd., nameće se zaključak da zapravo možda nikada neće ni biti moguće definisati samo jednu analitičku teoriju sekularnih poremećaja malih planeta, koja bi bila najbolja za sve male planete i za sva vremena. Umesto toga, neka nam bude dozvoljeno da prognoziramo, verovatno će se ubuduće morati ići u pravcu razvoja više raznih varijanti jedne teorije, ili čak više teorija, koje će najbolje opisivati kretanje ove ili one male planete, ove ili one grupe malih planeta, ovog ili onog dela njihove ukupne populacije. Moguće da će tek tada i problem određivanja sopstvenih elemenata malih planeta sa tačnošću koja omogućuje njihovo pouzdano klasifikovanje u familije, naći svoje pravo i potpuno rešenje.

7. ZAKLJUČCI

Pokušaćemo, na kraju, da u ovom završnom odeljku još jednom ukratko navedemo i sumiramo glavne rezultate i zaključke do kojih smo došli u ovoj tezi:

- prvo, treba odmah reći, na osnovu svega onoga što je u uvodnim napomenama izneseno u vezi složenosti i značaja problema obezbeđivanja sopstvenih elemenata kretanja malih planeta sa tačnošću koja omogućuje pouzdano identifikovanje familija, da se tu očigledno radi o važnoj i aktuelnoj materiji i o pitanjima čije je rešavanje uslov za dalji napredak u istraživanjima načina nastanka i evolucije kako samih familija, tako i prstena malih planeta u celini;

- prevashodni cilj koji smo postavili u ovoj tezi, a to je izvođenje sopstvenih elemenata sa tačnošću bitno boljom od one koju imaju do sada raspoloživi rezultati klasične, linearne teorije, odnosno teorije *Williams*-a, pokušali smo ostvariti pomoću teorije *Yuasa*-e. To je jedna savremena, čisto analitička teorija, zasnovana na *Hori*-jevoj opštoj teoriji poremećaja u nespecifikovanim kanoničkim promenljivim, koja omogućuje da se rešenja jednačina kretanja dobiju u eksplicitnoj formi i u slučaju kada se u funkciji poremećaja uzimaju u obzir članovi višeg reda i stepena. U konkretnom slučaju, u teoriji *Yuasa*-e, u obzir su uzeti članovi do četvrtog stepena ekscentričnosti i nagiba u prvom redu po poremećajnoj masi, odnosno drugog stepena u drugom redu po masi. Od poremećajnih planeta u obzir je uzet samo Jupiter poremećen Saturnom, dok su uticaji ostalih

planeta uračunati implicitno;

- u originalnoj verziji Yuasa-ine teorije, u Hamiltonijanu drugog reda, uočili smo neke greške i propuste, koji su u ovoj tezi ispravljeni i otklonjeni, a zatim su izvedene popravljene vrednosti odgovarajućih koeficijenata i sekularnih frekvencija. Polazni Hamiltonijan je dopunjem indirektnim delom i izražen u odnosu na fiksnu ravan, što je omogućilo da naše račune sprovedemo u uobičajenom, heliocentričnom, ekliptičkom koordinatnom sistemu. To opet, sa svoje strane, omogućuje neposredno i jednostavno korišćenje postojećih podataka za male planete, odnosno parametara kretanja velikih planeta, direktno upoređenje sa rezultatima drugih autora, itd. Na taj način je postignuto da se Yuasa-ina teorija "stavi u funkciju" i da se tako, prvi put, jedna analitička teorija višeg reda i stepena upotrebi za masovno određivanje sopstvenih elemenata kretanja malih planeta;

- zastarela i nedovoljno tačna teorija kretanja velikih planeta *Brouwer*-a i *Van Woerkom*-a, koja je do sada redovno korišćena pri izvođenju sopstvenih elemenata malih planeta, zamenjena je ovde savremenim teorijama *Laskar*-a, odnosno *Duriez*-a, koje, svaka u okviru svog modela Sunčevog sistema, predstavljaju najbolja raspoloživa rešenja. Parametri preuzeti iz ovih teorija popravljeni su i prilagođeni definicijama promenljivih koje se koriste u teoriji Yuasa-e, čime je dodatno uvećan stepen njene konzistentnosti;

- određivanje i eliminisanje kratko-periodičnih poremećaja pomoću Yuasa-ine teorije pokazalo se veoma jednostavnim i

efikasnim. Dobijeni su srednji elementi visoke tačnosti i dugo-periodične stabilnosti, čije odstupanje od konstantnosti, odnosno od vrednosti dobijenih nezavisnim, čisto numeričkim postupkom, uglavnom ne prelazi nekoliko desethiljaditih delova odgovarajućih jedinica. Postignuta tačnost, pored toga, nezavisna je od modela Sunčevog sistema u okviru kojeg se vrši računanje i ostaje podjednako visoka sve dok se svi najvažniji poremećajni efekti u modelu uzimaju u obzir. Verovatno nije potrebno posebno objašnjavati od kakvog je značaja činjenica da je nađena relativno jednostavna mogućnost za eksplicitno ocenjivanje tačnosti izvedenih elemenata i da su te ocene za jedan broj malih planeta ovde prvi put i izvedene;

- dva glavna izvora grešaka u srednjim elementima su zanemareni deo funkcije poremećaja i rezonance u srednjem kretanju. Na sreću, pokazalo se da su za "standardne" putanje greške usled zanemarivanja članova funkcije poremećaja višeg stepena uglavnom male i da su napr. kritične vrednosti ekscentričnosti i nagiba, za koje preostale varijacije srednje velike poluose postaju veće od 10^{-3} AJ, relativno visoke, naročito u unutrašnjem delu prstena. S druge strane, rezonance u srednjem kretanju, generalno uzev, imaju znatno veći negativni uticaj na rezultate, ali, opet na sreću, taj uticaj postaje i zaista značajan uglavnom samo u neposrednoj blizini rezonanci. Otud, može se zaključiti da se srednji elementi, a napose srednje (≡ sopstvene) velike poluose, u okviru Yuasa-ine teorije izvode sa tačnošću koja u potpunosti zadovoljava potrebe klasifikacije malih planeta u familije;

- određivanje i eliminisanje dugo-periodičnih poremećaja i izvođenje sopstvenih elemenata kretanja malih planeta u modelu tri tela, sa Jupiterom na fiksnoj eliptičkoj putanji, dalo je u tri od četiri ispitana slučaja (*Flora*, *Koronis*, *Eos*) rezultate izrazito visoke tačnosti. Ukupne varijacije sopstvenih ekscentričnosti i nagiba, uvedene kao mera maksimalnog odstupanja datog sopstvenog elementa od odgovarajuće konstantne vrednosti, bile su u sva tri slučaja i za oba elementa reda 10^{-3} ili još manje. Za *Themis*, međutim, dobijeni rezultati su bili slabije tačnosti od one koja se postiže pomoću linearne teorije, što smo objasnili uticajem bliske 2:1 rezonance u srednjem kretanju na koeficijente članova drugog reda po masi i na frekvencije slobodnih oscilacija koje se javljaju u imeniocima članova prvog reda i četvrtog stepena. Ovakvi, s jedne strane izuzetno dobri, a s druge izrazito loši rezultati, posledica su činjenice da model tri tela predstavlja krajnje pojednostavljenu dinamičku šemu, koja se zbog toga pokazuje kao sasvim neadekvatna za iole finija i zahtevnija istraživanja realnih fenomena;

- ponovo treba istaći da je i u slučaju sopstvenih elemenata uvođenjem njihove ukupne varijacije, kao mere odstupanja od konstantnosti, obezbeđena jedna jednostavna mogućnost da se prvi put neposredno oceni tačnost računa dugo-periodičnih poremećaja kretanja malih planeta i izvedenih sopstvenih elemenata, ali gde moramo da imamo u vidu da je važnost ove ocene vremenski ograničena na onaj period za koji je data putanja numerički integraljena;

- određivanje i eliminisanje dugo-periodičnih poremećaja i izvođenje sopstvenih elemenata kretanja malih planeta pomoću Yuasa-ine teorije, a u slučaju šest tela, sa Jupiterom, Saturnom, Uranom i Neptunom kao poremećajnim planetama, pokazalo je da u ovom, stvarnosti najbližem modelu Sunčevog sistema korišćenom u našim analizama, ni jedna od postojećih teorija sekularnih poremećaja, pa ni ova naša teorija višeg reda i stepena, ne može da dâ sopstvene ekscentričnosti, odnosno sinuse nagiba sa greškom manjom od 10^{-3}, što se, inače, smatra dovoljnim za pouzdanu klasifikaciju malih planeta u familije. Rezimirajući rezultate dobijene u ovoj tezi za najveće članove četiri klasične *Hirayama*-ine familije - *Floru*, *Koronis*, *Eos* i *Themis* - možemo reći da pri određivanju sopstvenih elemenata ovih malih planeta za neku proizvoljnu epohu treba očekivati da sopstvena ekscentričnost *Koronisa* ne odstupa od tačne vrednosti za više od $3.5 \cdot 10^{-3}$, ona *Eosa* za više od $4.5 \cdot 10^{-3}$ i ona *Themisa* za više od $7 \cdot 10^{-3}$. Što se sopstvenih nagiba tiče, njihovi sinusi u bilo kom trenutku neće odstupati od tačne vrednosti za više od $3 \cdot 10^{-3}$ kod *Koronisa*, odnosno $4 \cdot 10^{-3}$ kod *Eosa* i *Themisa*. Za *Floru* je nađeno da primenjena analitička teorija ne daje upotrebljive rezultate;

- premda, dakle, ni u ovoj tezi nisu sopstveni elementi malih planeta dobijeni sa potrebnom tačnošću, ipak je napravljen značajan korak u tom pravcu. Preostale varijacije bitno su smanjene, naročito kod ekscentričnosti, a i odstupanja od konstantnih vrednosti za ekscentričnost i nagib su bar u jednom broju slučajeva dovedena na praktično isti nivo, što doprinosi smanjenju asimetrije u faznom prostoru putanjskih

elemenata i doprinosi pouzdanijem definisanju familija. Takođe, sada nam je i tačno poznato koliko smo još sa našim rezultatima daleko od potrebne tačnosti, što nam zasigurno može pomoći u nastojanju da nađemo puteve za eventualno postizanje tog cilja;

- rezultati određivanja sopstvenih ekscentričnosti i nagiba za malu planetu *Flora* izrazito su loši, a odgovornost za to je pripisana članovima funkcije poremećaja prvog reda i četvrtog stepena, odnosno pojavi malih imenilaca u tim članovima (sekularne rezonance). Kako ni linearna teorija u ovom slučaju ne obezbeđuje dovoljno tačne rezultate, jasno je da smo se ovde suočili sa nepremostivim poteškoćama u primeni analitičke teorije i, sa aspekta klasifikacije, praktično beznadežnom situacijom. S druge strane, međutim, ovo objašnjava konfuziju u vezi sa definicijom familije *Flora* i velikim razlikama u identifikaciji njenih članova, odnosno podfamilija, koje se javljaju u klasifikacijama raznih autora. Ipak, treba reći da se svi ti autori slažu da familija *Flora*, u ovom ili onom obliku, zaista postoji, a ima i drugih, napr. kosmohemijskih indicija koje takođe idu tome u prilog;

- jedan od najvažnijih originalnih doprinosa koji su dati u ovoj tezi odnosi se na omogućavanje novog, kompleksnijeg i produbljenijeg sagledavanja problematike sekularnih rezonanci. Tako napr. naša nova teorija višeg reda i stepena dozvoljava da se već poznate osnovne sekularne rezonance preciznije i sveobuhvatnije definišu i predstave u interakciji sa najvažnijim rezonancama u srednjem kretanju. Takođe, opisane su i locirane do sada neispitane rezonance određene kombinacijama

po četiri fundamentalne frekvencije. Za ove poslednje je nađeno da, po svemu sudeći, uzduž i popreko presecaju čitav prsten malih planeta, da im, međutim, nisu pridružene nikakve uočljive praznine u raspodeli malih planeta, da se neke od njih nalaze u neposrednoj blizini velikih familija, itd. Takođe, razmotren je i problem malih imenilaca u dugo-periodičnim članovima funkcije poremećaja uopšte i u vezi s tim je utvrđeno da oni zaista u nekim slučajevima bitno utiču na tačnost rezultata dobijenih pomoću analitičke teorije, pa čak dovode u pitanje i samu njenu primenu u date svrhe;

- među najinteresantnijim mogućnostima za budući rad na pitanjima daljeg razvoja i usavršavanja teorija sekularnih poremećaja kretanja malih planeta i unapređenja tačnosti njihovih sopstvenih elemenata, pomenuta je, pre svega, potencijalno značajna, čisto numerička metoda, koja predstavlja kombinaciju numeričkog integraljenja, numeričkog filtriranja i *Fourier*-ove analize. Zatim, a u vezi sa analitičkim teorijama tipa *Yuasa*-ine teorije, analizirana je mogućnost unapređenja teorije putem daljeg proširivanja funkcije poremećaja u smislu uzimanja u obzir članova još višeg reda i stepena, kao i mogućnost uključivanja u račun poremećaja većeg broja poremećajnih planeta. Kao posebno važna mogućnost predložena je jedna usavršena iterativna procedura izvođenja sopstvenih elemenata, sa preuređenim polaznim Hamiltonijanom i inicijalnim rešenjem izvedenim pomoću linearne teorije drugog reda. Konačno, ponuđeno je i novo viđenje budućeg razvoja u smislu potrebe kreiranja teorija koje će, umesto da pretenduju da budu opštevažeće i najbolje za sve male planete i za sva vremena,

ići na to da najefikasnije i najtačnije opišu kretanja pojedinih malih planeta, njihovih grupa ili delova populacije, i sl.

- pomenimo, na samom kraju, još jednu važnu činjenicu proisteklu iz okvira rada na ovoj tezi, a to je da su ovde opisani postupci za izvođenje i odgovarajuće liste sopstvenih elemenata malih planeta pretočeni u kompjuterske algoritme, programe i datoteke i da, u IAU Centru za male planete u Cambridge-u, S.A.D. (*B. Marsden*), odnosno Asteroidnoj bazi podataka u *Pasadena*-i, S.A.D. (*E. Tedesco*), stoje na raspoloženju međunarodnoj astronomskoj javnosti.

REFERENCE

Alfven, H.: 1964, Icarus 3, 52.

Alfven, H.: 1969, Astrophys. Space Sci. 4, 84.

Anders, E.: 1964, Space Sci. Rev, 3, 583.

Anders, E.: 1965, Icarus 4, 399.

Anolik, M.V., Krasinsky, G.A. and Pius, L.Yu.: 1969, Trans. Inst. Astron. Leningrad 14, 3.

Arnold, J.R.: 1969, Astron. J. 74, 1235.

Bowell, E., Chapman, C.R., Gradie, J.C., Morrison, D., and Zellner, B.: 1978, Icarus 35, 313.

Brahic, A.: 1975, Icarus 25, 452.

Bretagnon, P.: 1974, Astron. Astrophys. 30, 141.

Bretagnon, P.: 1982, Astron. Astrophys. 114, 278.

Bretagnon, P.: 1984, In: *Milankovitch and Climate I* (A.L. Berger, J. Imbrie, J. Hays, G. Kukla and B. Saltzman, Eds.), D.Reidel Publ. Comp., p. 3.

Brouwer, D. and Van Woerkom, A.J.J.: 1950, Astron. Papers U.S. Naval Obs. Naut. Almanac Off. 13, 85.

Brouwer, D.: 1951, Astron. J. 56, 9.

Brouwer, D. and Clemence, G.M.: 1961, *Methods of Celestial Mechanics*. Academic Press.

Brumberg, V.A., Evdokimova, L.S. and Skripnichenko, V.I.: 1975, Celestial Mechanics 11, 131.

Capaccioni, F., Cerroni, P., Coradini, M., Farinella, P., Flamini, E., Martelli, G., Paolicchi, P., Smith, P.N. and Zappalá, V.: 1984, Nature 308, 832.

Carpino, M., Gonczi, R., Farinella, P., Froeschle, Ch., Froeschle, Cl., Paolicchi, P., and Zappalá, V.: 1986, Icarus 68, 55.

Carpino, M., Milani, A. and Nobili, A.M.: 1987, Astron. Astrophys. 181, 182.

Carpino, M.: 1988, personal communication.

Carusi, A. and Massaro, E.: 1978, Astron. Astrophys. Suppl. 34, 81.

Carusi, A. and Valsecchi, G.B.: 1982, Astron. Astrophys. 115, 327.

Chapman, C.R. and Davis, D.R.: 1975, Science 190, 553.

Chapman, C.R.: 1985, Bull. Amer. Astron. Soc. 17, 730.

Davis, D.R., Chapman, C.R., Greenberg, R., Weidenschilling, S.J. and Harris, A.W.: 1979, In: Asteroids (T. Gehrels, Ed.), p. 528.

Davis, D.R., Chapman, C.R., Weidenschilling, S.J. and Greenberg, R.: 1985, Icarus 62, 30.

Delaunay, C.E.: 1860, Mem. Acad. Sci. Paris 28.

Delaunay, C.E.: 1867, Mem. Acad. Sci. Paris 29.

Dermott, S.F. and Murray, C.D.: 1981, Nature 290, 664.

Dermott, S.F. and Murray, C.D.: 1983, Nature 301, 201.

Dermott, S.F., Nicholson, P.D., Burns, J.A. and Houck, J.R.: 1984, Nature 312, 505.

Dohnanyi, J.W.: 1969, J. Geophys. Res. 74, 2531.

Duriez, L.: 1979, Ph.D. Thesis. Univ. Lile.

Everhart, E.: 1985, In: *Dynamics of Comets: Their Origin and Evolution* (A. Carusi and G.B. Valsecchi, Eds.), D. Reidel Publ. Comp., p. 185.

Farinella, P., Paolicchi, P. and Zappalá, V.: 1982, Icarus 52, 409.

Farinella, P., Paolicchi, P. and Zappalá, V.: 1985, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 216, 565.

Farinella, P., Carpino, M., Froeschle, Ch., Froeschle, Cl., Gonczi, R., Knežević, Z. and Zappalá, V.: 1989, Astron. Astroph., in press.

Fujiwara, A., Kamimoto, G. and Tsukamoto, A.: 1977, Icarus 31, 277.

Fujiwara, A. and Tsukamoto, A.: 1980, Icarus 44, 142.

Fujiwara, A. and Tsukamoto, A.: 1981, Icarus 48, 329.

Gaska, S.: 1974, In: *The Stability of the Solar System and of Small Stellar Systems* (Y. Kozai, Ed.), D. Reidel Publ. Comp., p. 59.

Gauss, K.F.: 1876, Werke 3. Königlichen Gesellshaft der Wissenschaften, Göttingen, p. 331.

Gradie, J.C., Chapman, C.R. and Williams, J.G.: 1979, In: *Asteroids* (T. Gehrels, Ed.), Univ. Arizona Press, p. 359.

Hartmann, W.K. and Hartmann, A.C.: 1968, Icarus 8, 361.

Harzer, P.: 1895, *Die Sacularen Veranderungen der Bahnen der Grossen Planeten*. Preisschrift, Leipzig.

Hellyer, B.: 1970, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 148, 383.

Hill, G.W.: 1889, Astron. J. 9, 89.

Hill, G.W.: 1897, Astron. J. 17, 81.

Hirayama, K.: 1918, Astron. J. 31, 185.

Hirayama, K.: 1919, Proc. Phys. Math. Soc. Japan Third Ser. 1, 52.

Hirayama, K.: 1920, Proc. Phys. Math. Soc. Japan Third Ser. 2, 236.

Hirayama, K.: 1923, Japan J. Astron. Geophys. 1, 55.

Hirayama, K.: 1928, Japan J. Astron. Geophys. 5, 137.

Hirayama, K.: 1933, Proc. Japan Acad. 9, 482.

Hori, G.: 1966, Publ. Astron. Soc. Japan 18, 287.

Hori, G.: 1970, Publ. Astron. Soc. Japan 22, 191.

Ip, W.-H.: 1977, Proc. Lunar Sci. Conf. VII, Pergamon Press, p. 67.

Ip, W.-H.: 1979, Icarus 40, 418.

Knežević, Z.: 1983, Bull. Obs. Astron. Belgrade 133, 16.

Knežević, Z.: 1986, Celestial Mechanics 38, 123.

Knežević, Z. and Jovanović, B.: 1987, In: *Interplanetary Matter* (Z. Ceplecha and P. Pecina, Eds.), Czech. Acad. Sci., p. 107.

Knežević, Z., Carpino, M., Farinella, P., Froeschle, Ch., Froeschle, Cl., Gonczi, R., Jovanović, B., Paolicchi, P. and Zappalá, V.: 1988, Astron. Astrophys. 192, 360.

Kozai, Y.: 1962, Astron. J. 67, 591.

Kozai, Y.: 1979a, In: *Dynamics of the Solar System* (R.L. Duncombe, Ed.), D. Reidel Publ. Comp., p. 231.

Kozai, Y.: 1979b, Ann. Tokyo Astron. Obs. Sec. Ser. 17, 194.

Kozai, Y.: 1979c, In: Asteroids (T. Gehrels, Rd.), Univ. Arizona Press, p. 334.

Krasinsky, G.A. and Pius, L.Yu.: 1971, Nabl. Isk. Neb. Tel 62, 93.

Kresák, L.: 1971, In: *Physical Studies of Minor Planets* (T. Gehrels, Ed.), NASA SP-267, U.S. Govt. Print. Off., p. 197.

Kresák, L.: 1977, Bull. Astron. Inst. Czech. 28, 65.

Kuiper, G.P.: 1950, Astron. J. 55, 164.

Kuiper, G.P.: 1953, Proc. Nat. Acad. Sci. 39, 1159.

Kuiper, G.P., Fujita, Y., Gehrels, T. and Groeneveld, I.: 1958, Astrophys. J. Suppl. 3, 289.

Laskar, J: 1984, Ph.D. Thesis. Obs. Paris.

Laskar, J.: 1985, Astron. Astrophys. 144, 133.

Laskar, J.: 1986, Astron. Astrophys. 157, 59.

Laskar, J.: 1988, Astron. Astrophys. 198, 341.

LeVerrier, U.-J.: 1855, Ann. Obs. Paris 1, 258.

LeVerrier, U.-J.: 1856, Ann. Obs. Paris 2, 2.

Lie, S.: 1888, *Theorie der Transformationgruppen I.* Teubner, Leipzig, § 12.

Lindblad, B.A. and Southworth, R.B.: 1971, In: *Physical Studies of Minor Planets* (T. Gehrels, Ed.), NASA SP-267, U.S. Govt. Print. Off., p. 337.

Message, P.J.: 1982, Celestial Mechanics 26, 25.

Milani, A.: 1988, In: *Long-term Dynamical Behaviour of Natural and Artificial N-Body Systems* (A.E. Roy, Ed.), Kluwer Acad. Publ.

Milani, A., Nobili, A.M. and Carpino, M.: 1987, Astron. Astrophys. 172, 265.

Milani, A. and Knežević, Z.: 1989, in preparation.

Musen, P.: 1963, Revs. Geophys. 1, 85.

Noren, G. and Raab, S.: 1900, Med. Astron. Obs. Ser. 2, No 2.

Ovenden, M.W.: 1972, Nature 239, 508.

Piotrowski, S.I.: 1953, Acta Astron. Ser. A6, 115.

Popović, B.: 1981, Publ. Dept. Astron. Belgrade 11, 5.

Safronov, V.S.: 1979, In: *Asteroids* (T. Gehrels, Ed.), Univ. Arizona Press, p. 975.

Scholl, H.: 1987, In: *Dynamics of the Solar System* (M. Šidlichovsky, Ed.), Czech. Acad. Sci., p. 105.

Sharaf, S.G. and Boudnikova, N.A.: 1967, Trans. Inst. Theor. Astron. Leningrad 11, 231.

Shoemaker, E.M., Bus, S.J., Dunbar, R.S., Helin, E.F., Dowe, J., Barrow, J., Hartley, M., Morgan, D., Russel, K. and Savage, A.: 1984, Bull. Amer. Astron. Soc. 16, 691.

Simon, J.L.: 1983, Astron. Astrophys. 120, 197.

Simon, J.L. and Bretagnon, P.: 1984, Astron. Astrophys. 138, 169.

Southworth, R. and Hawkins, G.: 1963, Smith. Contr. Astrophys. 7, 261.

Stockwell, J.N.: 1872, Smith. Contr. Knowl. 18, No 232.

Trulsen, J.: 1971, In: *Physical Studies of Minor Planets* (T. Gehrels, Ed.), NASA SP-267, U.S. Govt. Print. Off., p. 327.

Van Flandern, T.C.: 1977, In: *Comets, Asteroids, Meteorites* (A.H. Delsemme, Ed.), Univ. Toledo Press, p. 475.

Van Houten, C.J., Van Houten - Groeneveld, I., Herget, P. and Gehrels, T.: 1970, Astron. Astrophys. Suppl. 2, 339.

Van Houten, C.J.: 1971, In: *Physical Studies of Minor Planets* (T. Gehrels, Ed.), NASA SP-267, U.S. Govt. Print. Off., p. 173.

Von Zeipel, H.: 1916, Arkiv Mat. Astron. Fysik 11, No 1.

Wetherill, G.W.: 1967, J. Geophys. Res. 72, 2429.

Williams, J.G.: 1969, Ph.D. Thesis. Univ. California.

Williams, J.G.: 1971, In: *Physical Studies of Minor Planets* (T. Gehrels, Ed.), NASA SP-267, U.S. Govt. Print. Off., p. 177.

Williams, J.G.: 1979, In: *Asteroids* (T. Gehrels, Ed.), Univ. Arizona Press, p. 1040.

Yoshikawa, M.: 1988, personal communication.

Yoshikawa, M.: 1988, In: *Long-term Dynamical Behaviour of Natural and Artificial N-Body Systems* (A.E. Roy, Ed.), Kluwer Acad. Publ.

Yuasa, M.: 1971, Publ. Astron. Soc. Japan 23, 399.

Yuasa, M.: 1973, Publ. Astron. Soc. Japan 25, 399.

Zappalá, V., Farinella, P., Knežević, Z. and Paolicchi, P.: 1984, Icarus 59, 261.

Zellner, B., Tholen, D.J. and Tedesco, E.F.: 1985, Icarus 61, 355.

Univerzitet u Beogradu
Prirodno-matematički fakultet
MATEMATIČKI FAKULTET
BIBLIOTEKA

Broj_____Datum_____