

UNIVERZITET U PRIŠTINI
PRIRODNO MATEMATIČKI FAKULTET

Mr. SADRI J. SHKODRA

Univerzitet u Beogradu
Prirodno-matematički fakultet
MATEMATIČKI FAKULTET
BIBLIOTEKA
Dokt. 246/1 Datum 6.5.1991.
Broj *Datum*

PRILOG TEORIJI TRANSLATORNOG OMOTAČA SEMIGRUPE

- Doktorska disertacija -

Priština, 1990.

S A D R Ź A J

0. UVOD	1
I. DEO	6
NEKI POZNATI POJMOVI I REZULTATI IZ TEORIJE SEMIGRUPA I TRANSLATORNOG OMOTAČA	6
1. Pojam semigrupe i polumreže	6
2. Ideali semigrupe. Prosta semigrupa	8
3. Regularne i inverzne semigrupe	10
4. Grinove relacije i idealni sloj	12
5. Reprezentacija semigrupe	14
6. Translatorsni omotač semigrupe	18
7. Gust monomorfizam	22
II. DEO	23
TRANSLATORNI OMOTAČ SEMIGRUPE	23
1. Translatorsni omotač trake	24
2. Centar translatorsnog omotača i omotač centra semigrupe	32
3. Potapanje unutrašnjog translatorsnog omotača semigrupe u translatorsni omotač njenog ideala	39
III. DEO	
REPREZENTACIJA INVERZNE SEMIGRUPE I ULAGANJE TRANSLATORNOG OMOTAČA SEMIGRUPE U INVERZNU SEMIGRUPU	42
1. Tranzitivna reprezentacija konačne inverzne semigrupe	43
2. Kongruencije i translatorsni omotač semigrupe	50
3. Potapanje translatorsnog omotača semigrupe u grupu	58
LITERATURA	64

0. U V O D

Termin semigrupa, prvi je uveo istaknuti francuski matematičar Sežye u 8-moj strani objavljene knjige (Séquier J.A., *Elements de la Theorie des Groupes Abstraits*, Paris, 1904). Prvi kratak rad o semigrupama objavio je Dikson (Dicson L.E., *On semi-groups and the general isomorphism between infinite groups*, *Trans. Amer. Math. Soc.* 6(1905) 205-208).

Razvoj teorije semigrupa datira od 1928. godine, nakon što je A.K. Suškijevič objavio rad "Über die endlichen gruppen ohne das gesetz der eindeutigen umkehrbarkeit", *Math. Ann.*, 99, 30-50. U tom radu, pored ostalog, autor tvrdi da svaka konačna semigrupa sadrži "jezgro" (prost ideal), čime je okarakterisao klasu konačnih prostih semigrupa. U vezi s tim, i još nekim pojmovima teorije semigrupa, Suškijevič je objavio knjigu - *Teorija obobšćenih grup*, Harkov - Kiev 1937 godine.

Dalje proučavanje i produbljivanje znanja iz oblasti semigrupa nastavljeno je radovima matematičara Risa:

Rees D., 1) *On semi-groups*, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 36(1940) 387-400; 2) *Note on semi-groups*, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 37(1941) 434-435; 3) *On the ideal structure of a semi-group satisfying a cancellation law*, *Quarterly J. Math. Oxford, Ser.*, 19(1948) 101-108; 4) *On the group of a set of partial transformations*, *J. Lond. Math. Soc.*, 22(1948) 281-284. Autor ovih radova je uveo pojam matrice nad grupom s nulom i reprezentaciju semigrupa sa semigrupom matrica nad grupom s nulom. Ko-

risteći taj pojam, prethodni autor proučio klasu prostih semigrupa koje sadrže primitivan idempotent i njihova svojstva.

U knjizi - Polugrup od autora E.S. Ljapina, izdate 1960. godine u Moskvi, a potom u monografiji - The algebraic theory of semigroups, Tom 1, 1961; Tom 2, 1967; izdate od autora A. Clifford, G. Preston u Amer. Math. Soc., na sistematičan i sažet način izložena su najbitnija dotadašnja saznanja i rezultati iz oblasti semigrupa.

Zadnjih dvadeset godina, je period burnog razvoja teorije semigrupa, kada je došlo do objavljivanja brojnih naučnih radova, monografija i knjiga:

- M. Petrich: 1) Introduction to semigroups, Columbus, Ohio 1973 godine; 2) Structure of regular semigroups, Montepeller 1977 godine; 3) Inverse semigroups, John Willey i Sons, 1984 godine.

- J.M. Howie: An introduction to semigroup theory, London, 1976 godine, i druge.

U navedenom periodu organizovani su brojni kongresi, simpozijumi u inostranstvu i konferencije u zemlji iz oblasti semigrupa. Na svim tim skupovima saopštavana su rešenja nekih od problema i postignutih rezultata iz oblasti semigrupa, a takodje postavljeni i novi problemi.

Važno istaći da je matematičar jugoslovenskog porekla - Petrich sedamdesetih godina ovog veka, aktualizirao probleme u [11] koji su i ranije postavljeni: 1) Koje osobine jedne semigrupe imaju uticaja na njen translatorni omotač?, i 2) koje semigrupe i njihovi translatorni omotači pripadaju istoj klasi?

Ovi problemi, prema matematičkoj literaturi koja je autoru ove disertacije bila dostupna, samo delimično rešeni. Treba

istaći na primer da je:

- Száse (1957), pokazao da translatorni omotač polumreže je polumreža;

- Ponizovskii (1964), pokazao da translatorni omotač inverzne semigrupe je inverzna semigrupa;

- Petrich (1973), pokazao da: a) translatorni omotač kancelativne semigrupe je kancelativna semigrupa, b) ako je semigrupa kancelativna i komutativna tada je i translatorni omotač takodje kancelativna i komutativna.

Predmet ove doktorske disertacije je ispitivanje: Kada i pod kojim uslovima jedna semigrupa i njen translatorni omotač pripadaju ili ne pripadaju istoj klasi semigrupa i koje osobine jedne semigrupe imaju uticaja na njen translatorni omotač.

Materija ove disertacije je podeljena u tri dela:

- U prvom delu su navedeni poznati pojmovi i rezultati na koje se vrši pozivanje u disertaciji. Osim toga, u ovom delu su dati rezultati iz oblasti semigrupa koji su značajni za problem koji rešava ova doktorska disertacija.

- U prvoj tački drugog dela, dokazano je da translatorni omotač trake ne mora biti traka (Primer II.1.3), što znači da traka i odgovarajući translatorni omotač ne pripadaju uvek istoj klasi semigrupa (traka). Takodje, pomenutim primerom je dokazano da ako je semigrupa unija njenih podgrupa, da tada odgovarajući translatorni omotač ne mora biti unija njenih podgrupa. U drugoj tački drugog dela, data je karakterizacija centra $C(\Omega(S))$ translatornog omotača semigrupe jedne klase. Koristeći ovaj rezultat, dokazano je da se za takve semigrupe $C(\Omega(S))$ izomorfno potapa u $\Omega(C(S))$. Takodje, dat je dovoljan uslov da

$C(\Omega(S)) \cong \Omega(C(S))$ (Teorem II.2.10). Navedeni rezultati su analogni rezultatima za translatorni omotač $\Omega(E(S))$ idempotenata neke inverzne semigrupe [1]. Zatim u ovoj tački se dokazuje da je $C_{\Omega(S)}(\Pi(S)) = C(\Omega(S))$ za $S = \mu^0(I, G, M; P)$. U trećoj tački drugog dela dat je potreban i dovoljan uslov potapanja S u $\Omega(T)$, $\Pi(T)$ u S za slabo reduktivan ideal T , slaboreduktivne semigrupe S (Teorem II.3.2 i Posledica II.3.3).

- U prvoj tački trećeg dela, data je ekvivalencija između pojma desni (levi, dvostrani) idealni sloj i pojma \mathcal{R} - $(\mathcal{L}, \mathcal{Y})$ klasa Grinovih relacija $\mathcal{R}(\mathcal{L}, \mathcal{Y})$ (Lemma III.1.1, Posledica III.1.2). Zatim, karakteriše se tranzitivna reprezentacija konačne inverzne semigrupe S pomoću slabo reduktivnog minimalnog ideala od S i potapanja S u translatorni omotač tog ideala (Teorem III.1.3) i ilustracija primerom (Primer III.1.4). U drugoj tački trećeg dela dokazuju se neke važne osobine bilo koje kongruencije semigrupe u odnosu na translatorni omotač te semigrupe i translatorni omotač faktorske semigrupe sa tom kongruencijom (Teorem III.2.3). Zatim, se dokazuje da skup svih ω -kongruencija semigrupe, je kompletna podmreža mreže kongruencija te semigrupe (Teorem III.2.10). U trećoj tački trećeg dela, pokazano je da translatorni omotač bilo koje semigrupe može potopiti u grupu ako je ta semigrupa potpoljena (monomorfno uložena) u neku grupu (Teorem III.3.2). Nadalje u ovoj tački autor ove disertacije je pokušao da reši problem [8]: Ako je bilo koja semigrupa uložena u neku inverznu semigrupu, dali se i njen translatorni omotač može potopiti u neku inverznu semigrupu?

Rezultati iz tačke II.2 (II.2.1–II.2.14) pisani su kao članak koji je primljen i nalazi se u štampanje u "Matematičkom Vesniku" u Beogradu.

Rezultati iz tačke II.4. i III.1 su prikazani na 6 Konferenciji "Algebra i Logika" u Sarajevu 18-16 juna 1987. godine i na medjunarodnom simpozijumu, Colloquium on Semigroup" u Segedu 24-28 Avgusta 1987. godine.

Rezultati iz tačke III.2. pisani su kao članak koji je primljen i nalazi se u štampanje u "Proceedings of Conference Algebra and Logics" u Mariboru.

I. D E O

NEKI POZNATI POJMOVI I REZULTATI IZ TEORIJE SEMIGRUPA I
TRANSLATORNOG OMOTAČA

I.1. POJAM SEMIGRUPE I POLUMREŽE

Neka je S neprazan skup. Binarnom operacijom na skupu S naziva se preslikavanje iz $S \times S$ u S , gde je

$$S \times S = \{(a,b) \mid a,b \in S\}.$$

Ako se to preslikavanje označi tačkom $(.)$, tada slika elementa $(a,b) \in S \times S$ u S označava se sa $a.b$ ili češće (tačka se zanemari) piše se ab .

Nprazan skup S sa definisanom binarnom operacijom $(.)$ naziva se grupoid, i označava se sa $(S,.)$ ili S . Binarna operacija $(.)$ na grupoidu S naziva se asocijativna (komutativna) ako vredi $a(bc) = (ab)c$ ($ab = ba$) za sve a,b,c iz S . Grupoid S se naziva semigrupa ako je binarna operacija $(.)$ asocijativna.

Nprazan podskup Q semigrupe S naziva se podsemigrupa od S ako je Q zatvoren u odnosu na binarnu operaciju datu na S , tj. ako za svaku a,b iz Q vredi $ab \in Q$. Element s semigrupe S naziva se idempotent ako je $s^2 = s$. Semigrupa S se naziva traka ako je svaki njen element idempotentan. Skup idempotenata jedne semigrupe S označava se sa $E(S)$.

Nprazan skup X sa datom binarnom relacijom parcijalnog uredjenja \leq takvu da za ma koja dva elementa $x,y \in X$ postoji najveća donja granica (tj. infimum) koja se označava sa $x \wedge y$,

naziva se donja polumreža ili polumreža. Analogno se definiše i gornja polumreža, supremum elemenata x i y se označava sa $x \vee y$. Neprazan skup koji je donja i gornja polumreža naziva se mreža.

Komutativna traka S je polumreža (donja), pri čemu je parcijalno uređenje \leq na S dato sa

$$a \leq b \Leftrightarrow ab = ba = a \quad (a, b \in S) \text{ i pri tome je } a \wedge b = ab.$$

Semigrupa S je globalno idempotentna ako za svako $a \in S$ postoje $x, y \in S$, takvi da je $a = xy$ (tj. $S^2 = S$).

Neka je A podskup semigrupe S . Skup

$$C_S(A) = \{s \in S \mid sa = as, \text{ za svako } a \in A\} = \bigcap_{a \in A} C_S(a)$$

naziva se centralizator podskupa A . Ako je $A = S$, tada

$$C_S(S) = C(S) = \{s \in S \mid \text{takvi da je } sa = as, \text{ za svako } a \in S\}$$

naziva se centar semigrupe S . Ako je $A = \{a\}$, tada

$C_S(a) = \{s \in S \mid sa = as\}$ naziva se centralizator elementa a . Ako su neprazni skupovi $C_S(A)$, $C(S)$ i $C_S(a)$, tada su oni podsemigrupe od S .

Semigrupa S se zove levo (desno) kancelativna ako za proizvoljne $a, b \in S$ i $x \in S$ iz $xa = xb$ ($ax = bx$) sledi $a = b$. Semigrupa S je kancelativna ako je i levo i desno kancelativna.

Semigrupa S se zove levo (desno) reduktivna ako za proizvoljne $a, b \in S$ i svako $x \in S$ iz $xa = xb$ ($ax = bx$) sledi $a = b$. Semigrupa S je reduktivna ako je i levo i desno reduktivna.

Semigrupa S je slabo reduktivna (slabokancelativna) ako za proizvoljne $a, b \in S$ i svako (neki) $x \in S$ iz $ax = bx$ i $xa = xb$ sledi $a = b$.

Schein [18, Def., 2.17] definiše: Podskup H semigrupe S se naziva slabo reduktivan (slabokancelativan) u odnosu na S

ako za proizvoljne $a, b \in S$ i svako (neki) $h \in H$ iz $ha = hb$ i $ah = bh$ sledi $a = b$.

Lako se pokazuje: Ako je podskup H semigrupe S slabo reduktivan u odnosu na S , tada je S slabo reduktivna semigrupa. Obratno ne vredi.

I,2. IDEALI SEMIGRUPE, PROSTA SEMIGRUPA

Neprazan podskup A semigrupe S naziva se levi (desni; dvostrani) ideal za S ako za ma koje $s \in S, a \in A$ je $sa \in A$ ($as \in A; sa, as \in A$). Levi (desni; dvostrani) ideal za S je pravi (striktni) ako je $A \neq S$.

Neprazan presek ideala semigrupe S je takodje idela za S .

Neka je s ma koji element semigrupe S . Presek svih levih (desnih; dvostranih) ideala za S koji sadrže s je glavni levi (desni; dvostrani) ideal za S generisan sa s , označavamo ih sa $L(s)$ ($R(s); J(s)$), Lako se proverava da je $L(s) = s \cup Ss = S^1s$ ($R(s) = s \cup sS = sS^1; J(s) = s \cup Ss \cup sS \cup SsS = S^1sS^1$) gde je $S^1 = S \cup \{1\}$, 1 je jedinični element u S .

Semigrupa S je levo (desno) prosta ako je S jedini levi (desni) ideal za S . Semigrupa S je prosta ako ne sadrži pravog dvostranog ideala.

I,2.1. LEMA, Neka je S semigrupa. Tada je S levo prosta ako i samo ako je $Sa = S$ za svako $a \in S$; S je prosta ako i samo ako je $SaS = S$ za svako $a \in S$.

Semigrupa S je levo prosta i desno prosta ako i samo ako je S grupa.

Dvostrani (levi; desni) ideal M semigrupe S je minimalan

ako ne sadrži pravi dvostrani (levi, desni) ideal za S . Ako je A ma koji ideal za S istog tipa kao M , tada ili je $M \subseteq A$, ili je $M \cap A = \emptyset$. Specijalno, dva različita minimalna ideala istog tipa su disjunktna. Kako, za ma koja dvostrana ideala A i B semigrupe S je $AB \subseteq A$ i $AB \subseteq B$ to postoji najviše jedan dvostrani ideal za S . Ako S ima minimalan dvostrani ideal K , tada se K naziva jezgrom za S . Kako je K sadržan u svakom dvostranom idealu za S , to je K presek svih dvostranih ideala iz S . Ako je taj presek prazan, tada S nema jezgro. Svaka konačna semigrupa ima jezgro.

Ako je S semigrupa sa nulom 0 , tada pojam minimalnog ideala je trivijalan, naime, minimalan ideal je $\{0\}$. Za to se uvodi pojam 0 -minimalnosti. Semigrupa S sa nulom označava se $S = S^0$.

Dvostrani (levi, desni) ideal M semigrupe $S = S^0$ je 0 -minimalan ako je:

$$(1) \quad M \neq \{0\},$$

(2) $\{0\}$ je jedini pravi dvostrani (levi, desni) ideal za S sadržan u M .

Ako je M 0 -minimalan dvostrani (levi, desni) ideal semigrupe $S = S^0$, tada M^2 je ideal istog tipa kao M i $M^2 \subseteq M$. Dakle, tada je $M^2 = M$ ili $M^2 = \{0\}$. Odatle, ili je $M^2 = M$ ili je M nulta semigrupa. Jasno, presek bilo koja dva različita 0 -minimalna ideala za S istog tipa je $\{0\}$.

Semigrupa $S = S^0$ je 0 -prosta (levo 0 -prosta, desno 0 -prosta) ako:

$$(1) \quad S^2 \neq \{0\},$$

(2) $\{0\}$ je jedini pravi dvostrani (levi, desni) ideal za S .

I.2.2. LEMA. Za semigrupu S sledeći uslovi su ekvivalentni:

- (1) S je levo (desno) 0- prosta,
- (2) $S \setminus \{0\}$ je levo (desno) prosta,
- (3) za svako $a \in S \setminus \{0\}$ je $Sa = S$ ($aS = S$).

I.2.3. LEMA. Za semigrupu S sledeći uslovi su ekvivalentni:

- (1) S je 0- prosta,
- (2) za svako $a \in S \setminus \{0\}$ je $SaS = S$.

I.2.4. TEOREM. Neka je M 0- minimalan (dvostran) ideal semigrupe $S = S^0$. Tada, ili je $M^2 = \{0\}$ ili je M 0- prosta podsemigrupa za S .

I.2.5. POSLEDICA. Ako semigrupa S sadrži jezgro K , tada je K prosta podsemigrupa za S .

Neka je Q podsemigrupa semigrupe S . Najveća podsemigrupa za S takva da je Q njen ideal naziva se idealizator za Q u S , označava se $i_S(Q)$. Lako se pokazuje da je $i_S(Q) = \{s \in S \mid sa, as \in Q \text{ za svako } a \in Q\}$.

I.3. REGULARNE I INVERZNE SEMIGRUPE

Ma koji element a semigrupe S je regularan (potpuno regularan) ako je $a = axa$ ($a = axa$ i $ax = xa$) za neko $x \in S$; S je regularna (potpuno regularna) semigrupa ako su svi njeni elementi regularni (potpuno regularni). Jasno, ako je a regularan element semigrupe S tj. $a = axa$ za neko $x \in S$, tada su ax i xa idempotenti i ax (xa) je leva (desna) jedinica elementa a ; glavni levi (desni) ideal $L(a) = S^1 a$ ($R(a) = a S^1$) jednak je Sa (aS).

I.3.1. LEMA. Element a semigrupe S je regularan ako i samo

ako, glavni levi (desni) ideal semigrupe S , generisan elementom a , generiše se nekim idempotentom e tj. $S^1a = S^1e$ ($aS^1 = eS^1$).

Elementi a i b semigrupe S su inverzni jedan drugome ako je $a = aba$ i $b = bab$. Jasno, da ako element a semigrupe S je regularan tj. $a = axa$ za neko x iz S tada je xax jedan inverzan element elementa a . Dakle u jednoj semigrupi jedan element može imati više inverznih elemenata. Semigrupa S se naziva inverzna semigrupa ako svaki njen element ima jedinstven inverzan element. Jasno, da su inverzne semigrupe regularne semigrupe i da su grupe inverzne semigrupe. Dakle klasa regularnih semigrupa je obimnija od klase inverznih semigrupa, a klasa inverznih semigrupa obimnija od klase grupa.

1.3.2. LEMA. Dva elementa semigrupe S su uzajamno inverzna (obratna) za neku podgrupu semigrupe S ako i samo ako su oni inverzni jedan drugome i komutiraju.

Sledeći teorem ([2]) karakteriše inverznu semigrupu.

1.3.3. TEOREM. Za semigrupu S sledeći uslovi su evivalentni:

(1) S je regularna i ma koji dva njeni idempotenti komutiraju,

(2) svaki glavni desni i glavni levi ideal semigrupe S ima jedinstvenog idempotenta koji ga generiše,

(3) S je inverzna semigrupa (tj. svaki element iz S ima jedinstven inverzan element).

I.4. GRINOVE RELACIJE I IDEALNI SLOJ

Relacije ℓ , \mathcal{R} i \mathcal{J} definisane na semigrupu S sa:

$$a \ell b \Leftrightarrow L(a) = L(b),$$

$$a \mathcal{R} b \Leftrightarrow R(a) = R(b),$$

$$a \mathcal{J} b \Leftrightarrow J(a) = J(b), \quad \text{za } a, b \in S$$

su Grinove relacije (ili ekvivalencije), na S . Lako se proverava da je $\ell \mathcal{R} = \mathcal{R} \ell$. Prema tome, relacije $\mathcal{D} = \ell \mathcal{R}$ i $\mathcal{H} = \ell \cap \mathcal{R}$ su takodje Grinove relacije (ili ekvivalencije). Za ma koji element a semigrupe S i $\tau = \ell, \mathcal{R}, \mathcal{J}, \mathcal{D}, \mathcal{H}$, τ -klasa koja sadrži element a označava se sa T_a . Karakterizacija ℓ -, \mathcal{R} -, \mathcal{J} -, \mathcal{H} -klasa data je sledećim teoremom i posledicom.

I.4.1. TEOREM. ([2, Teor. 2.18]). Neka je a regularan element semigrupe S .

- (1) Svaki inverzan element elementa a sadržan je u D_a .
- (2) \mathcal{H} -klasa H_b sadrži inverzan element elementa a ako i samo ako svaka od obe klase $R_a \cap L_b$ i $R_b \cap L_a$ sadrži idempotent.
- (3) \mathcal{H} -klase ne mogu sadržati više od jednog inverznog elementa za element a .

I.4.2. POSLEDICA. ([2, posledica 2.19]).

- (1) Semigrupa S je inverzna ako i samo ako svaka ℓ -klasa i \mathcal{R} -klasa sadrži samo jedan idempotent.
- (2) Ako je D \mathcal{D} -klasa inverzne semigrupe S , tada postoji takva obostrana jednoznačna korespondencija između skupa ℓ -klasa sadržanih u D i skupa \mathcal{R} -klasa sadržanih u D , tako da ℓ -klasi L korespondira se \mathcal{R} -klasa R ako i samo ako $R \cap L$ sadrži idempotent.

Neka je \mathcal{I} skup svih desnih ideala semigrupe S . Ljapin u ([7], GL.IV) definisao i karakterisao ekvivalenciju i idealni sloj jedne semigrupe, koje će ukratko biti izloženo u nastavku.

Elementi $a, b \in S$, su \mathcal{I} ekvivalentni (ili desno idealni ekvivalentni) ako svaki ideal iz \mathcal{I} koji, sadrži jedan od elemenata a i b , sadrži i drugi element. \mathcal{I} - klasa ekvivalentnih elemenata iz S naziva se desni idealni sloj za S . Analogno se definišu levi (dvostrani) idealni sloj semigrupe S .

Dva različita medjusobna desna (leva, dvostrana) ideala semigrupe S , nazivaju se susednim ako jedan od njih M_1 sadrži drugog M_2 i pri tome osim M_1 i M_2 ne postoji drugi desni (levi, dvostrani) ideal M' takav da je $M_1 \supset M' \supset M_2$.

U III- delu, Lema 1.1 i Posledica 1.2 daju ekvivalentnost pojma desni (levi, dvostrani) idealni sloj semigrupe S sa pojmom \mathcal{R} - , (\mathcal{L} - , \mathcal{J} -) klase date semigrupe S . S obzirom na to i definiciju susednih ideala, može se karakterisati \mathcal{R} - (\mathcal{L} - , \mathcal{J} -) klasa jedne semigrupe S , tako da Teorema 2.9 iz ([7, GL.IV]) može biti preformulisana na sledeći način:

1.4.3. TEOREM. Podskup $R(L, J)$ semigrupe S će biti \mathcal{R} - (\mathcal{L} - , \mathcal{J} -) klasa ako i samo ako važi jedan od sledeća dva uslova:

- (1) R je desni (levi, dvostrani) minimalan ideal za S ;
- (2) postoje dva susedna desna (leva, dvostrana) ideala M_1 i M_2 za S , $M_1 \supset M_2$ takva da je $R = M_1 \setminus M_2$ ($L = M_1 \setminus M_2$, $J = M_1 \setminus M_2$).

I.5. REPREZENTACIJA SEMIGRUPE

Neka je X neprazan skup, \mathcal{F}_X (\mathcal{F}'_X) skup svih parcijalnih transformacija skupa X , levo (desno) zapisanih od argumenta, u oznaci αx ($x\alpha'$) za $x \in X$, $\alpha \in \mathcal{F}_X$ ($\alpha' \in \mathcal{F}'_X$). Sa $d\alpha$, $r\alpha$ označava se domen respektivno kodomen parcijalne transformacije α . Kardinalni broj $r\alpha$ označava se sa $\text{rank } \alpha$. U odnosu na kompoziciju preslikavanja, \mathcal{F}_X (\mathcal{F}'_X) je semigrupa koja se zove semigrupa svih parcijalnih transformacija skupa X levo (desno) pisanih od argumenta. Specijalno, \mathcal{F}_X (\mathcal{F}'_X) označava semigrupa onih parcijalnih transformacija $\alpha \in \mathcal{F}_X$ ($\alpha' \in \mathcal{F}'_X$) za koje je $\text{dom } \alpha = X$ ($\text{dom } \alpha' = X$) i naziva se potpuna semigrupa transformacija nepraznog skupa X , levo (desno) pisanih od argumenta. Analogno, \mathcal{I}_X (\mathcal{I}'_X) skup svih parcijalnih injektivnih transformacija skupa X , levo (desno) pisanih od argumenta, je inverzna semigrupa i naziva se simetrična inverzna semigrupa. Očevidno, da \mathcal{I}_X (\mathcal{I}'_X) je podsemigrupa od \mathcal{F}_X (\mathcal{F}'_X). Dalje, za $\alpha \in \mathcal{F}_X$ tako da je $d\alpha = r\alpha = \emptyset$, piše se $\alpha = \emptyset$ i naziva se nula element u \mathcal{F}_X . Lako se vidi da je $\mathcal{F}_X^0 = \{\alpha \in \mathcal{F}_X \mid \text{rank } \alpha < 1\}$ ($\mathcal{F}'_X^0 = \{\alpha' \in \mathcal{F}'_X \mid \text{rank } \alpha' < 1\}$) podsemigrupa od \mathcal{F}_X (\mathcal{F}'_X). Za $\alpha \in \mathcal{I}_X$ $\text{dom } \alpha = X_1$ kodom $\alpha = X_2$, $X_1, X_2 \subseteq X$, definiše se identična parcijalna transformacija $\tilde{\alpha}_{X_1} = \alpha^{-1}\alpha$ na X_1 odnosno $\alpha_{X_2} = \alpha\alpha^{-1}$ na X_2 , u ovom slučaju α^{-1} je inverzna parcijalna injektivna transformacija za α .

Preslikavanje φ semigrupe S u semigrupu S' naziva se homomorfizam ako vredi:

$$(ab)\varphi = (a\varphi)(b\varphi) \quad (a, b \in S),$$

gde operacija množenja u S i S' je označena istom oznakom (što

u opštem slučaju ne mora biti). Ako je homomorfizam φ jedan-jedan tada se on naziva monomorfizam, ako je homomorfizam φ preslikavanje na, tada se on naziva epimorfizam. Ako je φ monomorfizam i epimorfizam tada se on naziva izomorfizam i u tom slučaju pišemo $S \cong S'$. Ako je $S' = S$ i φ izomorfizam S na S' , tada se on naziva automorfizam. Ako je φ homomorfizam semigrupe S u S tada se on naziva endomorfizam.

Ma koji homomorfizam φ semigrupe S u semigrupu \mathcal{I}_X X -neprazan skup, naziva se reprezentacija semigrupe S . Homomorfizam φ semigrupe S u \mathcal{I}_X naziva se reprezentacija semigrupe S parcijalnim injektivnim transformacijama skupa X . U daljem radu, ovakve reprezentacije se kraće nazivaju reprezentacije semigrupa.

Vagner¹⁾ i Preston²⁾ su pokazali da svaka inverzna semigrupa može se potopiti u neku simetrisku inverznu semigrupu. Ovaj rezultat opisuje se sledećom teoremom.

1.5.1. TEOREM. ([2, Teor. 1.20]). Proizvoljna inverzna semigrupa S je izomorfna sa inverznom podsemigrupom simetriske inverzne semigrup \mathcal{I}_S svih obostrano jednoznačnih parcijalnih transformacija skupa S .

Jedan drugi prilaz reprezentacije semigrupe pomoću S -baze je dao Ponizovski ([15]), koji se opisuje u nastavku.

Semigrupa S ispunjava uslov konačnosti (A): ako ma koji niz oblika

$$e_1 S \supset e_2 S \supset \dots,$$

gde je $e_i^2 = e_i \in S$, sadrži najviše konačan broj različitih članova.

1) Vagner V.V. - Obobšćenje grupi, DAN SSSR (1952)84, 1119-1122.

2) Preston G.B. - Representations of inverse semigroups, J. London Math., Soc., 29(1954) 411-419.

I.5.2. LEMA. Neka je H podgrupa \mathcal{R} -klase R inverzne semigrupe S . Tada je

$$R = \cup \{Hr \mid r \in R\}, \text{ pri čemu vredi:}$$

- (1) $r_1, r_2 \in R, Hr_1 \cap Hr_2 \neq \emptyset \Rightarrow Hr_1 = Hr_2,$
- (2) $a \in S, r \in R \Rightarrow$ ili $Hra \cap R = \emptyset$ ili $Hra \subset R,$
- (3) $a, b \in S, r \in R, Hrab \subset R \Rightarrow Hra \subset R,$
- (4) ako S zadovoljava uslov (A) tada

$$r_1, r_2 \in R, a \in S, Hr_1 a = Hr_2 a \subset R \Rightarrow Hr_1 = Hr_2.$$

I.5.3. DEFINICIJA. Ako je $\varphi : S \rightarrow \mathcal{J}_X$ reprezentacija semigrupe S , tada se X naziva baza reprezentacije φ , a φ -reprezentacija semigrupe S u bazi X . Reprezentacija φ semigrupe S takva da je $a\varphi$ prazna transformacija skupa X za svako a iz S naziva se nul-reprezentacija, sve ostale reprezentacije nazivaju se nenulevim.

I.5.4. DEFINICIJA. Neka je S semigrupa. Skup $M, M \neq \emptyset$ naziva se S -baza ako za neki par $(m, s), m \in M, s \in S$ definisano je množenje m -sdesna sa s tako da za proizvod ms vrede sledeći uslovi:

- (1) $ms \in M,$
- (2) ako je $ms = ns, m, n \in M, s \in S$ tada je $m = n,$
- (3) ako je definisano $m(rs)$ tada je definisano $mr, (mr)s$ i vredi $m(rs) = (mr)s, m \in M, r, s \in S.$

Zbog kratkosti piše se $ms \in M$ ako je ms definisano i $ms \notin M$ ako ms nije definisano.

I.5.5. DEFINICIJA. Neka je M S -baza. Reprezentacija φ semigrupe S u \mathcal{J}_M naziva se tranzitivna ako za $m, n \in M$ postoji $s \in S$ takvo da je $m(s\varphi) = n$ (ekvivalentno, ako je $M = mS$ za svako $m \in M$).

I.5.6. DEFINICIJA. Neka je S inverzna semigrupa koja zadovoljava uslov (A), R \mathcal{R} -klasa od S , $e^2 = e \in R$, H podgrupa od R . Tada prema Lemi 5.2.(1) klase Hr , $r \in R$ ili se ne preseku ili se poklapaju; skup svih takvih klasa označava se sa R/H . U skupu R/H prirodnim načinom definiše se množenje sdesna elementima iz S . Naime ako je

$$Hr \in R/H \text{ i } a \in S \text{ tada}$$

$$Hra \subset R \Rightarrow Hr.a = Hra \in R/H,$$

$$Hra \not\subset R \Rightarrow Hr.a \notin R/H.$$

Ova definicija pretvara skup R/H u S -bazu. Za to, dovoljno je uporediti Lemu 5.2.(2), (3), (4) sa Def.5.4.(1), (3), (2). Reprzentacija semigrupe S , odredjena S -bazom R/H označava se sa (R, H) .

I.5.7. LEMA. (R, H) je tranzitivna reprezentacija semigrupe S .

Ponizovskii, je karakterisao tranzitivnu reprezentaciju neke inverzne semigrupe, za koju važi uslov (A), sledećim dvema teoremama.

I.5.8. TEOREM. ([17]). Neka je S inverzna semigrupa za koju vredi uslov (A). Tada ma koja tranzitivna reprezentacija semigrupe S sparcijalnim transformacijama sastoji u stvari od obostrano jednoznačnih parcijalnih transformacija.

I.5.9. TEOREM. [15]. Ako inverzna semigrupa S zadovoljava uslov (A), tada ma koja njena tranzitivna reprezentacija ne bitno razlikuje se od neke reprezentacije (R, H) za odgovarajuću \mathcal{R} -klasu R od S i H podgrupu od R .

I.6. TRANSLATORNI OMOTAČ SEMIGRUPE

Transformacija $\lambda(\rho)$ semigrupe S takva da

$$\lambda(xy) = (\lambda x)y \quad ((xy)\rho = x(y\rho))$$

za svako $x, y \in S$ naziva se leva (desna) translacija semigrupe S .

Sa $\Lambda(S)$ ($P(S)$) označava se skup svih levih (desnih) translacija semigrupe S . Operacija kompozicije levih (desnih) translacija semigrupe S se definiše sa:

$$\begin{aligned} (\lambda\lambda')x &= \lambda(\lambda'x) & (x(\rho\rho')) &= (x\rho)\rho' \quad \text{za svako } x \in S, \\ \lambda, \lambda' &\in \Lambda(S) & (\rho, \rho') &\in P(S). \end{aligned}$$

Lako se proverava da je $\Lambda(S)$ ($P(S)$) podsemigrupa od \mathcal{T}_S (\mathcal{T}'_S).

Leva translacija λ je vezana sa desnom translacijom ρ semigrupe S ako je $x(\lambda y) = (x\rho)y$ za svako $x, y \in S$. U ovom slučaju par (λ, ρ) zove se bitranslacija za S . Bitranslacija (λ, ρ) semigrupe S može se smatrati kao "bioperator" funkcije λ pisano levo od argumenta i funkcije ρ pisano desno od argumenta. Par (λ, ρ) se označava znakom ω , tj. $\omega = (\lambda, \rho)$ i $\omega x = \lambda x$, $x\omega = x\rho$ za svako $x \in S$. Sa $\Omega(S)$ označava se skup svih bitranslacija semigrupe S . Za $\omega = (\lambda, \rho)$, $\omega' = (\lambda', \rho') \in \Omega(S)$ definiše se množenje po komponentama:

$$\omega\omega' = (\lambda, \rho)(\lambda', \rho') = (\lambda\lambda', \rho\rho').$$

Lako se proverava da je $\Omega(S)$ semigrupa u odnosu na takvo množenje, odnosno da je podsemigrupa od $\Lambda(S) \times P(S)$. $\Omega(S)$ naziva se translatorni omotač semigrupe S .

Za proizvoljan element s semigrupe S , funkcija λ_s (ρ_s) definisana sa $\lambda_s x = sx$ ($x\rho_s = xs$) za svako $s \in S$, naziva

se leva (desna) unutrašnja translacija semigrupe S inducirana sa s . Par $(\lambda_s, \rho_s) = \pi_s$ naziva se unutrašnja bitranslacija semigrupe S inducirana sa s i za svako $x \in S$ je $\pi_s x = sx$ i $x\pi_s = xs$. Ako je $\Gamma(S)$ ($\Delta(S)$) skup svih levih (desnih) unutrašnjih translacija semigrupe S , tada lako se proverava da je $\Gamma(S)$ ($\Delta(S)$) podsemigrupa od $\Lambda(S)$ ($P(S)$). Skup svih unutrašnji bitranslacija semigrupe S označava se sa $\Pi(S)$.

Za ma koju semigrupu S , $\Gamma(S)$ ($\Delta(S)$) je levi (desni) ideal za $\Lambda(S)$ ($P(S)$); $\Pi(S)$ je ideal za $\Omega(S)$. Za ma koju semigrupu S , leva translacija λ i desna translacija ρ su permutativne ako je $(\lambda x)\rho = \lambda(x\rho)$ za svako $x \in S$.

Preslikavanje

$$\pi : s \rightarrow \pi_s, \quad s \in S$$

je homomorfizam i naziva se kanonički homomorfizam od S u $\Omega(S)$ (ili na $\Pi(S)$).

Semigrupa S je slabo reduktivna ako i samo ako kanonički homomorfizam π je injektivan.

I.6.1. LEMA. Ako je S slabo reduktivna semigrupa i

$$\omega, \omega' \in \Omega(S) \text{ su takve da je } \omega\pi_s = \omega'\pi_s \text{ i } \pi_s\omega = \pi_s\omega' \text{ za svako } s \in S, \text{ tada je } \omega = \omega'.$$

I.6.2. POSLEDICA. Ako je S slabo reduktivna semigrupa, tada $\Pi(S)$ je slabo reduktivan ideal u odnosu na semigrupu $\Omega(S)$.

Petrich ([11]) dao je osnovna svojstva i tvrdjenja koja vrede za translatorni omotač semigrupe S , što se u nastavku u kratko opisuje.

I.6.3. LEMA. $\Gamma(S) = \Lambda(S)$ ako i samo ako S ima levu jedinicu.

I.6.4. TEOREM. (Gluskin¹⁾). Ako je S slabo reduktivna semigrupa, tada je $\Omega(S)$ idealizator za $\Lambda(S)$ u $\Lambda(S) \times P(S)$.

I.6.5. LEMA. Ako je S slabo reduktivna ili globalno idempotentna semigrupa, tada je

$$C(\Omega(S)) = \{(\lambda, \rho) \in \Omega(S) \mid \lambda s = s\rho \text{ za sve } s \in S\}.$$

Neka su

$$\pi_\lambda : \Omega(S) \rightarrow \Lambda(S), \quad \pi_\rho : \Omega(S) \rightarrow P(S)$$

projekciski homomorfizmi i neka su $\bar{\Lambda}(S)$ i $\bar{P}(S)$ odgovarajuće slike respektivno u $\Lambda(S)$ i $P(S)$. Tada važi lema:

I.6.6. LEMA. Ako je S komutativna semigrupa tada je

$$\bar{\Lambda}(S) = \Lambda(S), \quad \bar{P}(S) = P(S).$$

I.6.7. LEMA. Za levu reduktivnu semigrupu S vrede sledeći uslovi:

(1) $\bar{P}(S)$ je idealizator za $\Lambda(S)$ u $P(S)$.

(2) Ako su φ i ψ funkcije na S koje zadovoljavaju uslov vezanosti $x(\varphi y) = (x\psi)y$ za sve $x, y \in S$, tada je $\varphi \in \Lambda(S)$.

(3) π_ρ je injektivno i odatle $\bar{P}(S) \cong \Omega(S)$.

I.6.8. POSLEDICA. Ako je S reduktivna semigrupa, tada

(1) $\Omega(S) = \{(\varphi, \psi) \mid \varphi \text{ i } \psi \text{ su funkcije na } S \text{ koje zadovoljavaju uslov } x(\varphi y) = (x\psi)y, \text{ za sve } x, y \in S\}$,

(2) $\bar{\Lambda}(S) \cong \Omega(S) \cong \bar{P}(S)$ i

(3) Ako je S komutativna, tada $\Lambda(S) \cong \Omega(S) = C(\Omega(S)) \cong \bar{P}(S)$, gde su svi izomorfizmi projekcije.

1) Gluskin L.M., - Ideals of semigroups, Mat. Sborn. 55(1961)421-448; correction: ibid. 73(1967),303 (Russian).

Problem i pitanje koje ističe Petrich [11] je sledeće: Koje osobine semigrupe S imaju uticaja na $\Omega(S)$? Ili, odrediti klase semigrupa kojoj pripadaju S i $\Omega(S)$? Do sada na ta pitanja je odgovoreno parcijalno. U nastavku daju se neki parcijalni odgovori na takve probleme.

I.6.9. LEMA. [22] Ako je S polumreža tada je $\Omega(S)$ polumreža.

I.6.10. POSLEDICA. [23] Ako je S konačna polumreža tada je $\Omega(S)$ mreža.

I.6.11. TEOREM. [16] Ako je S inverzna semigrupa tada je i $\Omega(S)$ inverzna semigrupa.

I.6.12. LEMA. [12] a) Ako je S kancelativna takva je i $\Omega(S)$.

b) Ako je S komutativna i kancelativna takva je $\Omega(S)$.

I.6.13. TEOREM. [11] Neka je θ izomorfizam semigrupe S na semigrupu T . Za $\lambda \in \Lambda(S)$, $\rho \in P(S)$ neka je $\bar{\lambda}t = (\lambda(t\theta^{-1}))\theta$, $t\bar{\rho} = ((t\theta^{-1})\rho)\theta$, $t \in T$. Tada $\lambda \rightarrow \bar{\lambda}$ i $\rho \rightarrow \bar{\rho}$ su izomorfizmi od $\Lambda(S)$ na $\Lambda(T)$ i respektivno od $P(S)$ na $P(T)$. Preslikavanje $\bar{\theta} : (\lambda, \rho) \rightarrow (\bar{\lambda}, \bar{\rho})$ je neki izomorfizam iz $\Omega(S)$ na $\Omega(T)$ sa osobinom: $\pi_s \bar{\theta} = \pi_{s\theta}$, $(\omega s)\theta = (\omega \bar{\theta})(s\theta)$, $(s\omega)\theta = (s\theta)(\omega \bar{\theta})$, $s \in S$, $\omega \in \Omega(S)$. Ako je S slabo reduktivna ili globalno idempotentna, tada je $\bar{\theta}$ jedinstven izomorfizam iz $\Omega(S)$ na $\Omega(T)$ sa osobinom $\pi_s \bar{\theta} = \pi_{s\theta}$ za sve $s \in S$.

I.6.14. POSLEDICA. Ako su S i T obe slabo reduktivne semigrupe, tada svaki izomorfizam iz $\Pi(S)$ na $\Pi(T)$ će biti jedinstveno proširenje do nekog izomorfizma iz $\Omega(S)$ na $\Omega(T)$.

Analogno Teoremi 6.13 za grupu automorfizama iz S i $\Omega(S)$ imamo sledeću posledicu.

I.6.15. POSLEDICA. Ako je S slabo reduktivna i prosta ili 0-prosta, tada preslikavanje $\theta \longrightarrow \bar{\theta}$ je neki izomorfizam iz $@(S)$ na $@(\Omega(S))$.

J. Fountain i M. Lawson 1985 u [3] su dokazali da translatorni omotač adekvatne semigrupe i semigrupe tipa A je takodje adekvatna respektivno tipa A.

I.7. GUST MONOMORFIZAM

Ako je T ideal semigrupe S , tada je S idealno proširenje od T (ili S je idealno proširenje od T sa Risovom kvocijentnom semigrupom S/T). To proširenje je striktno ako je $S \neq T$.

Neka je T podsemigrupa semigrupe S . Kongruencija ρ na S naziva se T -kongruencijom ako je restrikcija relacije ρ na T relacija jednakosti.

Idealno proširenje S semigrupe T je gusto ako je relacija jednakosti jedinstvena T -kongruencija na S . Ako je S u odnosu na inkluziju maksimalno gusto proširenje od T , tada se T naziva gust monomorfan ideal za S .

Izomorfizam φ semigrupe T u semigrupu S je gust monomorfizam ako je $T\varphi$ gust monomorfan ideal za njen idealizator u S .

Sledeća lema, karakteriše ulaganje jedne semigrupe u neku grupu.

I.7.1. LEMA. ([8. zad. V.3.10(VI)]). Za svaku podsemigrupu T grupe G , ulaganje $T \longrightarrow G$ je gust monomorfizam.

II D E O

TRANSLATORNI OMOTAČ SEMIGRUPE

U V O D

II.1. Jedan od problema, u teoriji semigrupa, je istraživanje i nalaženja semigrupa takve da sve njihove osobine zadržavaju i njeni translatorni omotači. Ovaj problem je parcijalno rešen. Neka od tih rešenja data su u prvom delu ovog rada. Jasno, da translatorni omotač bilo koje semigrupe ne poseduje uvek sva svojstva koje poseduje sama semigrupa. Tako na primer, poznato je da translatorni omotač regularne semigrupe nije regularan. U ovoj tački je konstatovano da translatorni omotač trake nije traka. Zatim, konstatovano je da ako je semigrupa unija grupa, njen translatorni omotač ne mora biti unija grupa.

II.2. U ovoj tački data je karakterizacija centra $C(\Omega(S))$ translatornog omotača jedne klase semigrupa. Koristeći ovaj rezultat, dokazano je da se za takve semigrupe $C(\Omega(S))$ izomorfno potapa u $\Omega(C(S))$. Takođe dat je dovoljan uslov da $C(\Omega(S)) \cong \Omega(C(S))$. Navedeni rezultati su analogni rezultatima za translatorni omotač $\Omega(E(S))$ idempotenata neke inverzne semigrupe [1].

II.3. Koristeći pojam slabo reduktivnosti podskupa semigrupe iz I.1, ovog rada; definiše se slabo reduktivan ideal u odnosu na semigrupu. Daje se potreban i dovoljan uslov potapanja slabo reduktivne semigrupe S u $\Omega(T)$ gde je T slabo reduktivan ideal te semigrupe i potapanje $\Pi(T)$ u S .

II.1. TRANSLATORNI OMOTAČ TRAKE

Iz Leme I.6.9 se vidi da je translatorni omotač polumreže takodje polumreža. Sledeća Lema ustvari poopštava taj rezultat.

I.1.1. LEMA. Ako je S polumreža, tada je $\Lambda(S) \times P(S)$ polumreža (u $\Lambda(S) \times P(S)$ je data operacija množenja po komponentama).

DOKAZ. Neka je $(\lambda, \rho) \in \Lambda(S) \times P(S)$ i $x \in S$. Tada je $\lambda^2 x = \lambda(\lambda x) = \lambda(\lambda x^2) = \lambda((\lambda x)x) = \lambda(x(\lambda x)) = (\lambda x)(\lambda x) = (\lambda x)^2 = \lambda x$, dakle $\lambda^2 = \lambda$. Analogno je $\rho^2 = \rho$. Odatle je $(\lambda, \rho)^2 = (\lambda, \rho)(\lambda, \rho) = (\lambda^2, \rho^2) = (\lambda, \rho)$, pa je $\Lambda(S) \times P(S)$ traka.

Dalje za ma koje $(\lambda, \rho), (\lambda', \rho') \in \Lambda(S) \times P(S)$ i svako $x \in S$ imamo $(\lambda\lambda')x = \lambda(\lambda'x) = \lambda(\lambda'(xx)) = \lambda((\lambda'x)x) = \lambda(x(\lambda'x)) = (\lambda x)(\lambda'x) = (\lambda'x)(\lambda x) = \lambda'(x(\lambda x)) = \lambda'((\lambda x)x) = \lambda'(\lambda(xx)) = (\lambda'\lambda)x$, pa je $\lambda\lambda' = \lambda'\lambda$. Analogno je $\rho\rho' = \rho'\rho$. Odatle, dobijemo $(\lambda, \rho)(\lambda', \rho') = (\lambda\lambda', \rho\rho') = (\lambda'\lambda, \rho'\rho) = (\lambda', \rho')(\lambda, \rho)$, pa je $\Lambda(S) \times P(S)$ komutativna traka, odnosno polumreža.

II.1.2. POSLEDICA. Ako je S polumreža tada je $\Omega(S)$ polumreža.

DOKAZ. Budući da je $\Omega(S)$ podsemigrupa od $\Lambda(S) \times P(S)$, tada prema prethodnoj Lemi 1.1, $\Omega(S)$ je polumreža.

Grupi G sa multiplikativnom operacijom prisjedinjujemo 0-element, tako da za svako $a \in G$ je $a0 = 0a = 0$ i $00 = 0$. Označimo sa $G^0 = G \cup \{0\}$. Očigledno da je G^0 semigrupa. Neka su I i Λ neprazni skupovi, označimo sa i, j, k, \dots , elemente iz I a sa λ, μ, ν, \dots , elemente iz Λ . Funkcija $A : I \times \Lambda \rightarrow G^0$, definisano sa $A(i, \lambda) = a_{i\lambda}$, $a_{i\lambda} \in G^0$, naziva se $I \times \Lambda$ -matrica nad G^0 i označava se sa $A = (a_{i\lambda})$, $a_{i\lambda}$ je element matrice A koji

se nalazi na i -tom retku i λ -toj koloni. $I \times \Lambda$ -matrica na G^0 koja sadrži ne više od jedan nenula element naziva se Risova $I \times \Lambda$ -matrica nad G^0 . Ako je $a \in G$, $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$, tada sa $(a)_{i\lambda}$ označavamo $I \times \Lambda$ -matricu Risa nad G^0 koja ima na i -tom retku i Λ -toj koloni element a , dok svi ostali elementi su nula tj.

$$(a)_{i\lambda} = \begin{matrix} & & & & \lambda \\ & & & & \downarrow \\ & & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ i \rightarrow & 0 & 0 & 0 & \dots & a & \dots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{matrix}$$

Simbolom $0 = (0)_{i\lambda}$ označavamo $I \times \Lambda$ -matricu čiji su svi elementi 0.

Neka je $P = (p_{\lambda i})$, $\lambda \in \Lambda$, $i \in I$, $p_{\lambda i} \in G^0$, proizvoljna ali fiksirana $\Lambda \times I$ -matrica nad G^0 . Pomoću matrice P se definiše binarna operacija (\circ) na skupu $I \times \Lambda$ -matrica Risa nad G^0 , stavljajući: $A \circ B = APB$, gde su A i B Risove matrice. APB je Risova $I \times \Lambda$ -matrica, koja se dobije običnim množenjem matrica A, P, B . Lako se proverava da je skup svih $I \times \Lambda$ -matrice Risa u odnosu na definisanu operaciju (\circ) semigrupa, koja se zove Risova semigrupa matričnog tipa sa sendvič matricom P nad grupom s nulom G^0 i označava se sa

$$\mu^0 = \mu^0(G; I, \Lambda; P), \text{ ili } \mu^0 = \mu^0(I, G, \Lambda; P).$$

G se naziva strukturna grupa semigrupe μ^0 .

Sledeći primer pokazuje da semigrupa Risa matričnog tipa u specijalnom slučaju za $I = \{1, 2\}$, $\Lambda = \{1, 2\}$ je traka (uniја njenih podgrupa) ali njen translatorni omotač nije traka (nije uniја njenih podgrupa).

II.1.3. PRIMER. Neka je $G = \{1\}$ grupa, $G^0 = \{0,1\} = G \cup \{0\}$ semigrupa, $I = \{1,2\}$, $\Lambda = \{1,2\}$ i $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 2x2- matrica nad G .

Označimo sa $S = \mu^0(G; I, \Lambda; P)$, tada elementi iz S su:

$$A_0 = 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = (1)_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = (1)_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = (1)_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad A_4 = (1)_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Dakle je}$$

$$S = \{0, A_1, A_2, A_3, A_4\}.$$

Računanjem, običnog množenja matrica, lako se proverava da je $A_i \circ A_j = A_i P A_j \in S$ za ma koje $i, j = 0, 1, 2, 3, 4$; što znači da je operacija (\circ) na skupu S zatvorena. Zatvorenost operacije (\circ) na skupu S je data sledećom Keliovom Tablicom

\circ	0	A_1	A_2	A_3	A_4
0	0	0	0	0	0
A_1	0	A_1	A_2	A_1	A_2
A_2	0	A_1	A_2	A_1	A_2
A_3	0	A_3	A_4	A_3	A_4
A_4	0	A_3	A_4	A_3	A_4

Tablica 1.

Za svako $X, Y, Z \in S$ imamo $(X \circ Y) \circ Z = (XPY)PZ = XP(YPZ) = X \circ (YoZ)$, dakle asocijativni zakon operacije (\circ) vredi na S , pa je (S, \circ) semigrupa.

Iz tablice 1 se vidi da je $A_k^2 = A_k \circ A_k = A_k$ za svako $k = 0, 1, 2, 3, 4$; pa je S traka.

Označimo sa \mathcal{M} skup svih 2×2 -matrica nad G^0 . Elementi iz \mathcal{M} su:

$$A_0 = 0, A_1, A_2, A_3, A_4, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad i$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Neka je } \mathcal{P} = \{(X, Y) \mid X, Y \in \mathcal{M}, PX = YP\}.$$

Računanjem množenje matrica PX i YP za one $X, Y \in \mathcal{M}$ za koje je $PX = YP$, dobijamo: $\mathcal{P} = \{(0, 0), (M, R), (M, Q), (M, E), (M, F), (N, R), (N, Q), (N, E), (N, F), (E, R), (E, Q), (E, E), (E, F), (F, R), (F, Q), (F, E), (F, F)\}$.

Definišemo množenje na \mathcal{P} po komponentama tj.

$(X, Y)(X', Y') = (XX', YY')$ za svako $(X, Y), (X', Y') \in \mathcal{P}$. To množenje je predstavljeno Keliovom tablicom 2 na stranici 28 iz koje se vidi da je (\mathcal{P}, \cdot) grupoid. Za ma koje $(X, Y), (X', Y'), (X'', Y'')$ iz \mathcal{P} imamo: $((X, Y)(X', Y'))(X'', Y'') = (XX', YY')(X'', Y'') = ((XX')X'', (YY')Y'') = (X(X'X''), Y(Y'Y'')) = (X, Y)(X'X'', Y'Y'') = (X, Y)((X', Y')(X'', Y''))$. Dakle u \mathcal{P} vredi asocijativni zakon množenja pa je \mathcal{P} semigrupa.

Neka je $\mathcal{P}_1 = \{0, M, N, E, F\}$, $\mathcal{P}_2 = \{0, R, Q, E, F\}$ prva respektivno druga projekcija semigrupe \mathcal{P} .

Za svako $X \in \mathcal{P}_1$, $Y \in \mathcal{P}_2$ i $A_k \in S$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$; dobijemo da je $XA_k \in S$ i $A_k Y \in S$. To množenje je predstavljeno Keliovom tablicom 3 odnosno 4, na stranici 29.

·	0	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄
0	0	0	0	0	0
M	0	A ₁	A ₂	A ₁	A ₂
N	0	A ₃	A ₄	A ₃	A ₄
E	0	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄
F	0	A ₃	A ₄	A ₁	A ₂

Tablica 3.

·	0	R	Q	E	F
0	0	0	0	0	0
A ₁	0	A ₁	A ₂	A ₁	A ₂
A ₂	0	A ₁	A ₂	A ₂	A ₁
A ₃	0	A ₃	A ₄	A ₃	A ₄
A ₄	0	A ₃	A ₄	A ₄	A ₃

Tablica 4

Za proizvoljno $X \in \mathcal{P}_1$ i $A_k, A_\ell \in S$, $k, \ell = 0, 1, 2, 3, 4$ imamo: $X(A_k \circ A_\ell) = X(A_k P A_\ell) = (X A_k) P A_\ell = (X A_k) \circ A_\ell$. Odatle je X leva translacija semigrupe S . Analogno, za proizvoljno $Y \in \mathcal{P}_2$ i $A_k, A_\ell \in S$, $k, \ell = 0, 1, 2, 3, 4$ vredi: $(A_k \circ A_\ell) Y = (A_k P A_\ell) Y = A_k P (A_\ell Y) = A_k \circ (A_\ell Y)$. Pa je Y desna translacija semigrupe S .

Pokazaćemo, dalje, da je svaka leva translacija X iz \mathcal{P}_1 vezana sa svakom desnom translacijom Y iz \mathcal{P}_2 . $(A_k 0) \circ A_\ell = (A_k 0) P A_\ell = A_k O P A_\ell = A_k P O A_\ell = A_k \circ (O A_\ell)$, za $k, \ell = 0, 1, 2, 3, 4$; pa je $(0, 0)$ bitranslacija za S tj. $(0, 0) \in \Omega(S)$.

Budući da je:

$$\left. \begin{array}{l} PM \\ PN \\ PE \\ PF \end{array} \right\} = P = \left\{ \begin{array}{l} RP \\ QP \\ EP \\ FP \end{array} \right.$$

to, za ma koje $A_k, A_\ell \in S$, $k, \ell = 0, 1, 2, 3, 4$ imamo:

$$A_k \circ (M A_\ell) = A_k P M A_\ell = \left\{ \begin{array}{l} A_k R P A_\ell = (A_k R) \circ A_\ell \\ A_k Q P A_\ell = (A_k Q) \circ A_\ell \\ A_k E P A_\ell = (A_k E) \circ A_\ell \\ A_k F P A_\ell = (A_k F) \circ A_\ell \end{array} \right.$$

$M \in \mathcal{P}_1$, $R, Q, E, F \in \mathcal{P}_2$. Odatle, leva translacija M je vezana desnim translacijama R, Q, E, F odnosno je $(M, R), (M, Q), (M, E), (M, F) \in \Omega(S)$;

$$A_k \circ (N A_\ell) = A_k P N A_\ell = \left\{ \begin{array}{l} A_k R P A_\ell = (A_k R) \circ A_\ell \\ A_k Q P A_\ell = (A_k Q) \circ A_\ell \\ A_k E P A_\ell = (A_k E) \circ A_\ell \\ A_k F P A_\ell = (A_k F) \circ A_\ell \end{array} \right. ,$$

$N \in \mathcal{P}_1$, pa su $(N, R), (N, Q), (N, E), (N, F) \in \Omega(S)$;

$$A_k \circ (EA_\ell) = A_k PEA_\ell = \begin{cases} A_k RPA_\ell = (A_k R) \circ A_\ell \\ A_k QPA_\ell = (A_k Q) \circ A_\ell \\ A_k EPA_\ell = (A_k E) \circ A_\ell \\ A_k FPA_\ell = (A_k F) \circ A_\ell, \quad E \in \mathcal{P}_1, \end{cases}$$

pa su $(E,R), (E,Q), (E,E), (E,F) \in \Omega(S)$;

$$A_k \circ (FA_\ell) = A_k PFA_\ell = \begin{cases} A_k RPA_\ell = (A_k R) \circ A_\ell \\ A_k QPA_\ell = (A_k Q) \circ A_\ell \\ A_k EPA_\ell = (A_k E) \circ A_\ell \\ A_k FPA_\ell = (A_k F) \circ A_\ell, \quad F \in \mathcal{P}_1, \end{cases}$$

pa su $(F,R), (F,Q), (F,E), (F,F) \in \Omega(S)$.

Odatle, za makoje $(X,Y) \in \mathcal{P}$ sledi $(X,Y) \in \Omega(S)$ pa je $\mathcal{P} \subseteq \Omega(S)$, odnosno, lako se proverava, da je $\mathcal{P} = \Omega(S)$.

Budući da su $(M,F), (N,F), (E,F), (F,R), (F,Q), (F,E)$ i (F,F) takvi elementi iz $\Omega(S)$ i niti jedan od njih nije idepotentan (vidi tablicu 2), npr. $(M,F)^2 = (M,F)(M,F) = (M^2, F^2) = (M,E) \neq (M,F)$. Odakle zaključujemo da $\Omega(S)$ nije traka.

Dalje, $S = 0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ gde su $A_k, k = 0, 1, 2, 3, 4$ jedinstvene podgrupe semigrupe S (nema drugih podgrupa od S), tj. S je unija grupa. Idempotenti iz $\Omega(S) = \mathcal{P}$ su: $(0,0), (M,R), (M,Q), (M,E), (N,R), (N,Q), (N,E), (E,R), (E,Q)$ i (E,E) . Maksimalne podgrupe od $\Omega(S)$ su one podgrupe, koje kao jedinični element sadrže samo jedan od pomenutih idempotenata od $\Omega(S)$. Iz tablice 2 se vidi da su takve podgrupe od $\Omega(S)$ jedino podgrupe određene po jednim idempotentom iz $\Omega(S)$. Dakle svaki idepotent iz $\Omega(S)$ u stvari predstavlja po jednu podgrupu od $\Omega(S)$ i drugih podgrupa u njoj nema i pri tome je:

$$\mathcal{P} = \Omega(S) \neq \{(0,0)\} \cup \{(M,R)\} \cup \{(M,Q)\} \cup \{(M,E)\} \cup \{(N,R)\} \cup \\ \cup \{(N,Q)\} \cup \{(N,E)\} \cup \{(E,R)\} \cup \{(E,Q)\} \cup \{(E,E)\} .$$

Prema tome, ovim kontraprimerom dokazujemo da ako je semigrupa S traka, tada njen translatorni omotač $\Omega(S)$ ne mora biti traka; zatim ako je semigrupa S unija svojih podgrupa, tada njen translatorni omotač ne mora da bude unija svojih podgrupa.

II.2. CENTAR TRANSLATORNOG OMOTAČA I OMOTAČ CENTRA SEMIGRUPE

Petrich u [8, Gl. V] posvetio dobar deo translatorsnom omotaču inverzne semigrupe i osim ostalih definicija i tvrdnja, dao je i sledeći zadatak:

Neka je S inverzna semigrupa i $(\lambda, \rho) \in \Omega(S)$. Pokazati da su sledeći uslovi ekvivalentni.

$$(1) \lambda^2 = \lambda .$$

$$(2) \rho^2 = \rho .$$

$$(3) \lambda E(S) \subseteq E(S) .$$

$$(4) E(S) \rho \subseteq E(S) .$$

Izvuči zaključak da je $E(\Omega(S)) \cong \Omega(E(S))$, inače prethodno tvrdjenje je rezultat Aulta [1].

Rešavajući ovaj zadatak, došao sam do ideje za rešavanje problema; Pod kakvim uslovima vredi taj izomorfizam ako se mesto $E(S)$ odnosno $E(\Omega(S))$ uzima se respektivno $C(S)$ odnosno $C(\Omega(S))$. U tom smislu karakteriše se centar $C(\Omega(S))$ translatorsnog omotača semigrupe jedne klase. Koristeći taj rezultat, dokazuje se da za takve semigrupe $C(\Omega(S))$ izomorfno potapa u $\Omega(C(S))$. Zatim daje se dovoljan uslov da $C(\Omega(S)) \cong \Omega(C(S))$.

Neka je S semigrupa za koju je $C(S) \neq \emptyset$.

II.2.1. LEMA. Za semigrupu S , $c \in C(S)$ i $(\lambda, \rho) \in \Omega(S)$ važi $(\lambda c)x = (c\rho)x$ i $x(\lambda c) = x(c\rho)$ za sve $x \in S$.

DOKAZ. $(\lambda c)x = \lambda(cx) = \lambda(xc) = (\lambda x)c = c(\lambda x) = (c\rho)x$,
 $x(\lambda c) = (x\rho)c = c(x\rho) = (cx)\rho = (xc)\rho = x(c\rho)$.

II.2.2. POSLEDICA. Ako je S slabo reduktivna semigrupa, tada za $c \in C(S)$ i $(\lambda, \rho) \in \Omega(S)$ je $\lambda c = c\rho$.

II.2.3. LEMA. Ako su $a, b \in C(S)$ i $(\lambda, \rho) \in \Omega(S)$, tada $\lambda(ab) = (ab)\rho$. Odatavde je za $(\lambda, \rho), (\lambda', \rho') \in \Omega(S)$, $(ab)\rho\rho' = (ab)\rho'\rho$
 $\lambda\lambda'(ab) = \lambda'\lambda(ab)$.

DOKAZ. Neka su $a, b \in C(S)$ i $(\lambda, \rho) \in \Omega(S)$, tada $\lambda(ab) = (\lambda a)b = b(\lambda a) = (b\rho)a = a(b\rho) = (ab)\rho$. Budući da je $(\lambda\lambda', \rho\rho') \in \Omega(S)$, tada za proizvoljne $a, b \in C(S)$ i $(ab)\rho\rho' = (ab)\rho'\rho$ imamo $\lambda\lambda'(ab) = (ab)\rho\rho' = (ab)\rho'\rho = \lambda'\lambda(ab)$.

Analogno, ako je $\lambda\lambda'(ab) = \lambda'\lambda(ab)$, tada je $(ab)\rho\rho' = \lambda\lambda'(ab) = \lambda'\lambda(ab) = \rho'\rho(ab)$.

II.2.4. LEMA. Za semigrupu S i $(\lambda, \rho) \in \Omega(S)$, sledeći uslovi su ekvivalentni:

$$(1) \quad \lambda C(S) \subseteq C(S).$$

$$(2) \quad C(S)\rho \subseteq C(S).$$

DOKAZ. (1) \Rightarrow (2). Neka je $\lambda C(S) \subseteq C(S)$ i $c \in C(S)$.

Tada, prema Lemi 2.1, za svako $x \in S$ imamo $(c\rho)x = (\lambda c)x = x(\lambda c) = x(c\rho)$, tj. $c\rho \in C(S)$ pa je $C(S)\rho \subseteq C(S)$. Analogno, prema Lemi 2.1, (2) \Rightarrow (1).

Lako se vidi, da za S slabo reduktivna (globalno idempotentna) semigrupa važi

(*) $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y) = (x\rho)y = x(y\rho) = (xy)\rho$, za svako $(\lambda, \rho) \in C(\Omega(S))$ i sve $x, y \in S$.

II.2.5. POSLEDICA. Ako je S slabo reduktivna ili globalno idempotentna semigrupa, tada za sve $(\lambda, \rho) \in C(\Omega(S))$ važi $\lambda C(S) \cup C(S)\rho \subseteq C(S)$.

DOKAZ. Prema (*), za svako $c \in C(S)$ i svako $x \in S$ imamo $(\lambda c)x = \lambda(cx) = \lambda(xc) = x(\lambda c)$, pa je $\lambda c \in C(S)$ tj. $\lambda C(S) \subseteq C(S)$. Prema Lemi 2.4, je $C(S)\rho \subseteq C(S)$. Odatle je $\lambda C(S) \cup C(S)\rho \subseteq C(S)$.

II.2.6. LEMA. Neka je S semigrupa takva da je $S = SC(S)$ i $(\lambda, \rho) \in \Omega(S)$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:

$$(1) \quad \lambda\lambda' = \lambda'\lambda \text{ za sve } \lambda' \in \bar{\Lambda}(S).$$

$$(2) \quad \rho\rho' = \rho'\rho \text{ za sve } \rho' \in \bar{P}(S).$$

DOKAZ. (1) \Rightarrow (2). Neka je $\lambda\lambda' = \lambda'\lambda$ za sve $\lambda' \in \bar{\Lambda}(S)$. Budući da je $S = SC(S)$, to je $S^2 = S$, pa svako $x \in S$ može se predstaviti u obliku $x = (st)(ab)$ gde $s, t \in S$, $a, b \in C(S)$. Tada je $x\rho\rho' = ((st)(ab))\rho\rho' = (st)((ab)\rho\rho') = (\text{zbog Leme 2.3}) = (st)((ab)\rho'\rho) = ((st)(ab))\rho'\rho = x\rho'\rho$. Dakle $\rho\rho' = \rho'\rho$.

Analogno se dokazuje (2) \Rightarrow (1).

II.2.7. LEMA. Neka je S semigrupa takva da je $S = SC(S)$. Tada je $C(\Omega(S)) = \{(\lambda, \rho) \in \Omega(S) \mid \lambda C(S) \subseteq C(S)\} = \{(\lambda, \rho) \in \Omega(S) \mid C(S)\rho \subseteq C(S)\}$.

DOKAZ. Označimo sa $\psi(S) = \{(\lambda, \rho) \in \Omega(S) \mid \lambda C(S) \subseteq C(S)\}$ i $\psi'(S) = \{(\lambda, \rho) \in \Omega(S) \mid C(S)\rho \subseteq C(S)\}$. Prema Lemi 2.4, je $\psi(S) = \psi'(S)$. Budući, da je $S = SC(S)$, to je S globalno idempotentna semigrupa, pa prema Posledici 2.5, je $C(\Omega(S)) \subseteq \psi(S)$. Neka je $(\lambda, \rho) \in \psi(S)$ i $x \in S$. Tada je $x = sc$, $s \in S$, $c \in C(S)$ i za proizvoljno $(\lambda', \rho') \in \Omega(S)$ imamo:

$$\begin{aligned}
(\lambda\lambda')x &= (\lambda\lambda')(sc) = \lambda(\lambda'(sc)) = \lambda((\lambda's)c) = \lambda(c(\lambda's)) = \\
&= (\lambda c)(\lambda's) = (\lambda's)(\lambda c) = \lambda'(s(\lambda c)) = \lambda'((\lambda c)s) = \\
&= \lambda'(\lambda(cs)) = (\lambda'\lambda)(sc) = (\lambda'\lambda)x.
\end{aligned}$$

Odatle je $\lambda\lambda' = \lambda'\lambda$. Analogno je $\rho\rho' = \rho'\rho$. Dakle, $(\lambda, \rho) \in C(\Omega(S))$.
Pa je $\psi'(S) = \psi(S) = C(\Omega(S))$.

Prema Lemi 2.6 i Lemi 2.7, imamo

II.2.8. TEOREM, Ako je semigrupa S takva da je $S = SC(S)$ i $(\lambda, \rho) \in \Omega(S)$, tada sledeći uslovi su ekvivalentni:

- (1) $(\lambda, \rho) \in C(\Omega(S))$.
- (2) $\lambda\lambda' = \lambda'\lambda$ za sve $\lambda' \in \bar{\Lambda}(S)$.
- (3) $\rho\rho' = \rho'\rho$ za sve $\rho' \in \bar{P}(S)$.
- (4) $\lambda C(S) \subseteq C(S)$.
- (5) $C(S)\rho \subseteq C(S)$.

II.2.9. TEOREM, Ako je semigrupa S takva da je $S = SC(S)$, tada $C(\Omega(S))$ izomorfno se potapa u $\Omega(C(S))$.

DOKAZ. Neka je $(\lambda, \rho) \in C(\Omega(S))$. Definišemo preslikavanje h , sa $h: (\lambda, \rho) \rightarrow (\bar{\lambda}, \bar{\rho})$, gde je $\bar{\lambda} = \lambda|_{C(S)}$, $\bar{\rho} = \rho|_{C(S)}$. Prema Teoremi 2.8, h preslikava $C(\Omega(S))$ u $\Omega(C(S))$.

h - je homomorfizam. Neka su $(\lambda, \rho), (\lambda', \rho') \in C(\Omega(S))$.

Tada, $(\lambda\lambda')C(S) = \lambda(\lambda'C(S)) \subseteq \lambda C(S) \subseteq C(S)$,

$C(S)\rho\rho' = (C(S)\rho)\rho' \subseteq C(S)\rho' \subseteq C(S)$ i važi

$$\overline{\lambda\lambda'} = (\lambda\lambda')|_{C(S)} = \lambda|_{C(S)} \lambda'|_{C(S)} = \bar{\lambda}\bar{\lambda'},$$

$$\overline{\rho\rho'} = (\rho\rho')|_{C(S)} = \rho|_{C(S)} \rho'|_{C(S)} = \bar{\rho}\bar{\rho'}.$$

Odatle

$$\begin{aligned}
((\lambda, \rho)(\lambda', \rho'))h &= (\lambda\lambda', \rho\rho')h = (\overline{\lambda\lambda'}, \overline{\rho\rho'}) = (\bar{\lambda}\bar{\lambda'}, \bar{\rho}\bar{\rho'}) = \\
&= (\bar{\lambda}, \bar{\rho})(\bar{\lambda'}, \bar{\rho'}) = (\lambda, \rho)h(\lambda', \rho')h.
\end{aligned}$$

h - je injektivno. Neka je $(\lambda, \rho)h = (\lambda', \rho')h$,
 $(\lambda, \rho), (\lambda', \rho') \in C(\Omega(S))$. Tada je $(\bar{\lambda}, \bar{\rho}) = (\bar{\lambda}', \bar{\rho}')$, tj. $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}'$
i $\bar{\rho} = \bar{\rho}'$. Budući da je $S = SC(S)$, to svako $x \in S$ možemo pisati
u obliku $x = sc, s \in S, c \in C(S)$, pa je $\lambda x = \lambda(sc) = \lambda(cs) =$
 $= (\lambda c)s = (\lambda' c)s = \lambda'(cs) = \lambda'(sc) = \lambda' x$, odatle $\lambda = \lambda'$. Ana-
logno je $\rho = \rho'$. Dakle $(\lambda, \rho) = (\lambda', \rho')$ i $C(\Omega(S)) \cong h(C(\Omega(S))) \subseteq$
 $\subseteq \Omega(C(S))$.

II.2.10. TEOREM. Ako je semigrupa S takva da je $S = SC(S)$ i
 $C(S)$ - kancelativna, tada je $C(\Omega(S)) \cong \Omega(C(S))$.

DOKAZ. Preslikavanje h definisano u Teoremi 2.9, je mo-
nomorfizam $C(\Omega(S))$ u $\Omega(C(S))$. Pokažimo da je h surjektivno.

Neka je $(\lambda', \rho') \in \Omega(C(S))$. Definišemo preslikavanje λ i
 ρ na S , stavljajući $\lambda x = \lambda' x$ i $x\rho = x\rho'$ ako je $x \in C(S)$,
 $\lambda x = \lambda(ca) = (\lambda' c)a$ i $x\rho = (ac)\rho = a(c\rho')$, ako je $x \in S \setminus C(S)$,
 $c \in C(S), a \in S$.

Pokažimo da su λ i ρ dobro definisane funkcije. Neka
je $x = ca = c'a', c, c' \in C(S), a, a' \in S$. Tada je $cc' = c'c \in C(S)$
i $\lambda'(cc') = (\lambda' c)c' = (\lambda' c')c$, odatle je $(\lambda' c)c'a' = (\lambda' c')ca'$,
zbog $c'a' = ca$, dobijemo $(\lambda' c)c a = (\lambda' c')ca'$ odnosno
 $((\lambda' c)a)c = ((\lambda' c')a')c$. Budući da je $S \setminus C(S)$ - kancelativna,
imamo $(\lambda' c)a = (\lambda' c')a' = \lambda x$. Analogno dobijemo $a(c\rho') =$
 $= a'(c'\rho') = x\rho$. Dakle λ i ρ su dobro definisane funkcije. Neka
su $x, y \in S$, tada je $x = ca, y = bt, c, t \in C(S), a, b \in S$ i
 $\lambda(xy) = \lambda(cay) = (\lambda' c)(ay) = ((\lambda' c)a)y = (\lambda x)y$,
 $(xy)\rho = (xbt)\rho = (xb)(t\rho') = x(b(t\rho')) = x(y\rho)$,
 $x(\lambda y) = (ac)(\lambda(tb)) = a(c(\lambda' t))b = a((c\rho')t)b = (a(c\rho'))tb =$
 $= (x\rho)y$. Dakle $(\lambda, \rho) \in \Omega(S)$. Dalje, za svako $c' \in C(S)$ je

$$c'(\lambda x) = c'((\lambda'c)a) = (c'(\lambda'c))a = a((c'\lambda')c) = (c(c'\rho')) = \\ = a((cc')\rho') = a((c'c)\rho') = (ac')(c\rho') = c'(a(c\rho')) = c'(x\rho).$$

Zbog $C(S)$ - kancelativnosti semigrupe S je $\lambda x = x\rho$ za sve $x \in S$ a zbog $S = SC(S)$, dakle S je globalno idempotentna, sledi $(\lambda, \rho) \in C(\Omega(S))$. Pri tome je $\lambda|_{C(S)} = \lambda'$, $\rho|_{C(S)} = \rho'$ i $(\lambda, \rho)h = (\lambda', \rho')$, pa je h surjektivno.

$$\text{Dakle } C(\Omega(S)) \cong \Omega(C(S)).$$

II,2.11. LEMA. Ako semigrupa S sadrži jedinični element, tada je $C(\Omega(S)) \cong \Omega(C(S))$.

DOKAZ. Budući da semigrupa S sadrži jedinični element, imamo $\Omega(S) = \Pi(S) \cong S$. Odatle je $C(\Omega(S)) = C(\Pi(S)) \cong C(S)$. S druge strane imamo $\Omega(C(S)) = \Pi(C(S)) \cong C(S)$. Odatle, $C(\Omega(S)) \cong \Omega(C(S))$.

II,2.12. PRIMER. Skup $S = \{a, b, c, d\}$ sa binarnom operacijom datom Keliovom tablicom

	a	b	c	d
a	b	a	c	d
b	a	b	c	d
c	c	c	c	c
d	d	d	d	d

je semigrupa sa jediničnim elementom b i centrom $C(S) = \{a, b\}$. Očevidno, da je $S = SC(S)$. S obzirom da S sadrži jedinični element, to je $\Omega(S) = \Pi(S)$ i $C(\Omega(S)) = C(\Pi(S)) = \{(\lambda_a, \rho_a), (\lambda_b, \rho_b)\} \cong C(S)$, gde su (λ_a, ρ_a) , (λ_b, ρ_b) unutrašnje bitranslacije semigrupe S inducirane sa a odnosno b . Dalje je $\Omega(C(S)) = \{(\sigma_1, \sigma_1), (\sigma_2, \sigma_2)\}$ gde su σ_1 i σ_2 translacije semigrupe

$C(S)$ definisane sa $\sigma_1 a = a$, $\sigma_1 b = b$, $\sigma_2 a = b$, $\sigma_2 b = a$.

Preslikavanje h , definisano sa

$$h : (\lambda_a, \rho_a) \rightarrow (\sigma_2, \sigma_2),$$

$$h : (\lambda_b, \rho_b) \rightarrow (\sigma_1, \sigma_1)$$

je izomorfizam semigrupe $C(\Omega(S))$ na $\Omega(C(S))$.

II.2.13. LEMA. Ako je semigrupa S takva da je $S = SC(S)$, tada obe projekcije

$$\sigma : (\lambda, \rho) \rightarrow \lambda \quad \text{i} \quad \tau : (\lambda, \rho) \rightarrow \rho, \quad (\lambda, \rho) \in \Omega(S)$$

su injektivne.

DOKAZ. Neka je $\sigma(\lambda, \rho) = \sigma(\lambda', \rho')$, za $(\lambda, \rho), (\lambda', \rho') \in \Omega(S)$, tj. $\lambda = \lambda'$. Tada, svako $x \in S$ možemo predstaviti u obliku $x = sc$, $s \in S$, $c \in C(S)$ i prema Lemi 2.1 imamo $x\rho = (sc)\rho = s(c\rho) = s(\lambda c) = s(\lambda' c) = s(c\rho') = (sc)\rho' = x\rho'$, pa je $\rho = \rho'$, tj. $(\lambda, \rho) = (\lambda', \rho')$ i σ je injektivno. Analogno se dokazuje da je τ injektivno.

II.2.14. POSLEDICA. Ako je semigrupa S takva da je $S = SC(S)$, tada je $\Omega(S) \cong \bar{\Lambda}(S) \cong \bar{P}(S)$.

Dalje ćemo dati jednu karakterizaciju centralizatora podsemigrupe $\Gamma(S)$ ($\Delta(S)$) semigrupe \mathcal{F}_S (\mathcal{F}'_S), za proizvoljnu semigrupu S .

II.2.15. LEMA. Ako posmatramo $\Gamma(S)$ kao podsemigrupu od \mathcal{F}_S semigrupa S , tada je

$$C_{\mathcal{F}_S}(\Gamma(S)) = \{\alpha \in \mathcal{F}_S \mid \alpha(sx) = s(\alpha x), \text{ za svako } s, x \in S\}$$

DOKAZ. Znamo da je

$$C_{\mathcal{F}'_S}(\Gamma(S)) = \{\alpha \in \mathcal{F}'_S \mid \alpha\lambda_a = \lambda_a\alpha \text{ za svako } \lambda_a \in \Gamma(S), a \in S\}.$$

Označimo sa

$$T = \{\alpha \in \mathcal{F}_S \mid \alpha(sx) = s(\alpha x) \text{ za svako } s, x \in S\}.$$

Neka je $\alpha \in T$ i $\lambda_a \in \Gamma(S)$ za proizvoljno $a \in S$. Tada je $(\alpha \lambda_a)x = \alpha(\lambda_a x) = \alpha(ax) = a(\alpha x) = \lambda_a(\alpha x) = (\lambda_a \alpha)x$, za svako $x \in S$, pa je $\alpha \lambda_a = \lambda_a \alpha$ tj. $\alpha \in C_{\mathcal{F}_S}(\Gamma(S))$ i $T \subseteq C_{\mathcal{F}_S}(\Gamma(S))$. Obratno, neka je $\beta \in C_{\mathcal{F}_S}(\Gamma(S))$, tada je $\beta \lambda_x = \lambda_x \beta$ za svako $\lambda_x \in \Gamma(S)$, $x \in S$. Odatle je $(\beta \lambda_x)y = (\lambda_x \beta)y$, $\beta(\lambda_x y) = \lambda_x(\beta y)$, $\beta(xy) = x(\beta y)$, za svako $x, y \in S$, pa je $\beta \in T$, i $C_{\mathcal{F}_S}(\Gamma(S)) \subseteq T$. Dakle $C_{\mathcal{F}_S}(\Gamma(S)) = T$. Analogno se dobije $C_{\mathcal{F}_S}(\Delta(S)) = \{\alpha' \in \mathcal{F}_S \mid (xs)\alpha' = (x\alpha')s, \text{ za svako } x, s \in S\}$.

II.3. POTAPANJE UNUTRAŠNOG TRANSLATORNOG OMOTAČA SEMIGRUPE U TRANSLATORNI OMOTAČ NJENOG IDEALA

Ako je T ma koji podskup semigrupe S takav da je on slabo reduktivan u odnosu na S , tada je S slabo reduktivna semigrupa. Prirodno je postaviti pitanje, kada će neki podskup slabo reduktivne semigrupe biti slabo reduktivan u odnosu na S . U vezi s tim sledeća teorema daje jedan potreban i dovoljan uslov da ideal semigrupe S bude slabo reduktivan u odnosu na S . Prethodno definišemo slabo reduktivan ideal u odnosu na semigrupu.

II.3.1. DEFINICIJA, Ideal T semigrupe S naziva se slabo reduktivan u odnosu na semigrupu S ako iz $at = bt$ i $ta = tb$ za proizvoljne $a, b \in S$ i svako $t \in T$ sledi $a = b$.

II.3.2. TEOREM. Neka je T ideal slabo reduktivne semigrupe S . Ideal T je slabo reduktivan u odnosu na S ako i samo ako $\Pi(S)$ se izomorfno potapa u $\Omega(T)$.

DOKAZ. Neka je T slabo reduktivan ideal u odnosu na S .

Definišemo preslikavanje:

$$\varphi : \pi_s \rightarrow \pi^s, \quad s \in S, \quad \pi_s \in \Pi(S), \quad \text{gde je}$$

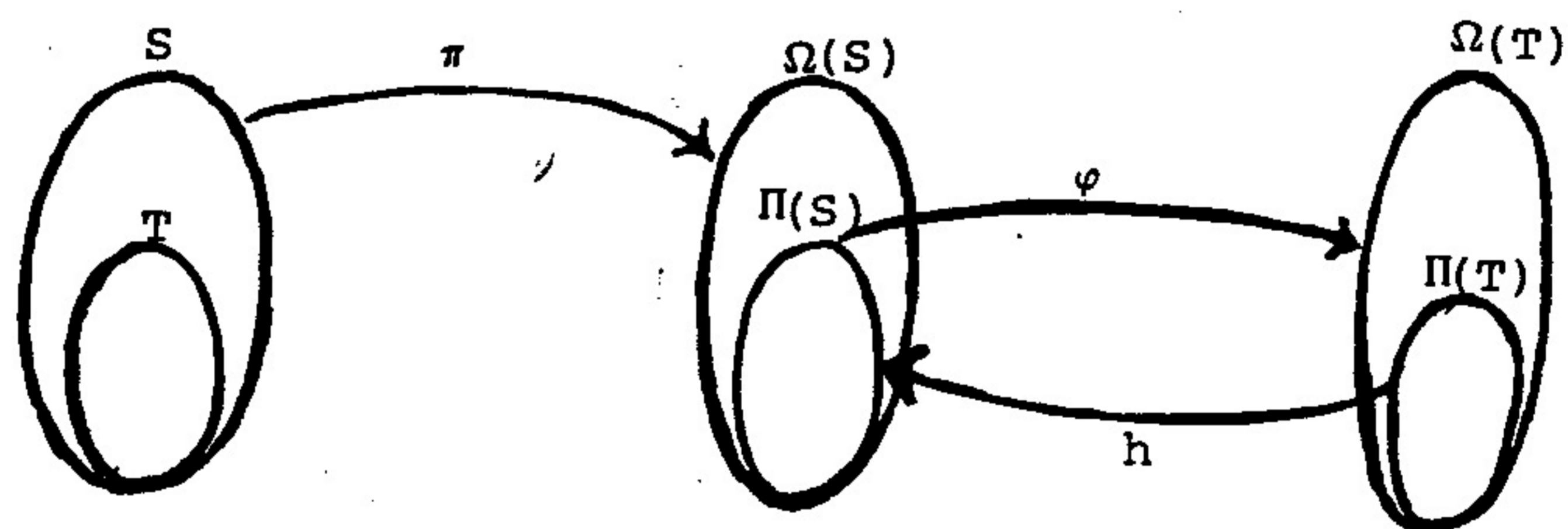
$\pi^s t = st$ i $t\pi^s = ts$ za svako $t \in T$. Neka je $\pi^s = (\lambda^s, \rho^s)$ i $u, v \in T$, tada je

$$\pi^s(uv) = s(uv) = (su)v = (\pi^s u)v,$$

$$(uv)\pi^s = (uv)s = u(vs) = u(v\pi^s),$$

$$(u\pi^s)v = (us)v = u(sv) = u(\lambda^s v).$$

Odatle je $\pi^s = (\lambda^s, \rho^s) \in \Omega(T)$ za svako $s \in S$. Dakle, φ preslikava $\Pi(S)$ u $\Omega(T)$, slika 1.



Slika 1

π je kanonski homomorfizam iz S u $\Omega(S)$ (ili na $\Pi(S)$).

Neka su $r, s \in S$, tada je

$$\pi^{rs}t = (rs)t = r(st) = \pi^r(\pi^s t) = (\pi^r \pi^s)t,$$

$$t\pi^{rs} = t(rs) = (tr)s = (t\pi^r)\pi^s = t(\pi^r \pi^s), \quad \text{za svako } t \in T,$$

pa je $\pi^{rs} = \pi^r \pi^s$. Odatle je $(\pi_r \pi_s)\varphi = (\pi_{rs})\varphi = \pi^{rs} = \pi^r \pi^s = (\pi_r)\varphi(\pi_s)\varphi$. Dakle je φ - homomorfizam.

Neka je $\pi^r = \pi^s$, tada je $\pi^r t = \pi^s t$ i $t\pi^r = t\pi^s$, odnosno $rt = st$ i $tr = ts$, za proizvoljno $r, s \in S$ i svako $t \in T$. Budući da je T slabo reduktivan ideal u odnosu na S , to je $r = s$, pa je $\pi_r = \pi_s$ tj. φ -je injektivno. Dakle $\Pi(S)$ se izomorfno potapa u $\Omega(T)$, tj. $\Pi(S) \cong (\Pi(S))\varphi \subseteq \Omega(T)$. Obratno, neka je T ideal slabo reduktivne semigrupe S takav da se $\Pi(S)$ izomorfno potapa u $\Omega(T)$, φ injektivni homomorfizam iz $\Pi(S)$ u $\Omega(T)$ definisan sa $(\pi_s)\varphi = \pi^s$ i $at = bt$ i $ta = tb$ za proizvoljne $a, b \in S$ i svako $t \in T$. Tada je $\pi^a t = \pi^b t$ i $t\pi^a = t\pi^b$, $((\pi_a)\varphi)t = ((\pi_b)\varphi)t$ i $t((\pi_a)\varphi) = t((\pi_b)\varphi)$, pa je $(\pi_a)\varphi = (\pi_b)\varphi$. Budući da je φ injektivno, to je $\pi_a = \pi_b$, a sobzirom da je S slabo reduktivna semigrupa dobijemo $a = b$, pa je T slabo reduktivan idela u odnosu na S .

II.3.3. POSLEDICA. Ako je T ideal slabo reduktivne semigrupe S , tada $\Pi(T)$ se izomorfno potapa u $\Pi(S)$.

DOKAZ. Preslikavanje $h : \pi^t \rightarrow \pi_t$, $t \in T$, $\pi^t \in \Pi(T)$ preslikava $\Pi(T)$ u $\Pi(S)$.

Za $\pi^u, \pi^v \in \Pi(T)$, $u, v \in T$ je

$$(\pi^u \pi^v)h = (\pi^{uv})h = \pi_{uv} = \pi_u \pi_v = (\pi^u)h(\pi^v)h, \text{ dakle,}$$

h - je homomorfizam.

Neka je $(\pi^u)h = (\pi^v)h$, $u, v \in T$. Tada je $\pi_u = \pi_v$ odnosno, zbog slabo reduktivnosti semigrupe S , je $u = v$. Dakle h -je injektivno. Dakle, $\Pi(T)$ se izomorfno potapa u $\Pi(S)$ tj.

$$\Pi(T) \cong (\Pi(T))h \subseteq \Pi(S).$$

Očevidno, $\Pi(T) \subseteq (\Pi(S))\varphi$ jer za $\pi^t \in \Pi(T)$, $t \in T$ imamo $\pi^t = (\pi_t)\varphi \in (\Pi(S))\varphi$.

III D E O

REPREZENTACIJA INVERZNE SEMIGRUPE I ULAGANJE
TRANSLATORNOG OMOTAČA SEMIGRUPE U INVERZNU SEMIGRUPU

U V O D

III.1. Ponizovski u [15] i [17] uveo je pojam reprezentacije semigrupe S u S -bazi i okarakterisao tranzitivnu reprezentaciju pomoću S -baze, Def.: I.5.3, I.5.4, I.5.5, I.5.6. i Teor.: I.5.8, I.5.9. U definiciji pojma S -baze korišćen je i pojam desnog (levog, obostranog) idealnog sloja jedne semigrupe, definisanih u tački I.4.

U ovoj tački, na početku, data je ekvivalencija između pojma desni idealni sloj i pojma \mathcal{R} -klasa, Lema 1.1 i Posledica 1.2. Dalje se karakteriše tranzitivna reprezentacija konačne inverzne semigrupe S pomoću slabo reduktivnog minimalnog ideala za S i potapanja $\Pi(S)$ u translatorni omotač tog ideala.

III.2. U ovoj tački posmatra se kongruencija σ neke semigrupe S i dokazuje se neka svojstva te kongruencije u odnosu na translatorne omotače $\Omega(S)$ i $\Omega(S/\sigma)$. Dalje, dokazuje se da skup svih ω -kongruencija (ω - je bitranslacija te semigrupe) neke semigrupe, je kompletna podmreža mreže svih kongruencija te semigrupe.

III.3. U ovoj tački dat je jedan pokušaj rešenja problema potapanja translatornog omotača semigrupe u neku inverznu semigrupu, ako je ta semigrupa potopljena u neku inverznu semigrupu. Ovaj problem potapanja u grupi je moguć i to je u ovoj tački dokazano.

III.1. TRANZITIVNA REPREZENTACIJA KONAČNE INVERZNE SEMIGRUPE

U tački I.4 definisan je desni (levi, obostrani) idealni sloj i definisana je \mathcal{R} -(\mathcal{L} -, \mathcal{J} -) klasa za ma koju semigrupu S . Sa \mathcal{J} označavamo skup svih desnih ideala semigrupe S .

III.1.1. LEMA. Elementi x, y iz semigrupe S su \mathcal{J} ekvivalentni ako i samo ako su \mathcal{R} -ekvivalentni.

DOKAZ. Neka su $x, y \in S$ takvi da su \mathcal{J} ekvivalentni. Tada svaki desni ideal od S koji sadrži x sadržiće i y i obratno. Tako, desni ideal xS^1 sadrži element x pa on sadrži i element y tj. $y \in xS^1$. Ako je $y = x$ onda jasno da je $x \mathcal{R} y$. Ako je $y \neq x$, tada je $y = xs \in xS^1$ za neko $s \in S$, pa je $yS^1 = xsS^1 \subseteq (xS)S^1 \subseteq sS^1$. Analogno, desni ideal yS^1 sadrži y , pa on sadrži i x i otuda $xS^1 \subseteq yS^1$. Dakle, $xS^1 = yS^1$ tj. $x \mathcal{R} y$. Obratno, neka su $x, y \in S$ takvi da je $x \mathcal{R} y$, tada je $xS^1 = yS^1$. Neka je J bilo koji desni ideal od S takav da sadrži x . Ako je $y = x$ onda J sadrži i y pa su x i y \mathcal{J} ekvivalentni. Ako je $y \neq x$, zbog $xS^1 = yS^1$ sledi $y = xs \in xS^1$ za neko $s \in S$. Budući da je $x \in J$ to je $xs = y \in J$. Dakle x i y su \mathcal{J} ekvivalentni.

III.1.2. POSLEDICA. Pojam desni idealni sloj R semigrupe S je istovetan sa pojmom \mathcal{R} -klasa R ekvivalentnih elemenata iz S .

Potpuno, analogno se dobije da je pojam levi (obostrani) idealni sloj jedne semigrupe istovetan sa \mathcal{L} -(\mathcal{J} -) klasom ekvivalentnih elemenata iz S .

Dalje posmatračamo konačnu inverznu semigrupu S . Jasno da svaka konačna semigrupa ima jezgro tj. minimalan ideal. S druge strane svaka \mathcal{R} -(\mathcal{L} -) klasa inverzne semigrupe sadrži po jedan jedinstven idempotent.

III.1.3. TEOREM. Neka je S konačna inverzna semigrupa. Tada sledeći uslovi su ekvivalentni.

- (1) S ima injektivnu tranzitivnu reprezentaciju.
- (2) S ima minimalan nenula slabo reduktivan ideal T .
- (3) S i $\Pi(S)$ se izomorfno potapaju u $\Omega(T)$, (T ideal za S).

DOKAZ. (1) \Rightarrow (2) Neka je φ injektivna tranzitivna reprezentacija semigrupe S . Tada prema Teoremi I.5.8 i Teoremi I.5.9, reprezentaciju φ možemo pisati u obliku $\varphi = (R, H)$ gde R je \mathcal{R} -klasa od S a H je neka podgrupa od R . Prema Def. I.5.6 i Lemi I.5.7, $\varphi = (R, H)$ je tranzitivna reprezentacija semigrupe S u $\mathcal{J}_{R/H}$ gde je skup $R/H = \{Hr \mid r \in R\}$ S -baza i za $x \in S$ imamo:

$$\begin{aligned} Hr((x)\varphi) &= Hrx \quad \text{ako je} \quad rx \in R, \\ Hr((x)\varphi) &\quad \text{nedefinisano ako} \quad rx \notin R. \end{aligned}$$

Dakle $(x)\varphi$ je parcijalna injektivna transformacija iz R/H u R/H .

Stavimo $T = SRS$. Očevidno da je T ideal od S . Pokažimo da je T minimalan nenula slabo reduktivan ideal od S .

Minimalnost. Neka je J ideal od S takav da je $J \subseteq T$, $J \neq T$. \mathcal{R} -klasa R je sadržana u $T \setminus J$, tj. $R \subseteq T \setminus J$. Zaista, neka je $y \in R$ tada je $y = yy^{-1}y = (yy^{-1})y(y^{-1}y) \in SRS = T$ tj. $R \subseteq T$. Ako postoji $r \in R$ takvo da je $r \in J$, tada svako $r \in R$ je $r \in J$ (Posledica 1.2) pa je $R \subseteq J$. Odatle je $T = SRS \subseteq SJS \subseteq J$

što je kontradikcija. Dakle ne postoji $r \in R$ takvo da je $r \in J$, tj. $R \subset T \setminus J$. Prema tome, ako je $x \in J$ tada je $rx \in J$ za svako $r \in R$, što znači da $rx \notin R$ za svako $r \in R$, dakle $(x)\varphi$ je prazna transformacija skupa R/H , tj. $(x)\varphi$ je nul transformacija skupa R/H . Budući da je φ injektivno, to ili je J prazan skup ili je J nula. U oba slučaja T je minimalan nenula ideal od S .

Slaba reduktivnost. Neka je za ma koje $x, y \in S$ $xt = yt$ i $tx = ty$ za svako $t \in T$. Tada u specijalnom slučaju je $rx = ry$ za svako $r \in R$. Odatle je $Hr((x)\varphi) = Hrx = Hry = Hr((y)\varphi)$, odnosno $(x)\varphi = (y)\varphi$, po samoj definiciji reprezentacije $\varphi = (R, H)$. Budući da je φ injektivno to je $x = y$, pa je T slabo reduktivan ideal za S .

(2) \Rightarrow (3) Sobzirom da je S inverzna semigrupa ona je reduktivna (slabo reduktivna). Neka je T minimalan nenula slabo reduktivan ideal od S . Tada prema Teoremi II.3.1 S i $\Pi(S)$ se izomorfno potapaju u $\Omega(T)$.

Analogno, na osnovu Teoreme II.3.2 imamo (3) \Rightarrow (2).

(2) \Rightarrow (1) Neka je T minimalan nenula slabo reduktivan ideal za S . Tada je $A = tT$, $t \in T$, $t \neq 0$, 0-minimalan desni ideal od S . Budući da su A i $\{0\}$ desna susedna ideala od S to je $R = A \setminus \{0\}$ \mathcal{R} -klasa od S . S druge strane, S je inverzna pa postoji jedinstven idempotent, označimo ga sa e , u R . Neka je H podgrupa od R , tada klase Hr , $r \in R$ su poparno disjunktne ili se poklapaju. Označimo sa R/H skup svih takvih klasa Hr , $r \in R$. U skupu R/H prirodnim načinom uvodimo množenje sdesna sa elementima iz S , naime ako je $Hr \in R/H$ i $s \in S$ definišemo:

$$\text{Hrs} \subset R \Rightarrow \text{Hr} \cdot s = \text{Hrs} \in R/H,$$

$$\text{Hrs} \not\subset R \Rightarrow \text{Hr} \cdot s \notin R/H$$

Ovako definisano množenje pretvara R/H u S -bazu.

Svakom elementu $s \in S$ pridružimo transformaciju

$$(s)\mu = \mu_s \quad \text{semigrupe } S, \text{ gde je}$$

$$x\mu_s = xs \in S \quad \text{i} \quad \mu_s x = sx \in S \quad \text{za svako } x \in S,$$

ali koja u skupu R/H prouzrokuje množenje sdesna sa s , tj. μ_s je parcijalna transformacija skupa R/H gde je:

$$\text{dom } \mu_s = \{\text{Hr} \mid r \in R, \text{Hr} \cdot s = \text{Hrs} \in R/H\},$$

$$\text{kodom } \mu_s = \{\text{Hr}' \mid r' \in R \text{ takvo da postoji } \text{Hr} \in R/H \text{ i} \\ \text{Hr} \cdot s = \text{Hrs} = \text{Hr}', r' = rs\}.$$

Dakle $\text{Hr} \in \text{dom } \mu_s \Leftrightarrow \text{Hr} \cdot \mu_s = \text{Hr} \cdot s = \text{Hrs} \in R/H$. μ je reprezentacija. Neka je $\text{Hr}_1 s = \text{Hr}_2 s \in R$. Budući da je R/H S -baza to je $\text{Hr}_1 = \text{Hr}_2$, pa je μ_s parcijalna injektivna transformacija skupa R/H . Neka su $s, t \in S$ i $\text{Hr} \in \text{dom } \mu_{st}$, tada je $\text{Hr}(st) \in R/H$, a budući da je R/H S -baza to je $\text{Hrs}, \text{H}(rs)t \in R/H$, a to znači da je $\text{Hr} \in \text{dom } \mu_s$, $\text{Hrs} \in \text{dom } \mu_t$ i vredi:

$$\text{Hr} \mu_{st} = \text{Hr}(st) = \text{H}(rs)t = (\text{Hr} \mu_s) \mu_t = \text{Hr}(\mu_s \mu_t) \text{ tj.}$$

$\mu_{st} = \mu_s \mu_t$, pa je μ -homomorfizam. Dakle μ je reprezentacija semigrupe S u $\mathfrak{J}_{R/H}$.

μ je tranzitivna. Neka su $\text{Hr}_1, \text{Hr}_2 \in R/H$, $r_1, r_2 \in R$. Budući da je $R = A \setminus \{0\}$ \mathcal{R} -klasa od S , to je $r_1 r_1^{-1} = e$ idempotent iz R a na osnovu Posledice I.4.2, e je jedinstven idempotent iz R i on je leva jedinica u R . Odatle je

$$\text{Hr}_2 = \text{H}er_2 = \text{H}(r_1 r_1^{-1})r_2 = \text{Hr}_1 (r_1^{-1} r_2) = \text{Hr}_1 s = \text{Hr}_1 \mu_s,$$

gde je $s = r_1^{-1} r_2 \in S$, pa je μ tranzitivna reprezentacija.

μ je injektivno. Neka je $(a)\mu = (b)\mu$, $a, b \in S$. Tada je

$\mu_a = \mu_b$ pa je $x\mu_a = x\mu_b$ i $\mu_a x = \mu_b x$ za svako $x \in S$, tj. $xa = xb$ i $ax = bx$. Specijalno to vredi i za svako $t \in T$ jer je $T \subset S$ pa je $ta = tb$ i $at = bt$.

Budući da je T slabo reduktivan ideal u odnosu na S to je $a = b$. Dakle μ je injektivno.

Time je teorema dokazana.

Prethodnu teoremu ilustrujemo sledećim primerom.

III.1.4. PRIMER. Neka je $S = \{E, F, A_1, A_2, A_3, A_4, A_0\}$ gde su

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

matrice drugog reda nad semigrupom $G^0 = \{1\} \cup \{0\}$.

U odnosu na obično množenje matrica, S je semigrupa sa jediničnim elementom E i nulom $A_0 = 0$. Predstavimo množenje elemenata semigrupa S Keliovom tablicom

	E	F	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	0
E	E	F	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	0
F	F	E	A ₃	A ₄	A ₁	A ₂	0
A ₁	A ₁	A ₂	A ₁	A ₂	0	0	0
A ₂	A ₂	A ₁	0	0	A ₁	A ₂	0
A ₃	A ₃	A ₄	A ₃	A ₄	0	0	0
A ₄	A ₄	A ₃	0	0	A ₃	A ₄	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Iz tablice 5 se vidi da je S globalna idempotentna semi-grupa tj. $S^2 = S$, regularna (jer za ma koje $x \in S$ postoji $y \in S$ takvo da je $x = xyx$) sa skupom idempotenata $E(S) = \{E, A_1, A_4, 0\}$. Sledeća tablika pokazuje da idempotenti iz S komutiraju.

\cdot	E	A_1	A_4	0
E	E	A_1	A_4	0
A_1	A_1	A_1	0	0
A_4	A_4	0	A_4	0
0	0	0	0	0

Tablica 6

Dakle S je konačna inverzna semigrupa sa jediničnim elementom E i nulom $A_0 = 0$. Odatle je $\Omega(S) = \Pi(S) \cong \bar{S}$.

Iz tablice 5 lako se vidi da je $T = \{A_1, A_2, A_4, 0\}$, 0 -minimalan reduktivan (slabo reduktivan) ideal u odnosu na S . Dakle $T \neq 0$, $T^2 \neq 0$ i 0 je jedinstven dvostrani ideal od S , strogo sadržan u T i za ma koje $x, y \in S$ iz $tx = ty$ odnosno $xt = yt$ za svako $t \in T$ sledi $x = y$. Odatle je $T = TtT$, $t \in T$, $t \neq 0$. Dalje imamo:

$$I = A_1T = A_2T = \{A_1, A_2, 0\}, \quad i$$

$$I' = A_3T = A_4T = \{A_3, A_4, 0\}$$

su 0 -minimalni desni ideali za S . Označimo sa

$$R = I \setminus \{0\} = \{A_1, A_2\}. \quad \text{Tada } R \text{ je } \mathcal{R}\text{-klasa i } H = \{A_1\} \text{ je}$$

podgrupa od R . Dalje je

$$\begin{aligned} R/H &= \{Hr \mid r \in R\} = \{HA_1, HA_2\} = \{A_1A_1, A_1A_2\} = \\ &= \{A_1, A_2\} = R. \end{aligned}$$

Dakle, $R = R/H$ je S -baza.

Preslikavanje $\mu : s \rightarrow \mu_s$, pisaćemo u obliku $(s)\mu = \mu_s$, gde je μ_s transformacija semigrupe S , tj. $x\mu_s = xs \in S$ i $\mu_s x = sx \in S$, za svako $x \in S$; ali takva da je μ_s parcijalna injektivna transformacija skupa R gde je

$$r\mu_s = rs \in R \quad \text{ako je} \quad r \in \text{dom } \mu_s,$$

$$r\mu_s \quad \text{nedefinisano ako} \quad r \notin \text{dom } \mu_s.$$

Na ovaj način imamo:

$$\text{dom } \mu_E = \{A_1, A_2\} = R \quad \text{jer je} \quad A_1E = A_1, A_2E = A_2, \mu_E: R \rightarrow R,$$

$$\text{dom } \mu_F = \{A_1, A_2\} = R \quad \text{jer je} \quad A_1F = A_2, A_2F = A_1, \text{tj. } \mu_F: R \rightarrow R,$$

$$\text{dom } \mu_{A_1} = \{A_1\} \quad \text{jer je} \quad A_1A_1 = A_1 \quad \text{tj.} \quad \mu_{A_1} : A_1 \rightarrow A_1,$$

$$\text{dom } \mu_{A_2} = \{A_1\} \quad \text{jer je} \quad A_1A_2 = A_2 \quad \text{tj.} \quad \mu_{A_2} : A_1 \rightarrow A_2,$$

$$\text{dom } \mu_{A_3} = \{A_2\} \quad \text{jer je} \quad A_2A_3 = A_1 \quad \text{tj.} \quad \mu_{A_3} : A_2 \rightarrow A_1,$$

$$\text{dom } \mu_{A_4} = \{A_2\} \quad \text{jer je} \quad A_2A_4 = A_2 \quad \text{tj.} \quad \mu_{A_4} : A_2 \rightarrow A_2,$$

$$\text{dom } \mu_0 = \emptyset \quad \text{tj.} \quad \mu_0 : \emptyset \rightarrow \emptyset.$$

Odatle je $\mathfrak{J}_R = \{\mu_E, \mu_F, \mu_{A_1}, \mu_{A_2}, \mu_{A_3}, \mu_{A_4}, \mu_0\}$ i pri tome μ preslikava S na \mathfrak{J}_R .

Za $r \in \text{dom } \mu_{s_1s_2} \subseteq R$, $s_1, s_2 \in S$ vredi

$$r \mu_{s_1s_2} = r(s_1s_2) = (rs_1)s_2 = (r\mu_{s_1})\mu_{s_2} = r(\mu_{s_1} \mu_{s_2}), \text{ dakle}$$

$(s_1s_2)\mu = \mu_{s_1s_2} = \mu_{s_1} \mu_{s_2} = (s_1)\mu(s_2)\mu$, pa je μ reprezentacija semigrupe S na \mathfrak{J}_R tj. u S -bazi R .

μ -je tranzitivna. Neka su $a = A_1, b = A_2 \in R$ tada postoji $A_2 \in S$ takvo da je

$$a\mu_{A_2} = A_1 \mu_{A_2} = A_1 A_2 = A_2 = b.$$

Za $a = A_2, b = A_1 \in R$, postoji $A_3 \in S$ takvo da je

$$a\mu_{A_3} = A_2 \mu_{A_3} = A_2 A_3 = A_1 = b.$$

Za $a = A_1, b = A_1$ postoji $A_1 \in S$ takvo da je

$$a\mu_{A_1} = A_1 \mu_{A_1} = A_1 A_1 = A_1 = b.$$

Za $a = A_2, b = A_2$, postoji $A_4 \in S$ takvo da je

$$a\mu_{A_4} = A_2 \mu_{A_4} = A_2 A_4 = A_2 = b.$$

Odatle, za ma koje $x, y \in R$ postoji $\mu_s \in \mathcal{J}_R, s \in S$ takvo da je $x\mu_s = y$, što znači da je μ tranzitivna. I na kraju pokažemo još da je μ injektivna.

μ -je injektivna. Neka su $s, t \in S, s \neq t$. Lako se proverava da za $r \in R$ i $rs, rt \in R$, je $rs \neq rt$, tj., $r\mu_s \neq r\mu_t$. Dakle, $\mu_s \neq \mu_t$ odnosno $(s)\mu \neq (t)\mu$, pa je μ - injektivna.

III.2. KONGRUENCIJE I TRANSLATORNI OMOTAČ SEMIGRUPE

Za proizvoljnu kongruenciju σ na semigrupi S i za svako $\pi_a \in \Pi(S), (a \in S)$ iz $x\sigma y$ ($x, y \in S$) vredi $(ax = \pi_a x) \sigma (\pi_a y = ay)$ i $(xa = x\pi_a) \sigma (y\pi_a = ya)$. Ova činjenica daje motivaciju za sledeću definiciju.

III.2.1. DEFINICIJA. Neka je σ kongruencija semigrupe S i A neprazan podskup od $\Omega(S)$. σ nazivamo A -kongruencijom ako iz $x\sigma y$ ($x, y \in S$) sledi $(\omega x) \sigma (\omega y)$ i $(x\omega) \sigma (y\omega)$ za svaku $\omega \in A$.

Sa $\Omega_\sigma(S)$ označavamo najveći podskup od $\Omega(S)$, za koji je σ Ω_σ - kongruencija. Specijalno kada je $\Omega_\sigma(S) = \Omega(S)$ ili $(\Omega_\sigma(S) = \Pi(S))$ onda σ nazivamo $\Omega(S)$ -kongruencijom ($\Pi(S)$ -kongruencijom) na semigrupi S .

Analogno se definiše Λ -kongruencija σ za neprazan podskup A od $\Lambda(S)$ ($P(S)$). Sa $\Lambda_\sigma(S)$ ($P_\sigma(S)$) označavamo najveći podskup od $\Lambda(S)$ ($P(S)$), takav da je σ Λ_σ - ($P_\sigma(S)$)-kongruencija. Očevidno da je $\Omega_\sigma(S)$ ($\Lambda_\sigma(S)$, $P_\sigma(S)$) neprazan skup jer je $\Pi(S)$ ($\Gamma(S)$, $\Delta(S)$) sadržan u njemu.

III.2.2. PROPOZICIJA. Ako je σ proizvoljna kongruencija semigrupe S , tada je $\Omega_\sigma(S)$ ($\Lambda_\sigma(S)$, $P_\sigma(S)$) podsemigrupa od $\Omega(S)$ ($\Lambda(S)$, $P(S)$).

DOKAZ. Očevidno da je $\Omega_\sigma(S) \subseteq \Omega(S)$. Neka je $\omega, \omega' \in \Omega_\sigma(S)$ i $x\sigma y$. Tada je $(\omega x) \sigma (\omega y)$, $(x\omega) \sigma (y\omega)$, $(\omega' x) \sigma (\omega' y)$ i $(x\omega') \sigma (y\omega')$. Odatle imamo $(\omega'(\omega x)) \sigma (\omega'(\omega y))$ i $((x\omega')\omega) \sigma ((y\omega')\omega)$, odnosno $((\omega'\omega)x) \sigma ((\omega'\omega)y)$ i $(x(\omega'\omega)) \sigma (y(\omega'\omega))$, što znači da je $\omega'\omega \in \Omega_\sigma(S)$. Slično se pokazuje da je $\omega\omega' \in \Omega_\sigma(S)$, pa je $\Omega_\sigma(S)$ podsemigrupa od $\Omega(S)$. Analogno se dokazuje da je $\Lambda_\sigma(S)$ ($P_\sigma(S)$) podsemigrupa od $\Lambda(S)$ ($P(S)$).

III.2.3. TEOREM. Neka je σ proizvoljna kongruencija semigrupe S i $\omega = (\lambda, \rho) \in \Omega_\sigma(S)$. Definišemo preslikavanje $\omega^* = (\lambda, \rho)^* = (\lambda^*, \rho^*)$ semigrupe S/σ u S/σ sa $\omega^*(x\sigma) = (\omega x)\sigma$ i $(x\sigma)\omega^* = (x\omega)\sigma$, $x\sigma \in S/\sigma$. Tada je ω^* bitranslacija semigrupe S/σ i preslikavanje $\varphi: \omega \rightarrow \omega^*$ je homomorfizam iz $\Omega_\sigma(S)$ u $\Omega(S/\sigma)$ sa svojstvom $(\pi_s)\varphi = \pi_s^* = \pi_{s\sigma}$, $s \in S$.

DOKAZ. Neka je $a' \in a\sigma$, $a\sigma \in S/\sigma$, $a \in S$, tada je $a\sigma a'$,

$(\omega a) \sigma = (\omega a')$ i $(a \omega) \sigma = (a' \omega)$. Odatle $(\omega a) \sigma = (\omega a') \sigma$ i $(a \omega) \sigma = (a' \omega) \sigma$. Dakle $\omega^*(a' \sigma) = (\omega a') \sigma = (\omega a) \sigma = \omega^*(a \sigma)$ i analogno $(a' \sigma) \omega^* = (a' \omega) \sigma = (a \omega) \sigma = (a \sigma) \omega^*$, što pokazuje da je ω^* dobro (korektno) definisano preslikavanje. Za

$\omega = (\lambda, \rho) \in \Omega_\sigma(S)$, $\omega^* = (\lambda^*, \rho^*)$ i $x\sigma, y\sigma \in S/\sigma$, $x, y \in S$ imamo:

$$\lambda^*(x\sigma \cdot y\sigma) = \lambda^*((xy)\sigma) = (\lambda(xy))\sigma = ((\lambda x)y)\sigma = (\lambda x)\sigma \cdot y\sigma = \lambda^*(x\sigma) \cdot y\sigma,$$

$$(x\sigma \cdot y\sigma)\rho^* = ((xy)\sigma)\rho^* = ((xy)\rho)\sigma = (x(y\rho))\sigma = x\sigma \cdot (y\rho)\sigma = x\sigma \cdot (y\sigma)\rho^*,$$

$$(x\sigma) \cdot (\lambda^*(y\sigma)) = (x\sigma)((\lambda y)\sigma) = (x(\lambda y))\sigma = ((x\rho)y)\sigma = (x\rho)\sigma \cdot (y\sigma) = ((x\sigma)\rho^*)(y\sigma).$$

Odatle je $\omega^* = (\lambda^*, \rho^*) \in \Omega(S/\sigma)$. Dakle φ preslikava $\Omega_\sigma(S)$ u

$\Omega(S/\sigma)$. Neka su $\omega, \omega' \in \Omega_\sigma(S)$ i $x\sigma \in S/\sigma$, $x \in S$. Tada je

$$(\omega\omega')^*(x\sigma) = ((\omega\omega')x)\sigma = (\omega(\omega'x))\sigma = \omega^*((\omega'x)\sigma) = \omega^*(\omega'^*(x\sigma)) = (\omega^* \omega'^*)(x\sigma),$$

Analogno je $(x\sigma)(\omega\omega')^* = (x\sigma)(\omega^* \omega'^*)$. Dakle $(\omega\omega')^* = \omega^* \omega'^*$,

tj. $(\omega\omega')\varphi = (\omega)\varphi(\omega')\varphi$ što znači, φ je homomorfizam. Dalje za

$s \in S$ i $x\sigma \in S/\sigma$, $x \in S$ imamo:

$$\pi_S^*(x\sigma) = (\pi_S x)\sigma = (sx)\sigma = s\sigma \cdot x\sigma = \pi_{S\sigma}(x\sigma),$$

$$(x\sigma)\pi_S^* = (x\pi_S)\sigma = (xs)\sigma = x\sigma \cdot s\sigma = (x\sigma)\pi_{S\sigma}.$$

Odatle je $(\pi_S)\varphi = \pi_S^* = \pi_{S\sigma}$.

III.2.4. POSLEDICA. Preslikavanje $h : \lambda \rightarrow \lambda^*$, $\lambda \in \Lambda_\sigma(S)$ i

$g : \rho \rightarrow \rho^*$, $\rho \in P_\sigma(S)$ su homomorfizmi respektivno iz $\Lambda_\sigma(S)$ u

$\Lambda(S/\sigma)$ i iz $P_\sigma(S)$ u $P(S/\sigma)$ i pri tome vredi $(\lambda_a)h = \lambda_a^* = \lambda_{a\sigma}$,

$$(\rho_a)g = \rho_a^* = \rho_{a\sigma}, \quad a \in S.$$

III.2.5. POSLEDICA. Ako je $\sigma \in \Omega(S) - (\Lambda(S)-, P(S)-)$ kongruencija semigrupe S , tada je $\varphi(h,g)$ homomorfizam iz $\Omega(S) (\Lambda(S), P(S))$ u $\Omega(S/\sigma) (\Lambda(S/\sigma), P(S/\sigma))$.

III.2.6. PROPOZICIJA. Ako je $\sigma \in \Omega(S)$ - kongruencija semigrupe S i $\omega = (\lambda, \rho), \omega' = (\lambda', \rho') \in \Omega(S)$ su permutabilne (komutativne) tada su $(\omega)\varphi = \omega^* = (\lambda^*, \rho^*), (\omega')\varphi = \omega'^* = (\lambda'^*, \rho'^*)$ permutabilne (komutativne) bitranslacije semigrupe S/σ . Ako je $\omega = (\lambda, \rho)$ idempotentna bitranslacija semigrupe S tada je $\omega^* = (\lambda^*, \rho^*)$ idempotentna bitranslacija semigrupe S/σ .

DOKAZ. Neka je $x\sigma \in S/\sigma, x \in S$. Tada je

$$\begin{aligned} (\lambda^*(x\sigma))\rho'^* &= ((\lambda x)\sigma)\rho'^* = ((\lambda x)\rho')\sigma = (\lambda(x\rho'))\sigma = \lambda^*((x\rho')\sigma) = \\ &= \lambda^*((x\sigma)\rho'^*). \end{aligned}$$

Dakle ω^* i ω'^* su permutabilne. Dalje je

$$\begin{aligned} (\omega^* \omega'^*)(x\sigma) &= \omega^*(\omega'^*(x\sigma)) = \omega^*((\omega'x)\sigma) = (\omega(\omega'x))\sigma = \\ &= ((\omega\omega')x)\sigma = ((\omega'\omega)x)\sigma = (\omega'(\omega x))\sigma = \omega'^*((\omega x)\sigma) = \\ &= \omega'^*(\omega^*(x\sigma)) = (\omega'^* \omega^*)(x\sigma). \end{aligned}$$

Analogno je $(x\sigma)(\omega^* \omega'^*) = (x\sigma)(\omega'^* \omega^*)$ za svako $x\sigma \in S/\sigma, x \in S$. Pa je $\omega^* \omega'^* = \omega'^* \omega^*$.

Neka je $\omega^2 = \omega$, tada je $(\omega^*)^2(x\sigma) = (\omega^* \cdot \omega^*)(x\sigma) = \omega^*((\omega x)\sigma) = (\omega(\omega x))\sigma = ((\omega \cdot \omega)x)\sigma = (\omega^2 x)\sigma = (\omega x)\sigma = \omega^*(x\sigma)$, analogno je $(x\sigma)(\omega^*)^2 = (x\sigma)\omega^*$, za svako $x\sigma \in S/\sigma, x \in S$, pa je $(\omega^*)^2 = \omega^*$, tj., ω^* je idempotent.

Za bilo koju semigrupu S u [12] je definisan centroid od S u oznaci $Z(S)$ kao skup svih transformacija semigrupe S koje su i leve i desne translacije ali pisane kao levi operatori, tj., $Z(S) = \{\zeta \in \mathcal{F}(S) \mid \zeta(xy) = (\zeta x)y = x(\zeta y), x, y \in S\}$. Zatim, je definisana kongruencija σ na semigrupi S na sledeći način: $a\sigma b, a, b \in S$ ako i samo ako postoji $\zeta \in GZ(S)$ takvo da je $a = \zeta b$, gde je $GZ(S)$ grupa jedinica centroida $Z(S)$.

Za klasu reduktivnih semigrupa vredi sledeće tvrdjenje:

III.2.7. PROPOZICIJA. Ako je S reduktivna semigrupa i σ binarna relacija na S definisana sa $a\sigma b, a, b \in S, a = \zeta b, \zeta \in GZ(S)$. Tada je $\sigma \in \Omega(S)$ - kongruencija na semigrupu S .

DOKAZ. Da je σ kongruencija na S sledi iz [9]. Neka je $a\sigma b, a, b \in S$ i $\omega = (\lambda, \rho) \in \Omega(S)$. Tada je $a = \zeta b, \zeta \in GZ(S)$ i za svako $x \in S$ imamo:

$$\begin{aligned} ax &= (\zeta b)x & , & & xa &= x(\zeta b) ; \\ \lambda(ax) &= \lambda[(\zeta b)x] & , & & (xa)\rho &= [x(\zeta b)]\rho ; \\ (\lambda a)x &= \lambda[b(\zeta x)] & , & & x(a\rho) &= [(\zeta x)b]\rho ; \\ (\lambda a)x &= (\lambda b)(\zeta x) & , & & x(a\rho) &= (\zeta x)(b\rho) ; \\ (\lambda a)x &= [\zeta(\lambda b)]x & , & & x(a\rho) &= [x(\zeta(b\rho))] . \end{aligned}$$

Zbog reduktivnosti semigrupe S , dobijamo $\lambda a = \zeta(\lambda b)$ i $a\rho = \zeta(b\rho)$, što znači $(\lambda a)\sigma(\lambda b)$ i $(a\rho)\sigma(b\rho)$, tj. $(\omega a)\sigma(\omega b)$ i $(a\omega)\sigma(b\omega)$. Dakle σ je $\Omega(S)$ - kongruencija na S .

Označimo sa $\text{Con}(S)$ skup svih kongruencija semigrupe S . Poznato, da $\text{Con}(S)$ u odnosu na kompoziciju je semigrupa i u odnosu na relaciju inkluzije \subseteq , je kompletna mreža.

III.2.8. PROPOZICIJA. Ako su $\sigma, \sigma' \in \text{Con}(S)$, tada je $\Omega_{\sigma}(S) \cap \Omega_{\sigma'}(S) \subseteq \Omega_{\sigma \cap \sigma'}(S)$.

DOKAZ. Neka je $\omega \in \Omega_{\sigma}(S) \cap \Omega_{\sigma'}(S)$ i $x(\sigma \cap \sigma')y, x, y \in S$. Tada je $x\sigma y$ i $x\sigma' y$ i $(\omega x)\sigma(\omega y), (x\omega)\sigma(y\omega), (\omega x)\sigma'(\omega y)$ i $(x\omega)\sigma'(y\omega)$. Dakle $(\omega x)\sigma \cap \sigma'(\omega y)$ i $(x\omega)\sigma \cap \sigma'(y\omega)$, što znači da je $\omega \in \Omega_{\sigma \cap \sigma'}(S)$. Dakle $\Omega_{\sigma}(S) \cap \Omega_{\sigma'}(S) \subseteq \Omega_{\sigma \cap \sigma'}(S)$.

III.2.9. PROPOZICIJA. Ako su $\sigma, \tau \in \text{Con}(S)$, $\Omega(S)$ - kongruencije na semigrupu S , takve da je $\sigma \subseteq \tau$. Tada je $\tau/\sigma \in \varphi(\Omega(S))$ - kongruencija na semigrupu S/σ .

DOKAZ. Neka je $(x\sigma) \tau/\sigma (y\sigma)$, $x\sigma, y\sigma \in S/\sigma$, $x, y \in S$, i neka je $\omega^* = (\lambda^*, \rho^*) \in \varphi(\Omega(S)) (\subseteq \Omega(S/\sigma))$. Tada je $x\tau y$ i postoji $\omega = (\lambda, \rho) \in \Omega(S)$ takvo da je $(\omega)\varphi = \omega^*$ i pri tome vredi $(\omega x)\tau(\omega y)$ i $(x\omega)\tau(y\omega)$. Odatle je $((\omega x)\sigma)\tau/\sigma((\omega y)\sigma)$ i $((x\omega)\sigma)\tau/\sigma((y\omega)\sigma)$, odnosno $(\omega^*(x\sigma))\tau/\sigma(\omega^*(y\sigma))$ i $((x\sigma)\omega^*)\tau/\sigma((y\sigma)\omega^*)$, što znači da je $\tau/\sigma(\Omega(S))\varphi$ - kongruencija na semigrupu S/σ .

Za semigrupu S i proizvoljno $\omega \in \Omega(S)$, označimo sa $\text{Con}_\omega(S) = \{\sigma \in \text{Con}(S) \mid \sigma \text{ je } \omega\text{-kongruencija}\}$. Specijalno za $\omega = \pi_a \in \Pi(S)$, $a \in S$, ili $\omega = (1, 1)$ - identična bitranslacija, imamo: $\text{Con}_\omega(S) = \text{Con}_{\pi_a}(S) = \text{Con}(S) = \text{Con}_{(1, 1)}(S)$.

III.2.10. TEOREM. Skup $\text{Con}_\omega(S)$, $\omega \in \Omega(S)$ je kompletna podmreža od $\text{Con}(S)$.

DOKAZ. Neka su $\sigma, \sigma' \in \text{Con}_\omega(S)$ i $x(\sigma\sigma')y$, $x, y \in S$, tada postoji $z \in S$, takvo da je $x\sigma z$, $z\sigma'y$ i vredi $(\omega x)\sigma(\omega z)$, $(\omega z)\sigma'(\omega y)$ i $(x\omega)\sigma(z\omega)$, $(z\omega)\sigma'(y\omega)$. Odatle, $(\omega x)\sigma\sigma'(\omega y)$ i $(x\omega)\sigma\sigma'(y\omega)$, tj., $\sigma\sigma' \in \text{Con}_\omega(S)$, što znači da je $\text{Con}_\omega(S)$ pod-semigrupa od $\text{Con}(S)$.

Neka je $x(\sigma \wedge \sigma')y$, tada je $x(\sigma \cap \sigma')y$, tj. $x\sigma y$ i $x\sigma'y$. Odatle je $(\omega x)\sigma(\omega y)$ i $(\omega x)\sigma'(\omega y)$ zatim $(x\omega)\sigma(y\omega)$ i $(x\omega)\sigma'(y\omega)$. Dakle $(\omega x)\sigma \cap \sigma'(\omega y)$ i $(x\omega)\sigma \cap \sigma'(y\omega)$, tj., $(\omega x)(\sigma \wedge \sigma')(\omega y)$ i $(x\omega)(\sigma \wedge \sigma')(y\omega)$, pa je $\sigma \wedge \sigma' \in \text{Con}_\omega(S)$. Neka je $x(\sigma \vee \sigma')y$, tada postoji prirodan broj n , takav da je $x(\sigma \cup \sigma')^n y$, tj., postoje $c_1 = x, c_2, c_3, \dots, c_{n-1}, c_n = y$ iz S , takvi da je $x(\sigma \cup \sigma')c_2, c_2(\sigma \cup \sigma')c_3, \dots, c_{n-1}(\sigma \cup \sigma')y$, odnosno $x\sigma c_2$ ili $x\sigma' c_2, c_2\sigma c_3$ ili $c_2\sigma' c_3, \dots, c_{n-1}\sigma y$ ili $c_{n-1}\sigma' y$. Odatle je:

$(\omega x)\sigma(\omega c_2)$ ili $(\omega x)\sigma'(\omega c_2)$, $(\omega c_2)\sigma(\omega c_3)$ ili $(\omega c_2)\sigma'(\omega c_3)$, ...,
 $(\omega c_{n-1})\sigma(\omega y)$ ili $(\omega c_{n-1})\sigma'(\omega y)$ i analogno
 $(x\omega)\sigma(c_2\omega)$ ili $(x\omega)\sigma'(c_2\omega)$, $(c_2\omega)\sigma(c_3\omega)$ ili $(c_2\omega)\sigma'(c_3\omega)$, ...,
 $(c_{n-1}\omega)\sigma(y\omega)$ ili $(c_{n-1}\omega)\sigma'(y\omega)$, što povlači
 $(\omega x)\sigma \cup \sigma'(\omega c_2)$, $(\omega c_2)\sigma \cup \sigma'(\omega c_3)$, ..., $(\omega c_{n-1})\sigma \cup \sigma'(\omega y)$, i
 $(x\omega)\sigma \cup \sigma'(c_2\omega)$, $(c_2\omega)\sigma \cup \sigma'(c_3\omega)$, ..., $(c_{n-1}\omega)\sigma \cup \sigma'(y\omega)$.
 Odatle je $(\omega x)(\sigma \vee \sigma')(\omega y)$ i $(x\omega)(\sigma \vee \sigma')(y\omega)$, tj.,
 $\sigma \vee \sigma' \in \text{Con}_\omega(S)$. Dakle $\text{Con}_\omega(S)$ je podmreža od $\text{Con}(S)$

Neka je, dalje, A neprazan podskup od $\text{Con}_\omega(S)$ i neka je
 $x(\bigwedge_{\sigma \in A} \sigma)y$, $x, y \in S$. Tada je $x(\bigcap_{\sigma \in A} \sigma)y$, tj., $x\sigma y$ za svako $\sigma \in A$.

Odatle je $(\omega x)\sigma(\omega y)$ i $(x\omega)\sigma(y\omega)$ za svako $\sigma \in A$, tj.,

$(\omega x)(\bigcap_{\sigma \in A} \sigma)(\omega y)$ i $(x\omega)(\bigcap_{\sigma \in A} \sigma)(y\omega)$, odnosno $(\omega x)(\bigwedge_{\sigma \in A} \sigma)(\omega y)$ i

$(y\omega)(\bigwedge_{\sigma \in A} \sigma)(y\omega)$, što znači da $\inf A = \bigwedge_{\sigma \in A} \sigma \in \text{Con}_\omega(S)$. Neka je

$x(\bigvee_{\sigma \in A} \sigma)y$, $x, y \in S$. Tada postoji prirodan broj n i postoje

$x_1, x_2, \dots, x_n \in S$ i postoje $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n+1} \in A$ takve da je

$x\sigma_1 x_1, x_1\sigma_2 x_2, \dots, x_n\sigma_{n+1} y$. Odatle je $(\omega x)\sigma_1(\omega x_1)$,

$(\omega x_1)\sigma_2(\omega x_2)$, ..., $(\omega x_n)\sigma_{n+1}(\omega y)$ i $(x\omega)\sigma_1(x_1\omega)$, $(x_1\omega)\sigma_2(x_2\omega)$,

..., $(x_n\omega)\sigma_{n+1}(y\omega)$, što povlači da je $(\omega x)(\bigvee_{\sigma \in A} \sigma)(\omega y)$ i

$(x\omega)(\bigvee_{\sigma \in A} \sigma)(y\omega)$, tj., $\sup A = \bigvee_{\sigma \in A} \sigma \in \text{Con}_\omega(S)$. Dakle $\text{Con}_\omega(S)$ je

kompletna podmreža od $\text{Con}(S)$.

Kongruencija σ na semigrupu S naziva se grupna kongruen-
 cija ako je S/σ grupa. Budući, da se svaka grupa karakteriše
 se kao inverzna semigrupa koja ima samo jedan idempotent, onda
 grupna kongruencija inverzne semigrupe se karakteriše na sle-
 deći način: kongruencija σ inverzne semigrupe S je grupna

kongruencija ako i samo ako za svako $e, f \in E(S)$ ($E(S)$ - polumreža idempotenata iz S) vredi $e\sigma f$, tj. $E(S)$ sadržano je u neku σ - klasu.

III.2.11. PROPOZICIJA. Neka je σ grupna $\Omega(S)$ - kongruencija inverzne semigrupe S . Tada je $\bar{\sigma} = \varphi \circ \varphi^{-1}$ grupna kongruencija na $\Omega(S)$, gde je φ homomorfizam iz Teoreme 2.10.

DOKAZ. Prema Posledicu 2.5, φ je homomorfizam iz $\Omega(S)$ u $\Omega(S/\sigma)$. Jasno, da je $\bar{\sigma} = \ker \varphi = \varphi \circ \varphi^{-1}$ kongruencija na $\Omega(S)$. Takođe, jasno da je $\Omega(S)$ inverzna semigrupa jer je S inverzna. Za dokaz propozicije, dovoljno je dokazati da bilo koja dva idempotenta iz $\Omega(S)$ su u relaciji $\bar{\sigma}$ tj., svi idempotenti iz $\Omega(S)$ leže u jednoj $\bar{\sigma}$ - klasu.

Neka su ω, ω' idempotenti iz $\Omega(S)$. Tada za svako $x \in S$, $\omega(xx^{-1}), \omega'(xx^{-1}), (x^{-1}x)\omega$ i $(x^{-1}x)\omega'$ su idempotenti iz S . Odatle $[\omega(xx^{-1})]_{\sigma}, [\omega'(xx^{-1})]_{\sigma}, [(x^{-1}x)\omega]_{\sigma}$ i $[(x^{-1}x)\omega']_{\sigma}$ su idempotenti iz S/σ i jednaki su medjusobom jer je σ - grupna kongruencija.

Dalje, za svako $x\sigma \in S/\sigma$ imamo:

$$\begin{aligned} (\omega\varphi)(x\sigma) &= \omega^*(x\sigma) = (\omega x)\sigma = [\omega(xx^{-1}x)]_{\sigma} = [\omega(xx^{-1})x]_{\sigma} = \\ &= [\omega(xx^{-1})]_{\sigma} \cdot (x\sigma) = [\omega'(xx^{-1})]_{\sigma} \cdot (x\sigma) = [(\omega'(xx^{-1}))x]_{\sigma} = \\ &= [\omega'(xx^{-1}x)]_{\sigma} = (\omega'x)\sigma = \omega'^*(x\sigma) = (\omega'\varphi)(x\sigma), \end{aligned}$$

analogno je $(x\sigma)(\omega\varphi) = (x\sigma)(\omega'\varphi)$, pa je $\omega\varphi = \omega'\varphi$, tj., $\omega\bar{\sigma}\omega$:

Dakle, $\bar{\sigma} = \varphi\bar{\sigma}\varphi^{-1}$ je grupna kongruencija na $\Omega(S)$.

III.3. POTAPANJE TRANSLATORNOG OMOTAČA SEMIGRUPE U GRUPU

U I.7 Lema 7.1 pokazuje da za ma koju podsemigrupu T neke grupe G , ulaganje $T \rightarrow G$ je gust monomorfizam.

III.3.1, LEMA. Ako je T podsemigrupa grupe G i S idealizator podsemigrupe T u G , tada je $\Omega(S) = \Pi(S)$ i $\Omega(T)$ se izomorfno potapa u grupi G .

DOKAZ. Budući da je G grupa to je $\Omega(G) = \Pi(G) \cong G$. Neka je $S = \{g \mid g \in G, gt, tg \in T \text{ za svako } t \in T\}$ idealizator podsemigrupe T u grupi G . Budući da je $lt = tl = t \in T$ za svako $t \in T$, sledi da jedinični element 1 grupe G pripada idealizatoru S . Odatle je $\Omega(S) = \Pi(S) \cong S$.

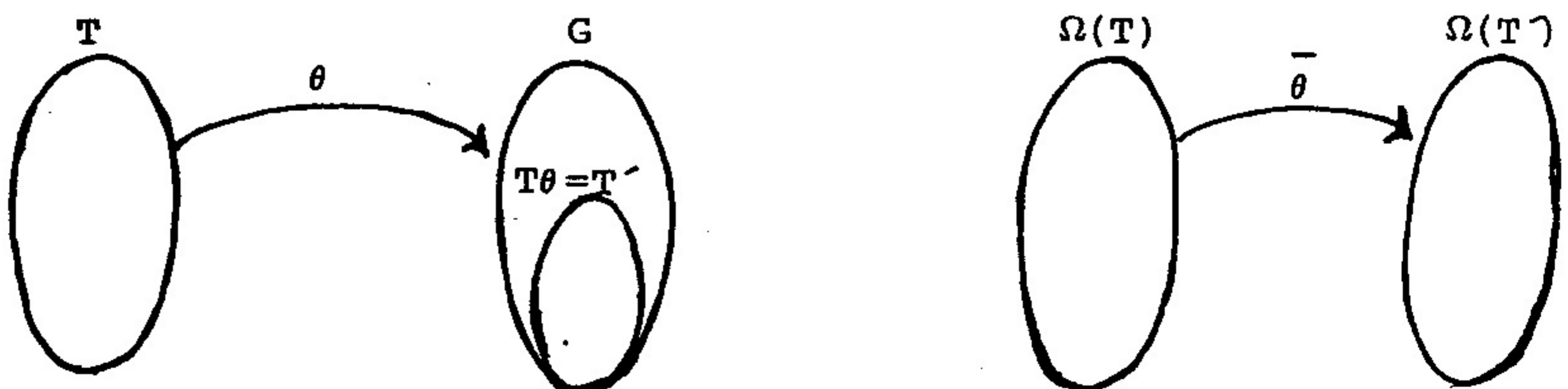
Za proizvoljno $\pi_s = (\lambda_s, \rho_s) \in \Pi(S)$, $s \in S$ i svako $t \in T$ imamo:

$$\begin{aligned} \lambda_s t &= st \in T & \text{i} & \quad t \rho_s = ts \in T, \text{ pa je} \\ \lambda_s T &\subseteq T & \text{i} & \quad T \rho_s \subseteq T. \end{aligned}$$

Preslikavanje $\theta : \pi^S \rightarrow \pi_s, \pi^S \in \Omega(T), \pi_s \in \Pi(S) (\pi_s|_T = \pi^S)$ je monomorfizam iz $\Omega(T)$ u $\Pi(S) (= \Omega(S))$. Dakle $\Omega(T)$ se izomorfno potapa u grupu G (jer $\Pi(S) \cong S$ i S je podsemigrupa grupe G).

III.3.2. TEOREM. Ako je semigrupa T monomorfno uložena u neku grupu, tada je i $\Omega(T)$ monomorfno uložena u tu grupu.

DOKAZ.



Neka je θ monomorfizam semigrupe T u neku grupu G . Tada $T\theta = T'$ je podsemigrupa grupe G i pri tome je $T \cong T'$.

Za svako $(\lambda, \rho) \in \Omega(T)$ definiše se $\bar{\lambda}$ i $\bar{\rho}$ sa:

$$\bar{\lambda}t' = (\lambda(t'\theta^{-1}))\theta \quad \text{i} \quad t'\bar{\rho} = ((t'\theta^{-1})\rho)\theta, \quad t' \in T'.$$

Tada, prema Teoremi I.6.13, preslikavanje

$$\bar{\theta} : (\lambda, \rho) \rightarrow (\bar{\lambda}, \bar{\rho}), \quad (\lambda, \rho) \in \Omega(T)$$

je izomorfizam iz $\Omega(T)$ na $\Omega(T')$. Prema Lemi 3.1. $\Omega(T')$ se izomorfno ulaže (potapa) u grupu G .

III.3.3. LEMA. Ako je T slabo reduktivna podsemigrupa u odnosu na semigrupu G , tada je ulaganje $T \rightarrow G$ gust monomorfizam.

DOKAZ. Neka je i ulaganje semigrupe T u semigrupu G . Tada je $Ti = T$ slabo reduktivna podsemigrupa u odnosu na G . Neka je $S = \{g \mid g \in G, gt, tg \in T\}$ idealizator semigrupe T u semigrupi G i σ bilo koja kongruencija na S takva da je T -kongruencija.

Iz $s_1 \sigma s_2$, $s_1, s_2 \in S$ sledi

$$s_1t \sigma s_2t \quad \text{i} \quad ts_1 \sigma ts_2 \quad \text{za svako} \quad t \in T.$$

Budući da su $s_1t, s_2t, ts_1, ts_2 \in T$ i σ je T -kongruencija, to je $s_1t = s_2t$ i $ts_1 = ts_2$ za svako $t \in T$. Odatle, sobzirom da je T slabo reduktivna u odnosu na G , dobijamo $s_1 = s_2$, pa je σ relacija jednakosti na S . Dakle S je gusto idealno proširenje od T .

Kako je S idealizator, to je ona maksimalno gusto proširenje, pa je $Ti = T$ gust monomorfan ideal od S . Odatle ulaganje $i : T \rightarrow G$ je gust monomorfizam.

Iz Teoreme I.6.4 sledi, da za klasu slabo reduktivnih semigrupa, translatorni omotač $\Omega(S)$ je idealizator za $\Pi(S)$ u

semigrupu $\Lambda(S) \times P(S)$. Sledeće, tvrdjenje pokazuje da kanonični homomorfizam $\pi : S \rightarrow \Omega(S)$ je gust monomorfizam za klasu slabo reduktivnih semigrupa.

III.3.4. LEMA. Ako je S slabo reduktivna semigrupa, tada kanonični homomorfizam $\pi : S \rightarrow \Omega(S)$ je gust monomorfizam.

DOKAZ. Jasno je, da $\Pi(S)$ je ideal u $\Omega(S)$. Budući, da je S slabo reduktivna, prema Teoremi I.6.4, $\Omega(S)$ je idealizator za $\Pi(S)$ u semigrupu $\Lambda(S) \times P(S)$. Zbog, toga dovoljno je dokazati da je $\Omega(S)$ gusto idealno proširenje za $\Pi(S)$.

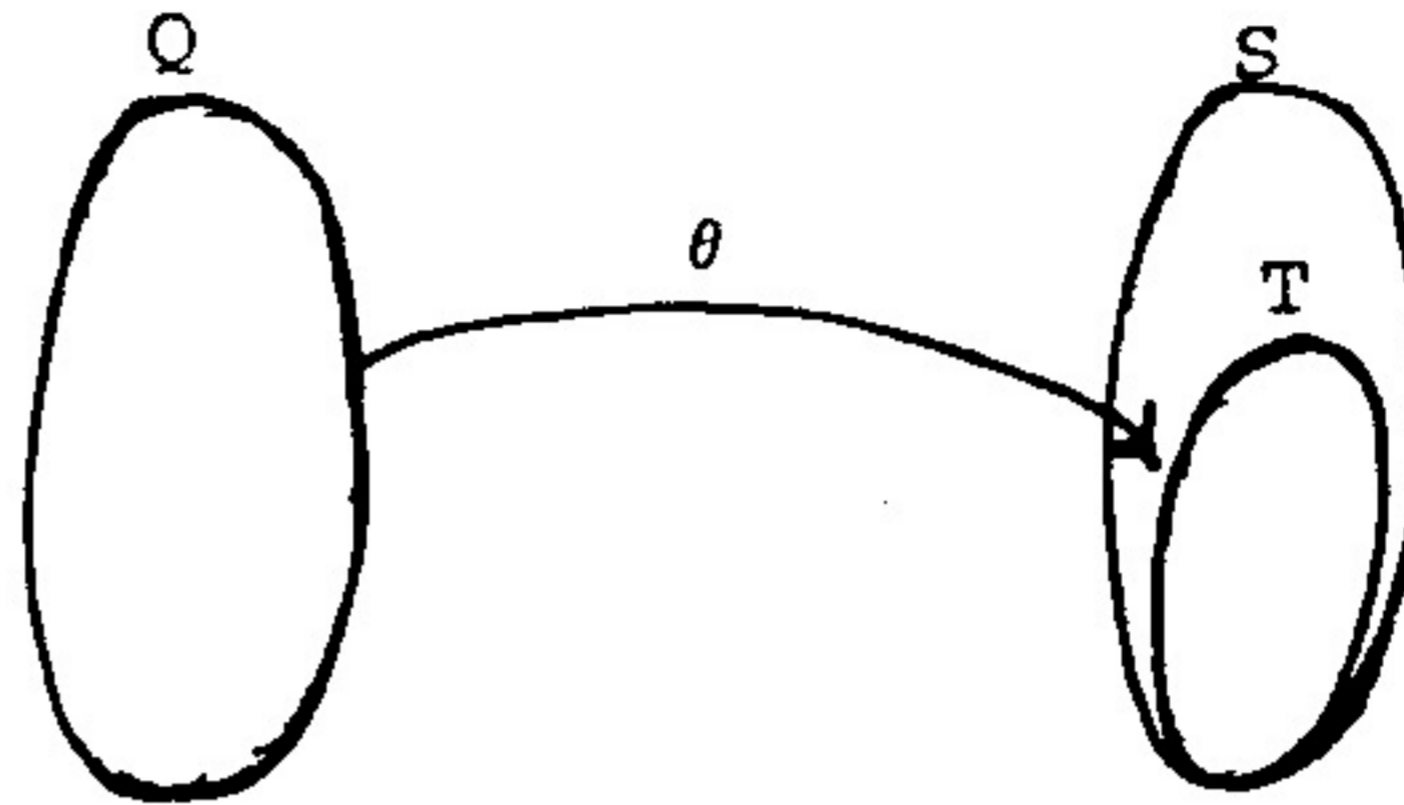
Neka je σ kongruencija semigrupe $\Omega(S)$, takvo da je ono identitet na $\Pi(S)$. Neka je $\omega \sigma \omega'$, $\omega = (\lambda, \rho)$, $\omega' = (\lambda', \rho') \in \Omega(S)$. Tada je $(\pi_s \omega) \sigma (\pi_s \omega')$ i $(\omega \pi_s) \sigma (\omega' \pi_s)$, za svako $\pi_s \in \Pi(S)$, $s \in S$. Odatle je $\pi_s \omega \sigma \pi_s \omega'$ i $\pi_s \omega \sigma \pi_s \omega'$. Budući da je σ identitet na $\Pi(S)$, to je $\pi_s \omega = \pi_s \omega'$ i $\pi_s \omega = \pi_s \omega'$. Dalje, budući, da je S slabo reduktivna semigrupa imamo $s\omega = s\omega'$ i $\omega s = \omega' s$, za svako $s \in S$, to $\omega = \omega'$, pa je $\sigma = 1$, identitet. Dakle, jedina identična kongruencija semigrupe $\Omega(S)$ je $\Pi(S)$ - kongruencija, pa je $\Omega(S)$ gusto idealno proširenje za $\Pi(S)$.

Tvrđenje Teoreme 3.2, u opštem slučaju se može formulirati kao sledeći problem: Ako neka semigrupa je monomorfno uložena u neku semigrupu jedne određene klase semigrupa, da li je to ulaganje moguće i za odgovarajući translatorni omotač?

U specijalnom slučaju npr. prethodni problem je formulirao Petrich ([8], V.3.11 Problem): Ako semigrupa S je monomorfno uložena u neku inverznu semigrupu, da li je moguće i $\Omega(S)$ također monomorfno ulagati u neku inverznu semigrupu?

Traganjem za rešenje problema Petricha, mi dalje navest ćemo neke činjenice koje idu u prilog tog rešenja.

Neka je θ monomorfno ulaganje semigrupe Q u invernu semigrupu S . Označimo sa $T = Q\theta$ sliku semigrupe Q u S .

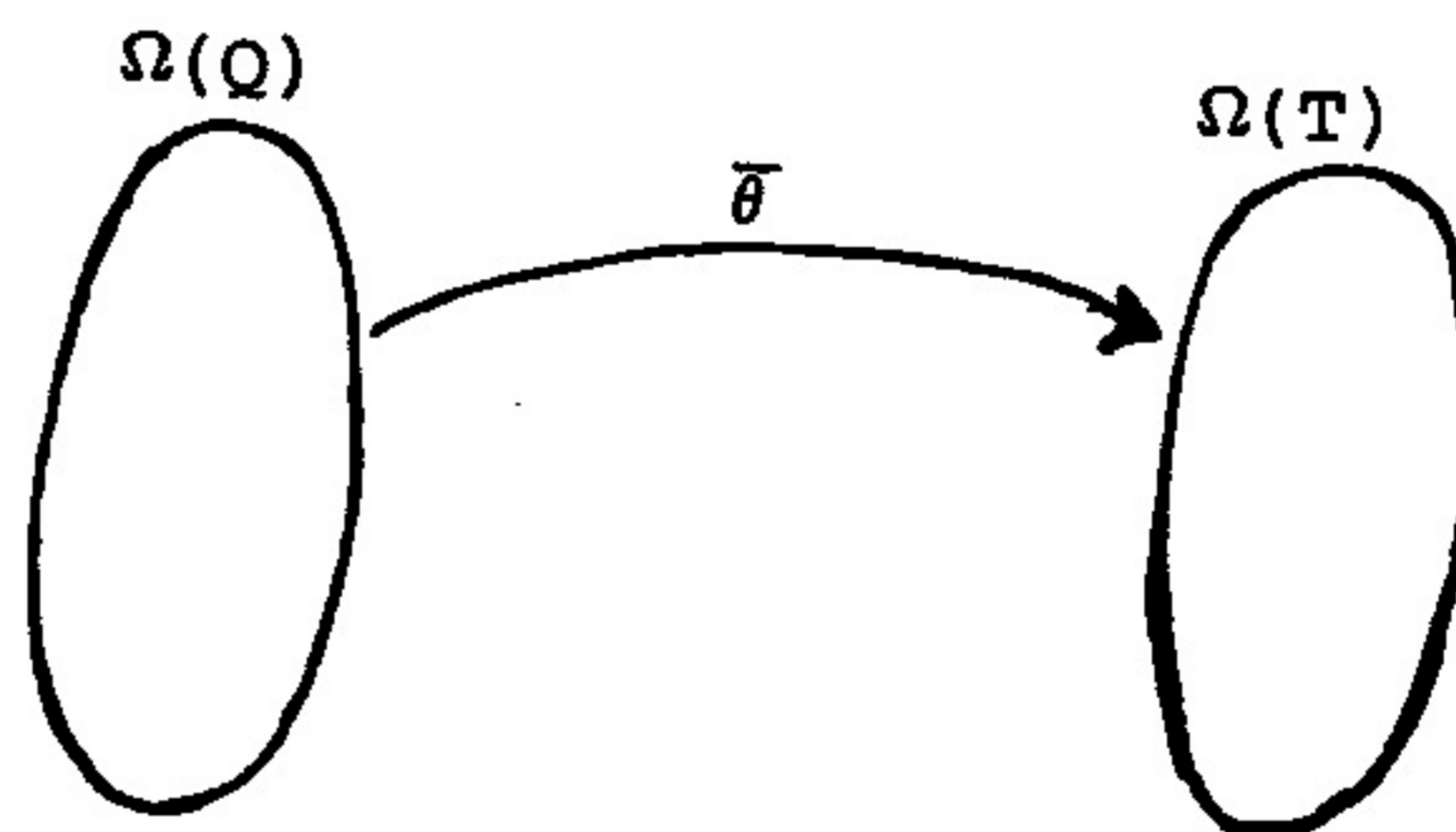


Tada prema Teoremi I.6.13 preslikavanje $\bar{\theta}$, definisano sa

$$\bar{\theta} : (\lambda, \rho) \rightarrow (\bar{\lambda}, \bar{\rho}) \quad ((\lambda, \rho) \in \Omega(Q)),$$

$$\bar{\lambda}t = (\lambda(t\theta^{-1}))\theta, \quad t\bar{\rho} = ((t\theta^{-1})\rho)\theta$$

je izomorfizam iz $\Omega(Q)$ na $\Omega(T)$.



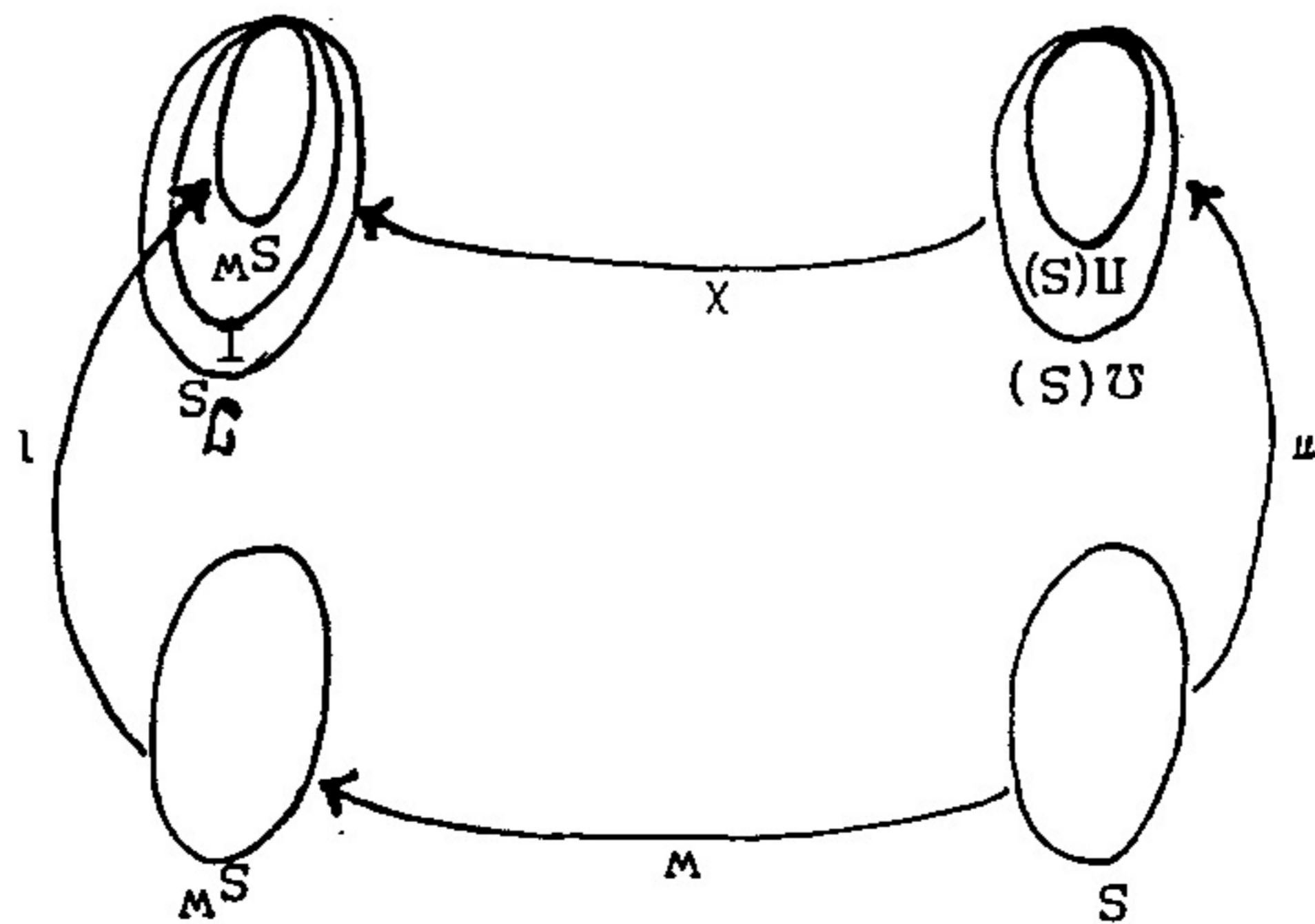
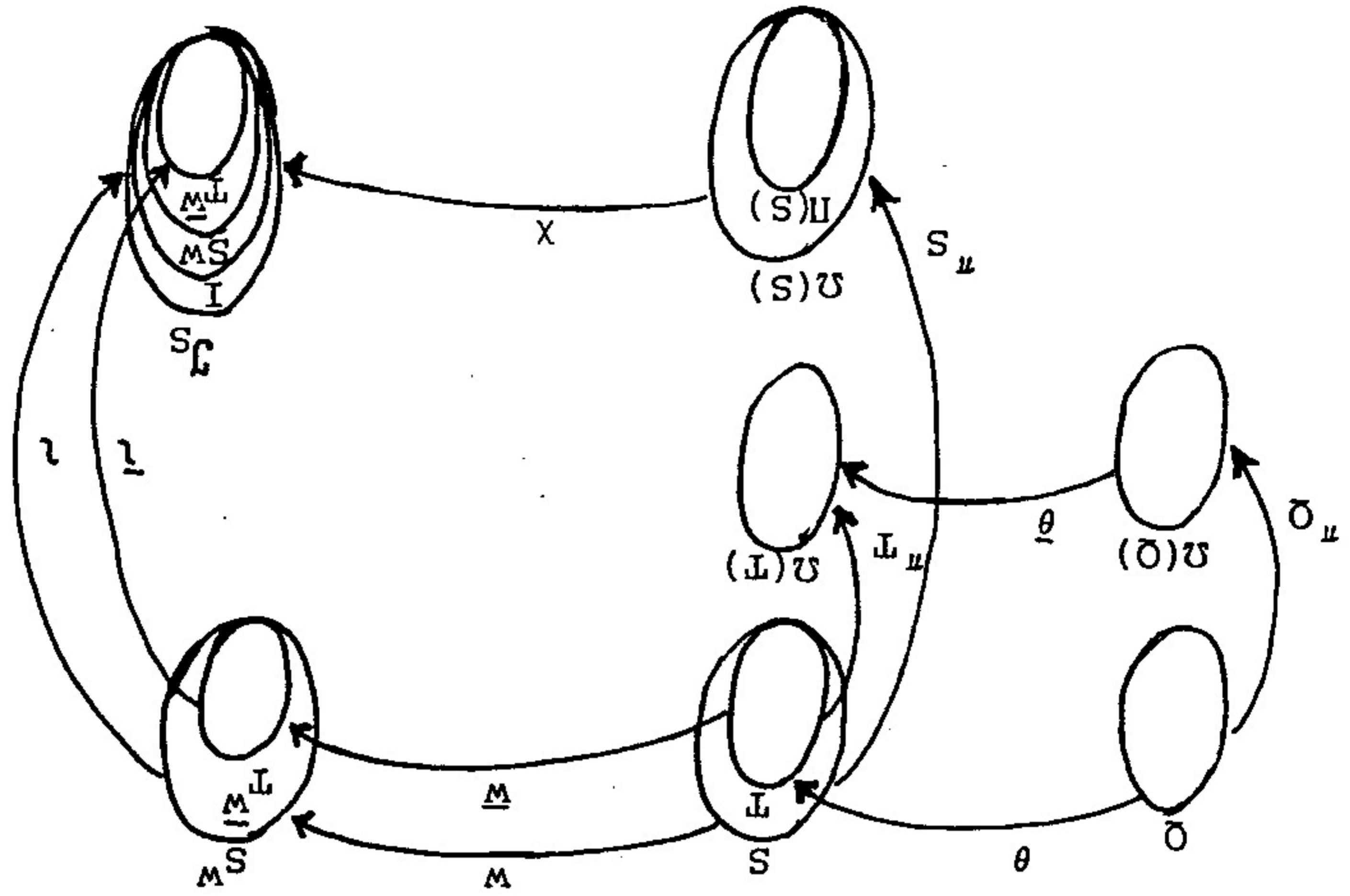
Dalje, prema ([8, Teorem V.1.3]) preslikavanje χ definisano sa

$$\chi : (\lambda, \rho) \rightarrow \rho|_{A_\rho} \quad ((\lambda, \rho) \in \Omega(S), A_\rho = \{s \in S \mid sR(s\rho)\})$$

je izomorfizam iz $\Omega(S)$ na idealizator I iz S^W u \mathcal{I}_S isledeći dijagram komutira:

S^W je slika Wagnerove reprezentacije $w : S \rightarrow \mathcal{J}_S^S$, $w : a \rightarrow w^a$ gde $w^a : x \rightarrow xa$ za svako $a \in S$, $x \in \text{dom } w^a = \text{Sa}^{-1}$. Jasnno da w je monomorfizam, pa je $S \cong S^W$. Budući, da je S inverzna, to je S^W inverzna podsemigrupa od \mathcal{J}_S^S , i idealizator S^W u \mathcal{J}_S^S tj $I = \mathcal{H}_S(S^W) = \{ \alpha \in \mathcal{J}_S^S \mid \alpha w^a, w^a \in S^W, \text{ za svako } w^a \in S^W, a \in S \}$ je izomorfno sa $\Omega(S)$.

Posmatramo sada sledeći dijagram



Označimo sa \bar{w} restrikciju w na T tj. $\bar{w} = w|_T$. Tada je $T^{\bar{w}}$ podsemigrupa od S^w (odnosno podsemigrupa od \mathcal{J}_S), i pri tome je $Q \cong T \cong T^{\bar{w}}$ i \bar{i} ulaganje $T^{\bar{w}}$ u \mathcal{J}_S . Neka je $\bar{I} = i_{\mathcal{J}_S}(T^{\bar{w}})$ -idealizator za $T^{\bar{w}}$ u \mathcal{J}_S .

Treba videti da li je $\Omega(T)$ izomorfno sa \bar{I} , odnosno treba definisati neko preslikavanje h iz $\Omega(T)$ u \mathcal{J}_S tako da h bude izomorfizam iz $\Omega(T)$ na \bar{I} . Jasno, da u ovom slučaju ne može se primeniti [8 Teorem V.1.3] jer, T ne mora biti inverzna podsemigrupa od S .

L I T E R A T U R A

- [1] Ault J.E., The translational hull of an inverse semigroup, Glasgow Math. J. 14(1973), 56-64.
- [2] Clifford A.N. and Preston G.B., The Algebraic Theory of Semigroups, Math. Surveys of the American Math. Soc.7, R.I., Vol.I, 1961, Vol.II, 1967.
- [3] Fontain J. and Lawson M., The translational hull of an adequate semigroupe, Semigroup Forum, Vol.32,1, (1985) 79-86.
- [4] Howie J.M., An introduction to semigroup theory, London, 1976.
- [5] Hildebrant J.A., The translational degree of a semigroup, Semigroup Forum, Vol.30 (1984) 331-349.
- [6] Krgović D., Prilog teoriji regularnih semigrupa, Doktorska disertacija, PMF, Beograd, 1982.
- [7] ЛЯШИН Е.С., Полугруппы, Москва, Физматгиз 1960.
- [8] Petrich M., Inverse semigroups, John Willei, New York, 1984.
- [9] Petrich M., Structure of regular semigroups, Montepeller, 11, 1977.
- [10] Petrich M., Introduction to semigroups, Columbus, Ohio, 1973.
- [11] Petrich M., The translational hull in semigroups and rings, Semigroup Forum, Vol.1,4(1970) 283-360.
- [12] Petrich M., The centroid of a semigroup, Acta.Sci. Math. 35 (1973) 135:154.
- [13] Petrich M., Translational hull and semigroups of binary relations, Glasgow, Math. J. 9(1968) 12-21.
- [14] Petrich M., The translational hull of a completely o-simple semigroup, Glasgow, Math. J. 9(1968) 1-11.

- [15] Ponizovskii J.S., On representations of inverse semigroups, by partial one-to-one transformations, *Izv. Akad. Nauk SSSR* 28(1964) 989-1002 (Russian).
- [16] Ponizovskii J.S., A remark on inverse semigroup, *Uspehi Mat. Nauk*, 126, 20(1965) 147-148.
- [17] Понизовский И.С. Некоторые эквивалентности, связанных с транзитивными представлениями полугрупп *Сибир. Мат. ж.* Том. XIV, N=1, (1973) 178-184.
- [18] Schein B.M., Completions, translational hull and ideal extensions of inverse semigroups, *Czechosl. Math. J.* 23(1973) 575-610.
- [19] Shkodra S., The center of translational hull and the hull of center of semigroup, *Math. Ves. Beograd* (to appear).
- [20] Shkodra S., Congruences and translational hulls semigroups, *Proceedings of 7th Conference Algebra and Logics, Maribor* (to appear).
- [21] Shkodra S., On transitive representations of finite inverse semigroups, *Colloquium on semigroups, 24-28 August (1987), Szeged*.
- [22] Szász G., Die translationen halbverbande, *Acta. Sci. Math. Szeged*, 17(1956).
- [23] Szász G. and Szendrei J., Über die translationen der halbverbände, *Acta. Sci. Math. Szeged*, 18(1957) 44-47.

S A M M A R Y

The properties of a semigroup, which has some influence on its translational hull is a problem which is still unsolved in the present studies of the semigroup theories. Thus possibilities and conditions have specially been studied under which one semigroup and its translational hull belong or do not belong to the same class of the semigroups. By a counterexample has been proved that the band and its translational hull do not always belong to the band; then if the semigroup is the union of the groups, its translational hull should not be the union of the groups. By characterizing the center $C(\Omega(S))$ of the translational hull of the semigroup S , of one class of the semigroup which satisfies the condition that $S = SC(S)$ it is proved the sufficient condition of the proved the sufficient condition of the isomorphism $C(\Omega(S))$ on $\Omega(C(S))$. For the class of the finite inverse semigroups it counts that each semigroup of that class is isomorphic immersion into the adequate translational hull of its weakly reductive ideal. It has also been proved that the set of all ω - congruences of a semigroup is a complete sub lattice of the congruences lattice of that semigroup.

R E Z I M E

Në teorinë e semigrupeve, si problem joplotësisht i zgjidhur është problemi i ndikimit të vetive të një semigrupi në mbështjellsin e tij. Në këtë kontekst, ky disertacion studion mundsit dhe kushtet nën të cilat një semigrup dhe mbështjellsia e tij bëjnë ose nuk bëjnë pjesë në të njëjtën klasë të semigrupeve. Është konstruktuar një kundërshebull nga cili shifet se rrjeta dhe mbështjellsia e saj nuk i takojnë gjithë të njëjtës klasë semigrupesh; pastaj nëqoftëse semigrupi mund të paraqitet si union i grupeve nuk është e thënë që edhe mbështjellsia e tij të paraqitet si union i grupeve. Duke karakterizuar qendrën $C(\Omega(S))$ e mbështjellsit të semigrupit S , të një klase semigrupesh që e plotësojnë kushtin të vlej $S = SC(S)$ është vërtetuar kushti i mjaftueshëm i izomorfizmit të $C(\Omega(S))$ mbi $\Omega(C(S))$. Për klasën e semigrupeve inverze të fundme vërtetohet se çdo semigrup i asaj klase izomorfisht zhytet në mbështjellsin e idealit të dobët reduktiv të tij. Është vërtetuar gjithashtu se bashkësia e të gjitha ω -kongruencave të një semigrupi është nënrrjetë e plotë e rrjetës së kongruencave të atij semigrupi.

Univerzitet u Beograd
 Prirodno-matematički fakulteti
 MATEMATIČKI FAKULTET
 BIBLIOTEKA

Broj _____ Datum _____

B I O G R A F I J A

Rođen sam 1. VI. 1944. god. u Desivojci, S. O. Kosovska Kamenica. Osnovnu školu završio sam u svom rodnom mestu. Srednju učiteljsku školu završio sam 1964. god. u Gnjilane. Godine 1968 završio sam Prirodno matematički fakultet u Prištini. Nakon, otsluženja vojnog roka 1970. god., počeo sam da radim na Tehnički fakultet u Prištini kao asistent za predmet matematika. Godine 1977, branio sam magistarski rad sa temom "Grupa razreda divizora Krulova prstena" na PMF Sveučilišta u Zagrebu.

Godine 1978 izabran sam na zvanje predavača za predmet matematika I i II na Tehničkom fakultetu u Prištini, i na tom radnom mestu i zvanju nalazim se i danas samo sad pri Mašinskom fakultetu u Prištini.

Za vreme svog rada na Tehničkom fakultetu učestvovao sam na raznim Kongresima i simpozijumima za matematiku koji su bili organizovani u Jugoslaviji i van nje. Posebno ću istaći moje učestvovanje na međunarodnom simpozijumu za semigrupe održanom avgusta 1987. godine u Segedu - Madarska sa naučnim radom "On transitive representations of finite inverse semigroups" koji je prihvaćen kao dobar rezultat u teoriji semigrupa. U zemlji - Jugoslaviji vredi istaći moje učestvovanje na Konferenciji "Algebra i logika" održanom u Mariboru 1989. godine sa naučnim radom "Congruences and translational hulls of semigroups" koji je prihvaćen, recenziran i izdat kao članak na Znanstvenoj Reviji, Maribor 1990. god.

U cilju moje naučne usavršavanja na teoriji semigrupa od 30 septembra 1985 do 30 februara 1986 godine boravio sam

u SSSR u Leningradu na PMF, gde sam saradjivao najviše sa J. S. Ponizovskim.

Moj pedagoški rad na Tehničkom fakultetu osim održavanja vežbe i predavanja iz matematike se ističe i time da sam bio recenzent desetak udžbenika matematike osnovnih škola i desetak udžbenika matematike srednjih škola. Treba istaći tu da sam bio i recenzent Univerzitetskog udžbenika za matematiku I i II sa studente Tehničkog fakulteta u Prištini. Godine 1987. izdao sam "Zbirka zadataka matematike III" za studente Tehničkog fakulteta, kao universitetski udžbenik.

Na fakultetu gde sam radio, aktivno sam učestvovao na skoro svim samoupravnim organima fakulteta.