О АНАЛИТИЧКИМ ОБЛИЦИМА МУЛТИФОРМНИХ ФУНКЦИЈА

ТЕЗА

РАДИВОЈА КАШАНИНА

ПРИМЉЕНА ЗА ДОКТОРСКИ ИСПИТ
НА СЕДНИЦИ ФИЛОЗОФСКОГ ФАКУЛТЕТА УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ 9 МАЈА 1924
ПРЕМА РЕФЕРАТУ ЧЛАНОВА ИСПИТНОГ ОДБОРА Г. Г.
Д-РА МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА РЕД. ПРОФ. УНИВЕРЗИТЕТА И Д-РА АНТОНА
БИЛИМОВИЋА РЕД. КОНТР. ПРОФ. УНИВЕРЗИТЕТА.

БЕОГРАД-ЗЕМУН
Графички Завод „Макарије" А. Д.
1925.

[illegible]

ГОСПОДИНУ

БОГДАНУ ГАВРИЛОВИЋУ

ЗАХВАЛАН

Р. КАШАНИН

О АНАЛИТИЧКИМ ОБЛИЦИМА МУЛТИФОРМНИХ ФУНКЦИЈА

ОД РАДИВОЈА КАШАНИНА

(Примљено на скупу Академије Природних Наука 22. VI. 1925).

УВОД

I.

Нека буде тачка x_0 изолована критичка тачка функције $y = f(x)$. Око x_0 опишимо једноставну затворену криву линију, тако да x_0 буде једина критичка тачка у унутрашњости те линије и на њој. Пратимо ли функцију $f(x)$ по овој затвореној кривој линији почевши од неке тачке x, функција $f(x)$ неће се вратити у x са истом вредношћу y_0 са којом је пошла, него са неком вредношћу y_1. Кад је, при наведеним условима, функција $f(x)$ позната, y_1 је одређено (аналитичко продужење).

Ми ћемо поставити обрнут проблем: позната је веза између y_0 и y_1, треба одредити $f(x)$. Прецизно речено, наш проблем је ово:

Дата је униформна функција $y_1 = \varphi(x, y_0)$ две промењиве x и y_0; треба одредити функцију $f(x)$ ове особине: 1) функција $f(x)$ је аналитичка функција у околини тачке x_0; 2) тачка x_0 је изолована критичка тачка функције $f(x)$; 3) кад се прати функција $f(x)$ ма од које тачке x по затвореној кривој линији која обухвата тачку x_0 и више ниједну критичку тачку, а пође од вредности y_0 те функције, доћи ће се у тачку x са вредношћу $y_1 = \varphi(x, y_0)$.

Ма да је проблем овако постављен врло генералан, он се може још генералисати. Може се, на пример, узети да је функција $\varphi(x, y_0)$ мултиформна. Могло би се узети, даље, да је веза између y_1 и y_0 дата помоћу извода: $y_1 = \varphi(x, y_0, y_0', \ldots)$. И т. д.

II.

Претпоставимо да егзистира функција $y = f(x)$ која решава напред постављени проблем; тада ће инверсна функција $F(y) = x$ очевидно имати особину $F[\varphi(x, y)] = F(y)$. Оваквим функцијама су се специјално бавили, претпоставивши да $\varphi(x, y)$ зависи само од y а не и од x, P. Appell[1] и O. Rausenberger[2]. Наш проблем, дакле, могао би се решавати инверзијом функција које одговарају једначини $F[\varphi(x,y)] = F(y)$. Принципиелно, не би се против такве методе имало шта рећи, но практично је она незгодна: инверзија функције врло се тешко изводи, а специјално код функција које су формиране на основи врло генералних услова она је могућа само теоријски, а не и тако да се види аналитички облик инверсне функције.

Ради тога, ми ћемо узети другу методу. Но, како је постављени проблем и сувише генералан, а његово третирање обимно, ми ћемо се у овом раду ограничити на један специјалан случај, но још доста генералан: ми ћемо, наиме, учинити о функцији $\varphi(x,y_0)$ извесне претпоставке. Те претпоставке су ове:

1. Пођемо ли и по други пут од тачке x у кругу око x_0, y_0 и y_1 мењаће се по кругу од тачке до тачке, и кад се вратимо у почетну тачку x, прећи ће y_0 у y_1, y_1 у y_2, а функција φ, пошто је по претпоставци униформна, остаће непромењена; имаћемо, дакле, $y_2 = \varphi(x,y_1)$. Уопште ће бити $y_n = \varphi(x,y_{n-1})$. Функција $\varphi(x,y_0)$ зависиће поред x и y_0 још и од неких констаната a_1, b_1, ... Прва наша претпоставка биће: функција $\varphi(x,y_{n-1})$ има исти облик по x и y_0 као и $\varphi(x,y_0)$, само са другим константама $a_n, b_n, \ldots$, а ових констаната које се мењају има коначан број, т. ј. $y_n = \varphi(x, y_0, a_n, b_n, \ldots)$.

2. Друга наша претпоставка биће ово: функција две промењиве $\varphi(x,y_0)$ може се толико пута диференцирати делимично по x и y_0 колико нам то у појединим извођењу буде потребно.

Узмемо ли, на основу претпоставке под 1), константе које се мењају при прорачунавању $y_1, y_2, \ldots, y_n$, као параметре, можемо начинити трансформацију

$$X = x, \qquad Y = \varphi(x, y, a, b, \ldots),$$

која, узевши у обзир претпоставку под 1) и дефиницију и особине група, има ове особине: прво, ако се параметри $a, b \ldots$ непрекидно (континуално) мењају, ова трансформација чини непрекидну групу; друго, ако параметрима $a, b \ldots$ дамо вредности $a_n, b_n, \ldots$, а промењивој y вредност y_0, Y ће бити y_n.

За групу

$$X = x, \qquad Y = \varphi(x, y, a, b, \ldots)$$

[1] C. R. de l'Ac. d. Sc. 1879. T. I. — Acta Mathem. T. 15 (1891).

[2] Mathem. Ann. T. 18 (1881), 19 (1882), 20 (1883).

рећи ћемо да даје *генерални закон мултиформности* тражене функције у околини тачке x_0, а релацију $y_1 = \varphi(x, y_0)$ зваћемо *специјалним законом мултиформности* у околини тачке x_0.

III.

Колико нам је познато, досад су се у математичкој литератури расправљали само некоји најелементарнији специјални случајеви овога проблема. Они се јављају код проучавања линеарних диференцијалних једначина, постали су већ класични и ушли и у уџбенике.

Мислимо, међутим, да није без интереса забавити се овим проблемом, остајући у већој генералности. Он је интересантан сам по себи, — то је, у неку руку, обрнут проблем проблему аналитичког продужења, и друго, спада у проблеме формирања функција које испуњавају извесне врло генералне услове (Weierstrass, Mittag-Leffler), — а интересантан је и због својих примена.

Иницијативу за овај рад дао ми је професор математике Београдског Универзитета Г. Михајло Петровић, који је и иначе, док сам проблем разрађивао, показивао живо интересовање за њега. Сматрам за своју дужност да му за то и овом приликом заблагодарим.

§ I. — Типови закона мултиформности.

1. — Пошто смо у Уводу, претпоставкама о функцији $\varphi(x, y_0)$, прецизирали и ограничили наш проблем, ми ћемо се прво, у овом параграфу, забавити самим законом мултиформности. Видели смо да сваком нашем проблему одговара једна група коначних непрекидних трансформација

$$X = x \quad , \quad Y = \varphi(x, y; a, b, \ldots) \qquad (1)$$

То нас наводи да закон мултиформности расматрамо са гледишта Теорије Група.

S. Lie је доказао да трансформације облика (1) могу зависити највише од три независна параметра и да је група (1), према броју тих својих независних параметара слична са једном од група:

$$\left.\begin{array}{ll} X = x, & Z = z + \alpha; \\ X = x, & Z = \alpha z + \beta; \\ X = x, & Z = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + 1}; \end{array}\right\} \qquad (2)$$

где је z функција од x и y, Z функција од X и Y, а нови параметри α, β, γ функције старих параметара a, b, c. Специјални закон мултиформности $y_1 = \varphi(x, y_0)$ моћи ће се онда свести на један од ова три облика

$$\psi(x, y_1) = \psi(x, y_0) + \alpha_1, \tag{I}$$

$$\psi(x, y_1) = \alpha_1 \psi(x, y_0) + \beta_1, \tag{II}$$

$$\psi(x, y_1) = \frac{\alpha_1 \psi(x, y_0) + \beta_1}{\gamma_1 \psi(x, y_0) + 1}, \tag{III}$$

где су α_1, β_1, γ_1 функције од a_1, b_1, c_1.

Кад је специјални закон мултиформности дат у облицима (I), (II), (III), потребна је једна примедба. Ради тога што је $\varphi(x, y_0, a_1, b_1, \ldots)$ униформна функција од x и y_0, ми смо могли добити $y_n = \varphi(x, y_0, a_n, b_n, \ldots)$. Но, ако је φ униформна функција, не мора то бити и ψ. Обишавши, дакле, око x_0, ми ћемо из $\psi(x, y_1) = \psi(x, y_0) + \alpha_1$ добити $\psi(x, y_2) = \psi(x, y_1) + \alpha_1 = \psi(x, y_0) + 2\alpha_1$, ако је $\psi(x, y_0)$ униформна функција од x и y_0. Иначе ће из $\psi(x, y_1) = \psi(x, y_0) + \alpha_1$ бити $\psi_1(x, y_2) = \psi_1(x, y_1) + \alpha_1$, те ће бити потребно још испитати у каквој су вези ψ_1 и ψ.

У будуће ћемо свугде, краткоће ради, писати z_n место $\psi(x, y_n)$.

2. — Трансформација $Z = \alpha z + \beta$ може се писати и у другом облику. Имамо, наиме,

$$Z - \frac{\beta}{1-\alpha} = \alpha z - \frac{\beta}{1-\alpha} + \beta$$

$$= \alpha\left(z - \frac{\beta}{1-\alpha}\right).$$

Ставимо ли $\frac{\beta}{1-\alpha} = \zeta$, биће

$$Z - \zeta = \alpha(z - \zeta)$$

Лако је видети значење новог параметра ζ: то је тачка која је према трансформацији $Z = \alpha z + \beta$ инваријантна. Према томе, специјални закон мултиформности $z_1 = \alpha_1 z_0 + \beta_1$ можемо писати у облику

$$z_1 - \zeta = \alpha_1(z_0 - \zeta),$$

где је

$$\zeta = \frac{\beta_1}{1 - \alpha_1}.$$

3. — И трансформација $Z = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + 1}$ може се писати у другом облику. Као што је познато, ова трансформација оставља

две тачке или једну тачку инвариантном; те инвариантне тачке добивају се из квадратне једначине

$$z = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + 1},$$

т. ј. из

$$\gamma z^2 + (1 - \alpha) z - \beta = o,$$

одакле је

$$z = \frac{\alpha - 1 \pm \sqrt{(1-\alpha)^2 + 4\beta\gamma}}{2\gamma}$$

Према томе, имаћемо две тачке инвариантне или једну, што зависи од тога да ли је $(1-\alpha)^2 + 4\beta\gamma$ различито од нуле или је нула.

Ако је $(1-\alpha)^2 + 4\beta\gamma = o$ и ставимо

$$\zeta = \frac{\alpha - 1}{2\gamma},$$

$$h = \frac{2\gamma}{\alpha + 1},$$

биће[1]

$$\frac{1}{Z - \zeta} = \frac{1}{z - \zeta} + h.$$

Ако је, пак, $(1-\alpha)^2 + 4\beta\gamma \neq o$, биће

$$\frac{Z - \zeta_1}{Z - \zeta_2} = k \frac{z - \zeta_1}{z - \zeta_2},$$

где је

$$\zeta_1 = \frac{\alpha - 1 + \sqrt{(1-\alpha)^2 + 4\beta\gamma}}{2\gamma},$$

$$\zeta_2 = \frac{\alpha - 1 - \sqrt{(1-\alpha)^2 + 4\beta\gamma}}{2\gamma},$$

$$k = \frac{\alpha + 1 - \sqrt{(1-\alpha)^2 + 4\beta\gamma}}{\alpha + 1 + \sqrt{(1-\alpha)^2 + 4\beta\gamma}}.$$

Специјални закон мултиформности

$$z_1 = \frac{\alpha_1 z_0 + \beta_1}{\gamma_1 z_0 + 1}$$

[1] В., на пр., *Osgood,* Lehrbuch der Funkt. I., p. 263 и даље.

можемо, дакле, писати или у облику

$$\frac{1}{z_1 - \zeta} = \frac{1}{z_0 - \zeta} + h, \tag{3}$$

где је

$$\zeta = \frac{\alpha_1 - 1}{2\gamma_1}, \qquad h = \frac{2\gamma_1}{\alpha_1 + 1} \tag{3*}$$

или у облику

$$\frac{z_1 - \zeta_1}{z_1 - \zeta_2} = k\,\frac{z_0 - \zeta_1}{z_0 - \zeta_2}, \tag{4}$$

где је

$$\zeta_1 = \frac{\alpha_1 - 1 + \sqrt{(1-\alpha_1)^2 + 4\beta_1\gamma_1}}{2\gamma_1}$$
$$\zeta_2 = \frac{\alpha_1 - 1 - \sqrt{(1-\alpha_1)^2 + 4\beta_1\gamma_1}}{2\gamma_1} \tag{4*}$$
$$k = \frac{\alpha_1 + 1 - \sqrt{(1-\alpha_1)^2 + 4\beta_1\gamma_1}}{\alpha_1 + 1 + \sqrt{(1-\alpha_1)^2 + 4\beta_1\gamma_1}}$$

§ II. — Аналитички облици функција; прва метода.

4. — Ако је $z = \psi(x, y)$ униформна функција од x и y, функција $y = F(x)$ дефинисана са

$$z = \frac{\alpha_1}{2\pi i}\log(x - x_0)$$

има у околини тачке x_0 специјални закон мултиформности $z_1 = z_0 + \alpha_1$. Узмимо, наиме, за $\log(x - x_0)$ једну специјалну детерминацију и њој нека одговара из последње једначине специјална детерминација y_0 од y; обиђемо ли око x_0, детерминација од $\log(x - x_0)$ прећи ће у $\log(x - x_0) + 2\pi i$, y_0 у y_1, а ψ у ψ, јер је то, по претпоставци, униформна функција од x и y. Биће, дакле,

$$z_1 = \frac{\alpha_1}{2\pi i}[\log(x - x_0) + 2\pi i] = z_0 + \alpha_1,$$

што смо и тврдили.

Одавде се види да збиља постоји функција чији је специјални закон мултиформности дат са (I).

Нека буде $\eta = f(x)$ ма каква мултиформна функција, за коју је x_0 изолована критичка тачка и чији је специјални закон мултиформности дат са $\psi(x, \eta_1) = \psi(x, \eta_0) + \alpha_1$, где је $\psi(x, \eta)$ униформна функција од x и η. Начинимо функцију

$$u(x) = \psi(x, \eta) - \psi(x, y) = \psi[x, f(x)] - \psi[x, F(x)].$$

Обиђемо ли око x_0, $\psi(x, \eta_0)$ прећи ће у $\psi(x, \eta_1) = \psi(x, \eta_0) + \alpha_1$, $\psi(x, y_0)$ прећи ће у $\psi(x, y_1) = \psi(x, y_0) + \alpha_1$. па ће $u(x)$ остати непромењено, т. ј. $u(x)$ је униформна функција у околини тачке x_0, и јесте:

$$\psi(x, \eta) = \frac{\alpha_1}{2\pi i}\log(x - x_0) + u(x).$$

Обрнуто, лако се уверити да свака функција $\eta = f(x)$ дефинисана овом једначином има специјални закон мултиформности $\psi(x, \eta_1) = \psi(x, \eta_0) + \alpha_1$.

Према томе, *ако је* $\psi(x, y)$ *униформна функција од* x *и* y, *постојаће мултиформна функција* $y = f(x)$, *за коју је тачка* x_0 *изолована критичка тачка и чији је специјални закон мултиформности у околини те тачке дат са* $\psi(x, y_1) = \psi(x, y_0) + \alpha_1$; *та функција је дефинисана једначином*

$$\psi(x, y) = \frac{\alpha_1}{2\pi i}\log(x - x_0) + u(x),$$

где је $u(x)$ *произвољна, у околини тачке* x_0 *униформна функција од* x, *и то је једино решење.*

5. — Ако је $Z = \psi(x, y)$ униформна функција од x и y, функција $y = F(x)$ дефинисана са

$$\psi(x, y) = (x - x_0)^m + \frac{\beta_1}{1 - \alpha_1},$$

где је

$$m = \frac{\log \alpha_1}{2\pi i},$$

има у околини тачке x_0 специјални закон мултиформности $\psi(x, y_1) = \alpha_1 \psi(x, y_0) + \beta_1$. Узмимо наиме, за $(x - x_0)^m$ једну специјалну детерминацију[1] и њој нека одговара из последње једначине специјална детерминација y_0 од y; обиђемо ли око тачке x_0, детерминација од $(x - x_0)^m = e^{m \log(x - x_0)}$ прећи ће у

$$e^{m[\log(x - x_0) + 2\pi i]} = e^{2\pi i m}(x - x_0)^m = \alpha_1 (x - x_0)^m,$$

y_0 прећи ће у y_1, ψ у ψ. Биће, дакле,

[1] $m = \frac{\log \alpha_1}{2\pi i}$ није цео број, јер би иначе било $\alpha_1 = 1$, па бисмо имали случај (I), који је већ расправљен у № 4.

$$\psi(x, y_1) = \alpha_1 (x - x_0)^m + \frac{\beta_1}{1-\alpha_1}$$
$$= \alpha_1 \psi(x, y_0) + \beta_1,$$

што смо и тврдили.

Видимо, дакле, да збиља постоји функција чији је специјални закон мултиформности дат са (II). Нека буде $\eta = f(x)$ ма каква мултиформна функција, за коју је x_0 изолована критичка тачка и чији је специјални закон мултиформности дат са $\psi(x, \eta_1) = \alpha_1 \psi(x, y_0) + \beta_1$, где је $\psi(x, \eta)$ униформна функција од x и η. Начинимо функцију

$$u(x) = \frac{\psi(x, \eta) - \frac{\beta_1}{1-\alpha_1}}{\psi(x, y) - \frac{\beta_1}{1-\alpha_1}}$$

Обиђемо ли око x_0, $\psi(x, y_0)$ прећи ће у $\alpha_1 \psi(x, y_0) + \beta_1$, $\psi(x, \eta_0)$ прећи ће у $\alpha_1 \psi(x, \eta_0) + \beta_1$, па ће $u(x)$ прећи у

$$\frac{\alpha_1 \psi(x, \eta_0) + \beta_1 - \frac{\beta_1}{1-\alpha_1}}{\alpha_1 \psi(x, y_0) + \beta_1 - \frac{\beta_1}{1-\alpha_1}}$$

$$= \frac{\psi(x, \eta_0) - \frac{\beta_1}{1-\alpha_1}}{\psi(x, y) - \frac{\beta_1}{1-\alpha_1}} = u(x).$$

$u(x)$ је, дакле, униформна функција у околини тачке x_0. Имамо, дакле,

$$\psi(x, \eta) = \left[\psi(x, y) - \frac{\beta_1}{1-\alpha_1}\right] u(x) + \frac{\beta_1}{1-\alpha_1}$$
$$= (x - x_0)^m u(x) + \frac{\beta_1}{1-\alpha_1}.$$

Према томе, *ако је* $\psi(x, y)$ *униформна функција од* x *и* y, *постојаће мултиформна функција* $y = f(x)$, *за коју је тачка* x_0 *изолована критичка тачка и чији је специјални закон мултиформности у околини те тачке дат са* $\psi(x, y_1) = \alpha_1 \psi(x, y) + \beta_1$; *та функција је дефинисана једначином*

$$\psi(x, y) = (x - x_0)^m u(x) + \frac{\beta_1}{1-\alpha_1},$$

где је $m = \frac{\log \alpha_1}{2\pi i}$, *а* $u(x)$ *произвољна, у околини тачке* x_0 *униформна, функција од* x, *и то је једино решење.*

6. — Кад је специјални закон мултиформности облика

$$z_1 = \frac{\alpha_1 z_0 + \beta_1}{\gamma_1 z_0 + 1},$$

он се може, према N° 3, свести или на облик (3) или на облик (4), према томе да ли је $(1-\alpha)^2 + 4\beta\gamma = o$ или $\neq o$.

Узмимо, прво, да је $(1-\alpha)^2 + 4\beta\gamma = o$. Тада ће бити

$$\frac{1}{z_1 - \zeta} = \frac{1}{z_0 - \zeta} + h. \qquad (1)$$

Ако је $z = \psi(x, y)$ униформна функција од x и y, функција $y = F(x)$ дефинисана са

$$\frac{1}{z - \zeta} = \frac{h}{2\pi i} \log(x - x_0) \qquad (2)$$

има у околини тачке x_0 специјални закон мултиформности

$$z_1 = \frac{\alpha_1 z_0 + \beta_1}{\gamma_1 z_0 + 1}.$$

Узмимо, наиме, за $\log(x - x_0)$ једну специјалну детерминацију и њој нека одговара из последње једначине специјална детерминација y_0 од y; обиђемо ли око x_0, биће

$$\frac{1}{z_1 - \zeta} = \frac{h}{2\pi i} \log(x - x_0) + h = \frac{1}{z_0 - \zeta} + h,$$

што смо и тврдили.

Одавде се види да збиља постоји функција чији је специјални закон мултиформности дат са (3) из § I.

Сасвим истим путем као у N° 4, можемо закључити да је таква општа функција дефинисана са

$$\frac{1}{z - \zeta} = \frac{h}{2\pi i} \log(x - x_0) + u(x), \qquad (3)$$

где је $u(x)$ произвољна, у околини тачке x_0 униформна, функција од x.

Узмимо, сад, да је $(1-\alpha)^2 + 4\beta\gamma \neq o$. Тада ће бити

$$\frac{z_1 - \zeta_1}{z_1 - \zeta_2} = k \frac{z_0 - \zeta_1}{z_0 - \zeta_2}. \qquad (1^*)$$

Ако је $z = \psi(x, y)$ униформна функција од x и y, функција $y = F(x)$ дефинисана са

$$\frac{z - \zeta_1}{z - \zeta_2} = (x - x_0)^m, \qquad (2^*)$$

где је

$$m = \frac{\log k}{2\pi i},$$

има у околини тачке x_0 специјални закон мултиформности (4) из § I. Узмимо, наиме, за $(x - x_0)^m$ једну специјалну детерминацију[1] и њој нека одговара из последње једначине специјална детерминација y_0 од y; обиђемо ли око x_0, биће

$$\frac{z_1 - \zeta_1}{z_1 - \zeta_2} = k\,(x - x_0)^m = k\,\frac{z_0 - \zeta_1}{z_0 - \zeta_2},$$

што смо и тврдили.

Одавде се види да збиља постоји функција чији је специјални закон мултиформности дат са (4) из § I.

Сасвим сличним путем као и у N° 5, можемо закључити да је таква општа функција дефинисана са

$$\frac{z - \zeta_1}{z - \zeta_2} = (x - x_0)^m\, u(x), \qquad (3^*)$$

где је $u(x)$ произвољна, у околини тачке x_0 униформна, функција од x.

Резултати (3) и (3*) могу се представити и у другом облику. Учинићемо то прво за (3). Ради тога, ми ћемо једначину (2) решити по z и то решење означити са P:

$$P = \frac{1}{\frac{h}{2\pi i}\log(x - x_0)} + \zeta$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{2\gamma_1}{\alpha_1 + 1}\log(x - x_0)} + \frac{\alpha_1 - 1}{2\gamma_1}. \qquad (4)$$

Функција дефинисана са $z = P$ је најпростија од функција које имају специјални закон мултиформности (1). Ми ћемо, сад, прорачунати z из (3) помоћу P. Ставимо ли у (3) место

[1] Према (4*) из N 3, k не може бити 1, па m не може бити цео бро-

$\frac{h}{2\pi i}\log(x-x_0)$ $\frac{1}{P-\zeta}$ и вредности за ζ и h прорачунате у № 3 и сетимо ли се да је $(1-\alpha_1)^2+4\beta_1\gamma_1=0$, добићемо:

$$Z=\frac{P(1+u\zeta)-\zeta^2 u}{Pu+1-\zeta u}$$

$$=\frac{P+\frac{\beta_1}{\gamma_1}\frac{u}{1+\zeta u}}{(P-2\zeta)\frac{u}{1+\zeta u}+1}$$

$$=\frac{P+\frac{\beta_1}{\gamma_1}v(x)}{\left(P+\frac{1-\alpha_1}{\gamma_1}\right)v(x)+1},$$

где је $v(x)$ произвољна, у околини тачке x_0 униформна, функција од x.

Да бисмо добили и (3*) у другом облику, ми ћемо једначину (2*) решити по z и то решење означити са P:

$$P=\frac{\zeta_1-\zeta_2(x-x_0)^m}{1-(x-x_0)^m} \tag{5}$$

Функција дефинисана са $z=P$ је најпростија од функција које имају специјални закон мултиформности (1*). Ми ћемо, сад, прорачунати z из (3*) помоћу P. Ставимо ли у (3*) место $(x-x_0)^m$ $\frac{P-\zeta_1}{P-\zeta_2}$, сетимо ли се да је, према № 3, $\zeta_1\zeta_2=-\frac{\beta_1}{\gamma_1}$

$\zeta_1+\zeta_2=-\frac{1-\alpha_1}{\gamma_1}$, добићемо:

$$z=\frac{P(\zeta_1-u\zeta_2)-\zeta_1\zeta_2(1-u)}{P(1-u)-\zeta_2+\zeta_1 u}$$

$$=\frac{P-\zeta_1\zeta_2\frac{1-u}{\zeta_1-u\zeta_2}}{P\frac{1-u}{\zeta_1-u\zeta_2}-(\zeta_1+\zeta_2)\frac{1-u}{\zeta_1-u\zeta_2}+1}$$

$$=\frac{P+\frac{\beta_1}{\gamma_1}v(x)}{\left(P+\frac{1-\alpha_1}{\gamma_1}\right)v(x)+1},$$

где је ~~v(x) произвољна, у околини тачке x_0 униформна~~, функција од x. Ово је, међутим, исти облик као и пре, само што сад P друго значи.

Према напред изложеном, можемо, дакле, рећи: *ако је* $z = \psi(x, y)$ *униформна функција од* x *и* y, *постоји мултиформна функција* $y = f(x)$, *за коју је* x_0 *изолована критичка тачка и чији је специјални закон мултиформности у околини те тачке дат са* $z_1 = \frac{\alpha_1 z_0 + \beta_1}{\gamma_1 z_0 + 1}$; *та функција је дефинисана једначином*

$$z = \frac{P + \frac{\beta_1}{\gamma_1} v(x)}{\left(P + \frac{1 - \alpha_1}{\gamma_1}\right) v(x) + 1},$$

где је $v(x)$ *произвољна, у околини тачке* x_0 *униформна, функција од* x, *и то је једино решење.* ***Функција*** P *има разно значење, према томе да ли је* $(1-\alpha)^2 + 4\beta\gamma$ *равно са нулом или различито од нуле; у првом случају* P *је дано са* (4), *у другом са* (5).

7. — Битна претпоставка за последње три теореме била је да је $\psi(x, y)$ униформна функција од x и y. Ако та претпоставка није испуњена, теореме не морају бити тачне.

Један прост пример ће то показати. Узмимо да је у околини тачке $x_0 = o$ $y_1 = y_0 x$; тада је $y_2 = y_1 x = y_0 x^2, \ldots, y_n = y_0 x^n$. Генерални закон мултиформности дат је групом $X = x$, $Y = yx^{\alpha}$. Логаритмовањем, специјални закон мултиформности $y_1 = y_0 x$ можемо писати у облику

$$\frac{\log y_1}{\log x} = \frac{\log y_0}{\log x} + 1,$$

т. ј. у облику (I), где је $\alpha_1 = 1$, $\psi(x, y) = \frac{\log y}{\log x}$. Функција $\psi(x, y)$ овде није униформна функција од x и y. Применимо ли, ипак, теорему из N° 4 добићемо:

$$\frac{\log y_1}{\log x} = \frac{1}{2\pi i} \log x + u(x),$$

па је

$$y = e^{\frac{1}{2\pi i} \log^2 x + u(x) \log x}$$

Обиђемо ли око o, добићемо

$$y = e^{\frac{1}{2\pi i}[\log^2 x + 2 \cdot 2\pi i \log x + (2\pi i)^2] + u(x)\log x + u(x) \cdot 2\pi i}$$
$$= y_0 x^2 e^{u(x) \cdot 2\pi i},$$

а не $y_1 = y_0 x$.

Ипак, униформност функције $\psi(x, y)$ није увек потребна, па да се теореме могу применити: тај услов је довољан, али није неопходан. Узмемо, на пример, $y_1 = 2y_0$; тада је $y_2 = 2y_1 = 4y_0, \ldots$ Генерални закон мултиформности је група $X = x$, $Y = \alpha y$. Логаритмовањем, специјални закон $y_1 = 2y_0$ даје се свести на $\log y_1 = \log y_0 + \log 2$, т. ј. на облик (I), где је $\psi(x, y) = \log y$, $\alpha_1 = \log 2$. Овде функција $\psi(x, y)$ није униформна функција од x и y. Применимо ли, ипак, теорему из N° 4, добићемо

$$\log y = \frac{\log 2}{2\pi i} \log(x - x_0) + u(x),$$

па је

$$y = (x - x_0)^{\frac{\log 2}{2\pi i}} e^{u(x)}.$$

Обиђемо ли око x_0, добићемо $y_1 = y_0 2$, т. ј. ова функција одговара услову. Но, до тог резултата може се доћи и тако да се облик $y_1 = 2y_0$ схвати као облик (II) у ком је $\alpha_1 = 2$, $\beta_1 = 0$.

§ III. — Аналитички облици функције; друга метода.

8. — На основи теорије диференцијалних инварианата коначне непрекидне групе, лако је видети да група (1) из N° 1 има диференцијалне инваријанте за $y = f(x)$, ма каква функција била $f(x)$, и да ће најнижи ред тих диференцијалних инваријаната бити један, два или три, према томе да ли група садржи један, два или три параметра. Најпростије такве инваријанте су:

$$Y_1 = \frac{dz}{dx} \quad \text{за групу са једним параметром;}$$

$$Y_2 = \frac{d^2 z}{dx^2} : \frac{dz}{dx} \quad \text{за групу са два параметра;}$$

$$Y_3 = 2\frac{d^3 z}{dx^3} : \frac{dz}{dx} - 3\left(\frac{d^2 z}{dx^2} : \frac{dz}{dx}\right)^2 \quad \text{за групу са три параметра;}$$

о чему се лако и директно уверити.

Важност ових диференцијалних инваријаната за наш проблем види се из овога: *Ако је* $z = \psi(x, y)$ *униформна функција од* x *и* y, *и ако егзистира мултиформна функција* $y = f(x)$ *чији* *је закон мултиформности у околини* ~~*тачке* x_0 *дат са* (I)~~, *односно* (II), *односно* (III), *диференцијална инварианта* Y_1, *односно* Y_2, *односно* Y_3, *униформна је функција у околини тачке* x_0, *кад се у њој место* y *стави* $f(x)$. То излази непосредно из саме дефиниције диференцијалних инварианата једне групе: ако у диференцијалну инваријанту Y_1, на пример, ставимо место $\psi(x, y_0)$ $\psi(x, y_1)$, она ће имати исти облик.

Овај факат нас наводи на идеју да функције, чији је специјални закон мултиформности дат са (I), (II), (III), тражимо међу интегралима диференцијалних једначина

$$Y_1 = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_m (x-x_0)^m, \quad Y_2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_m (x-x_0)^m, \quad Y_3 = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_m (x-x_0)^m$$

што ће и бити предмет овога параграфа.

9. — Узмимо, прво, диференцијалну једначину

$$\frac{dz}{dx} = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_m (x-x_0)^m.$$

Интеграљењем ћемо добити

$$z = A_{-1} \log (x-x_0) + u(x),$$

где је $u(x)$ униформна функција у околини тачке x_0.

Обиђемо ли око x_0, пошавши од неке специјалне детерминације за $\log(x-x_0)$, којој нека одговара специјална детерминација y_0 од y, имаћемо, пошто је $z = \psi(x, y)$ по претпоставци униформна функције од x и y,

$$z_1 = z_0 + A_{-1} \cdot 2\pi i.$$

Ако узмемо, дакле, $A_{-1} = \dfrac{\alpha_1}{2\pi i}$, биће $z_1 = z_0 + \alpha_1$.

Према томе, *ако је* $z = \psi(x, y)$ *униформна функција од* x *и* y *и ако је* $A_{-1} = \dfrac{\alpha_1}{2\pi i}$, *општи интеграл диференцијалне једначине* $\dfrac{dz}{dx} = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} A_m (x-x_0)^m$ *има у околини тачке* x_0 *специјални закон мултиформности* $z_1 = z_0 + \alpha_1$. *Он је дат као решење једначине*

$$\psi(x, y) = \frac{\alpha_1}{2\pi i} \log(x - x_0) + u(x),$$

где је $u(x)$ *у околини тачке* x_0 *униформна функција од* x.

Лако се уверити да је то општи облик за такве функције.

10. — Узмимо, сад, диференцијалну једначину

$$\frac{d^2 z}{dx^2} : \frac{dz}{dx} = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_m (x - x_0)^m$$

Интегралењем ћемо добити:

$$\log \frac{dz}{dx} = A_{-1} \log(x - x_0) + u(x),$$

па је

$$\frac{dz}{dx} = (x - x_0)^{A_{-1}} v(x),$$

где је $v(x)$ униформна функција у околини тачке x_0.

Обиђемо ли око x_0, $\frac{dz}{dx}$ прећи ће у

$$\frac{dz_1}{dx} = \frac{d(\alpha_1 z_0 + \beta_1)}{dx} = \alpha_1 \frac{dz_0}{dx},$$

а $(x - x_0)^{A_{-1}} = e^{A_{-1} \log(x - x_0)}$ у $e^{A_{-1} \log(x - x_0) + A_{-1} \cdot 2\pi i} = e^{A_{-1} \cdot 2\pi i} (x - x_0)^{A_{-1}}$.

Узмемо ли $e^{A_{-1} \cdot 2\pi i} = \alpha_1$, т. ј. $A_{-1} = \frac{\log \alpha_1}{2\pi i}$, биће $\frac{dz_1}{dx} = \alpha_1 \frac{dz_0}{dx}$,

Како је $\alpha_1 \neq 1$, то A_{-1} није цео број.

Развијемо ли $v(x)$ око тачке x_0 у Лоранов ред, $v(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} B_m (x - x_0)$, биће

$$\frac{dz}{dx} = \sum_{-\infty}^{+\infty} B_m (x - x_0)^{A_{-1} + m},$$

па је[1]

$$\begin{aligned} z &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{B_m}{A_{-1} + m + 1} (x - x_0)^{A_{-1} + m + 1} + C \\ &= (x - x_0)^{A_{-1}} w(x) + C, \end{aligned}$$

где је $w(x)$ униформна функција у околини тачке x_0, а C интеграциона константа.

---

[1] $A_{-1} + m$ не може бити -1, јер A_{-1} није цео број.

Обиђемо ли око x_0, биће, ако претпоставимо да је $z = \psi(x, y)$ униформна функција од x и y,

$$Z_1 = \alpha_1 (x - x_0)^{A_{-1}} w(x) + C$$
$$= \alpha_1 z_0 + (1 - \alpha_1) C$$

Узмемо ли $C = \frac{\beta_1}{1 - \alpha_1}$, биће

$$z_1 = \alpha_1 z_0 + \beta_1 .$$

Према томе, *ако је* $z = \psi(x, y)$ *униформна функција од* x *и* y *и ако је* $A_{-1} = \frac{\log \alpha_1}{2\pi i}$, $(\alpha_1 \neq 1)$, *диференцијална једначина* $\frac{d^2 z}{dx^2} : \frac{dz}{dx} = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_m (x - x_0)^m$ *има партикуларни интеграл, који у околини тачке* x_0 *има специјални закон мултиформности* $z_1 = \alpha_1 z_0 + \beta_1$. *Он је дат као решење једначине*

$$\psi(x, y) = (x - x_0)^{\frac{\log \alpha}{2\pi i}} . w(x) + \frac{\beta_1}{1 - \alpha_1},$$

где је $w(x)$ *у околинини тачке* x_0 *униформна функција од* x.

Лако се и овде уверити да је то општи облик за такве функције.

11. — Диференцијална једначина

$$y'' + y \sum_{-\infty}^{+\infty} A_m (x - x_0)^m = 0 \qquad (1)$$

јесте хомогена линеарна диференцијална једначина другог реда; њен генерални интеграл је уопште мултиформна функција. Као што је из теорије оваквих једначина познато, критичка тачка интеграла те диференцијалне једначине може бити само x_0. Осим тога, познато је још и то да ова диференцијална једначина има сигурно један партикуларан интеграл y_0 овакве особине: ако пођемо из неке тачке $x \neq x_0$ у околини тачке x_0 са вредношћу тога партикуларног интеграла y_0, па обиђемо по једноставној затвореној кривој линији око тачке x, док се не вратимо у x, доћи ћемо у x са вредношћу $r y_0$ тога интеграла, где је r константа. Партикуларних интеграла, линеарно независних, такве особине може бити највише два (r се добива као корен једне квадратне једначине).

Ставимо ли у горњу једначину (1) $y^2 = \frac{1}{z'}$, добићемо

$$2\frac{z'''}{z'} - 3\left(\frac{z''}{z'}\right)^2 = 4\sum_{-\infty}^{+\infty} A_m (x - x_0)^m \qquad (2)$$

Ако је z_0 партикуларни интеграл једначине (2), и $z = \frac{Az_0 + B}{Cz_0 + D}$, где су A, B, C и D константе, интеграл је једначине (2); јер, лако се простим рачуном уверити да ће и z задовољавати једначину (2), ако је задовољава z_0. Како у $\frac{Az_0 + B}{Cz_0 + D}$ долазе три независне константе (односи три између њих према четвртој), то можемо рећи: ако је z_0 партикуларни интеграл диференцијалне једначине (2), генерални ће бити $z = \frac{Az_0 + B}{Cz_0 + D}$.

Партикуларном интегралу y_0 диференцијалне једначине (1) одговараће партикуларни интеграл z_0 диференцијалне једначине (2), за који важи $z_0' = \frac{1}{y_0^2}$. Опишимо око x_0 круг Γ који у својој унутрашњости не садржи осим x_0 више ни једну сингуларну тачку функције $\sum_{-\infty}^{+\infty} A_m (x - x_0)^m = \omega(x)$. Нека буде ζ тачка из унутрашњости тога круга. Око ζ опишимо круг Γ_1 који ће сав лежати у Γ, не обухватајући x_0. Како је ζ регуларна тачка функције $\omega(x)$, можемо $\omega(x)$ у околини те тачке развити у ред $\sum_{-\infty}^{+\infty} B_m (x - \zeta)^m$. У Γ_1 је y_0 холоморфна функција, ради чега Γ_1 можемо узети тако да y_0 у Γ_1 нема нула-тачака, осим може бити ζ. Нека ζ буде за y_0 нула k-тог реда; тада је $y_0 = (x - \zeta)^k p(x)$, где је $p(x)$ холоморфна функција у Γ_1 и $p(\zeta) = o$. Биће у околини тачке ζ

$$\omega(x) = -\frac{y_0''}{y_0} = -\frac{k(k-1)}{(x-\zeta)^2} - \frac{2k}{x-\zeta} \cdot \frac{p'(x)}{p(x)} - \frac{p''(x)}{p(x)}.$$

Но, како је $\omega(x)$ холоморфна функција у Γ_1, то не може у њеном развоју по $(x - \zeta)$ бити негативних потенција; стога, закључујемо одмах да мора бити $k(k-1) = o$, одакле излази $k = o$ или $k = 1$. Ако је $k = o$, тада, збиља, неће бити негативних потенција, а ζ неће бити тачка нула за y_0. Ако је, пак, $k = 1$, да не би било негативних потенција мора бити, као што се то из горње једначине види, $p'(\zeta) = 0$. Тачка ζ, дакле, или није нула за y_0 или је нула првог реда; но, ако је нула, мора бити $p'(\zeta) = 0$. Ако ζ није нула за y_0, $z_0' = \frac{1}{y_0^2}$ је холоморфна функција у Γ_1; ако је, пак, ζ нула за y_0, z_0' је мероморфна функција у Γ_1. У првом случају, z_0 је униформна функција у Γ_1, у другом може она бити и мултиформна, ако је, наиме, резидијум од $\frac{1}{y_0^2}$ с обзиром на тачку ζ различит од нуле. Овај резидијум је лако прорачунати. Јер, ако је ζ нула-тачка за y_0, она је, према напред реченом, првог реда, па је $y_0 = (x - \zeta)\,p(x)$, где је $p(x)$ холоморфна функција у Γ_1 и $p(\zeta) \neq 0, p'(\zeta) = 0$. Одавде излази $\frac{1}{y_0^2} = (x - \zeta)^{-2} \frac{1}{p^2(x)}$. Резудуум од $\frac{1}{y_0^2}$ с обзиром на тачку ζ биће, дакле, $\left[\frac{1}{p^2(\zeta)}\right]' = -\frac{2p'(\zeta)}{p^3(\zeta)} = 0$, јер је $p'(\zeta) = 0, p(\zeta) \neq 0$. Видимо, тако, да тачка ζ, ма да пол за z_0', неће бити критичка тачка за z_0. Према томе, *у Γ једина критичка тачка за z_0 може бити x_0, — она је изолована.*

Обиђемо ли око x_0, y_0 ће прећи у $r y_0$, а z_0 у Z_0, па ће бити $Z_0' = \frac{1}{r^2 y_0^2} = a_0 z_0'$, т. ј.

$$Z_0 = a_0 z_0 + b_0, \quad (a_0 \text{ и } b_0 \text{ конст.}).$$

Према томе, диференцијална једначина (2) има сигурно један партикуларан интеграл z_0, чији је закон мултиформности у околини тачке x_0 дат са $Z_0 = a_0 z_0 + b_0$.

Ако је $a_0 = 1, b_0 = 0$, то је $Z_0 = z_0$, т. ј. z_0 је униформна функција од x у околини тачке x_0. Онда је и генерални интеграл једначине (2) униформна функција од x, јер је $z = \frac{A z_0 + B}{C z_0 + D}$.

Узмимо други случај: $a_0 = 1, b_0 \neq 0$. У овом случају број b_0 није одређен и може се за свако $b_0 \neq 0$ наћи одговарајући партикуларни интеграл; треба, наиме, само место интеграла z_0 узети $\frac{b_0'}{b_0} z_0$, што је, према учињеној примедби, такође интеграл једначине (2), па ћемо место b_0 имати b_0'.

Остаје нам још трећи могући случај: $a_0 \neq 1$. И овде број b_0 није одређен и може се за свако b_0 наћи одговарајући партикуларни интеграл; треба, наиме, само место интеграла z_0 узети $u_0 = z_0 + \frac{b_0' - b_0}{1 - a_0}$, што је такође интеграл једначине (2), па ћемо место b_0 имати b_0', јер је, као што је лако видети, $U_0 = a_0 u_0 + b_0'$.

И тако, код једначине (2) можемо имати три случаја, од којих један сигурно мора бити:

1° Једначина (2) има један униформан партикуларан интеграл; тада је и генералан интеграл униформан;

2° Једначина (2) има један партикуларан интеграл z_0, чији је закон мултиформности у околини тачке x_0 дат са $Z_0 = z_0 + b_0 (b_0 \neq 0$;

3° Једначина (2) има један партикуларан интеграл z_0, чији је закон мултиформности у околини тачке x_0 дат са $Z_0 = a_0 z_0 + b_0$ $(a_0 \neq 1)$.

Као што нам је из прошле две № № познато, у другом случају z_0 ће имати облик

$$\frac{b_0}{2\pi i} \log (x - x_0) + u(x),$$

а у трећем

$$(x - x_0)^{\frac{\log a_0}{2\pi i}} u(x) + \frac{b_0}{1 - a_0},$$

где је $u(x)$ униформна функција у околини тачке x_0.

Наведена три случаја се међусобно искључују. Лако је, прво, видети да ни један од случајева 2° и 3° није компатибилан са случајем 1°; јер, у првом случају је генерални интеграл униформан, па не може бити мултиформних партикуларних интеграла. Исто тако, нису компатибилни међусобно други и трећи случај; јер, комбинацијом $\frac{Az_0 + B}{Cz_0 + D}$, где су A, B, C и D константе, не може се прећи са логаритма на потенцију. Према томе, свака диференцијална једначина (2) спада у једну, и само у једну, од категорија 1^0, 2^0, 3^0.

Лако се уверити да збиља егзистирају диференцијалне једначине облика (2) и једне, и друге, и треће категорије. Узмимо, на пример, $z_0 = x^2$; лако је прорачунати да ће у овај мах бити:

$$2\frac{z'''}{z'}-3\left(\frac{z''}{z'}\right)^2=-\frac{3}{x^2}, \qquad (3)$$

Ово је, дакле, једначина из прве категорије. Узмемо ли $z_0=\log x$, биће $Z_0=z_0+2\pi i$ и

$$2\frac{z'''}{z'}-3\left(\frac{z''}{z'}\right)^2=\frac{1}{x^2}, \qquad (4)$$

те имамо једначину из друге категорије. Узмимо, напослетку, $z_0=x^m$, где m није цео број, него је $m=\frac{1}{2\pi i}\log a_0$ $(a_0 \neq 1)$. Имаћемо $Z_0=a_0 z_0$ и

$$2\frac{z'''}{z'}-3\left(\frac{z''}{z'}\right)^2=\frac{1-m^2}{x^2}, \qquad (5)$$

те имамо једначину из треће категорије. Све то у околини тачке $x_0=o$.

12. — Упознавши се са неким особинама једначине (2), ми ћемо се вратити на питање које нас у овај мах интересује: има ли диференцијална једначина (2) партикуларних интеграла чији је закон мултиформности у околини тачке x_0 дат са $Z=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+1}$ $(\alpha-\beta\gamma\neq o)$?

Јасно је одмах да таквог интеграла неће бити ако диференцијална једначина (2) спада у прву од три категорије наведене у прошлој №, јер тада уопште нема мултиформних интеграла. Остају нам, дакле, за расматрање једначине друге и треће категорије.

Узмимо, зато, да једначина (2) није прве категорије и нека буде z_0 њен партикуларни интеграл чији је закон мултиформности у околини тачке x_0 дат са $Z_0=a_0 z_0+b_0$. Нека буде, даље, $z=\frac{a z_0+b}{c z_0+d}$ партикуларни интеграл чији би закон мултиформности био у околини тачке x_0 дат са $Z=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+1}$ $(\alpha-\beta\gamma\neq o)$; такав ће интеграл постојати ако можемо одредити константе a, b, c и d тако да не буде $ad-bc=o$.

Једначина $z=\frac{a z_0+b}{c z_0+d}$ прећи ће, после обилажења око x_0, у једначину

$$Z=\frac{aZ_0+b}{cZ_0+d}=\frac{a a_0 z_0+a b_0+b}{c a z_0+c b_0+d}.$$

Треба, међутим, да буде $Z = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + 1}$, т. ј.

$$Z = \frac{\alpha \frac{az_0 + b}{cz_0 + d} + \beta}{\gamma \frac{az_0 + b}{cz_0 + d} + 1} = \frac{(a\alpha + c\beta) z_0 + (b\alpha + d\beta)}{(a\gamma + c) z_0 + (b\gamma + d)}$$

Упоредивши ова два израза за Z и узевши у обзир да су они једнаки за свако x, видимо да је то могуће само ако је

$$\begin{aligned} a\alpha + c\beta &= kaa_0 \\ b\alpha + d\beta &= k(ab_0 + b) \\ a\gamma + c &= kca_0 \\ b\gamma + d &= k(cb_0 + d), \end{aligned}$$

што нам за a, b, c, d даје овај систем једначина:

$$\begin{array}{lllll} a(\alpha - ka_0) + b.o & + c.\beta & + d.o & = o \\ -a.kb_0 + b(\alpha - k) & + c.o & + d.\beta & = o \\ a.\gamma + b.o & + c(1 - ka_0) & + d.o & = o \\ a.o + b.\gamma & - c.kb_0 & + d(1 - k) & = o. \end{array} \tag{6}$$

Да добивени линеарни хомогени систем једначина има решења по a, b, c, d, која неће бити сва идентична с нулом, потребно је и довољно да детерминанта система буде једнака нули:

$$\begin{vmatrix} \alpha - ka_0 & o & \beta & o \\ -kb_0 & \alpha - k & o & \beta \\ \gamma & o & 1 - ka_0 & o \\ o & \gamma & -kb_0 & 1 - k \end{vmatrix} = o \tag{7}$$

Развијемо ли ову детерминанту добићемо

$$[(\alpha - ka_0)(1 - ka_0) - \beta\gamma][(1 - k)(\alpha - k) - \beta\gamma] = o,$$

што ће бити ако је или

$$(\alpha - ka_0)(1 - ka_0) - \beta\gamma = o \tag{8}$$

или

$$(\alpha - k)(1 - k) - \beta\gamma = o. \tag{8*}$$

Из (8) добивамо

$$k = \frac{1 + \alpha \pm \sqrt{(1 - \alpha)^2 + 4\beta\gamma}}{2a_0} \tag{9}$$

а из (8*)

$$k = \frac{1 + \alpha \pm \sqrt{(1 - \alpha)^2 + 4\beta\gamma}}{2}. \tag{9*}$$

Само, дакле, за ове вредности од k дате са (9) и (9*) детерминанта система (6) биће нула. Лако је видети да је $k \neq 0$; јер, из $k = 0$ излази и из (9) и из (9*) $\alpha - \beta\gamma = 0$, против наше претпоставке.

Претпоставимо да смо k изабрали по (9) и по (9*): тада систем (6) има решења по a, b, c, d, која неће бити сва нула. Остаје још да се види да ли је $ad - bc \neq 0$. Да бисмо и с тим свршили, узећемо засебно случај кад је једначина (2) друге категорије, а засебно случај кад је она треће категорије (№ 11).

Узмимо, прво, да је једначина (2) друге категорије, т. ј. $a_0 = 1$, $b_0 \neq 0$; тада су једначине (8) и (8*) индентичне, а исто тако и (9) и (9*). Прва и трећа једначина из (6) садрже само a и c и гласе:

$$a(\alpha - k) + c\beta = 0$$
$$a\gamma + c(1 - k) = 0.$$

Како је, према (8*) детерминанта овог система од две једначине равна са нулом, то ће a и c бити различити од нуле, и имаћемо:

$$a = -\frac{1-k}{\gamma}c. \tag{10}$$

Другу и четврту једначину система (6) можемо писати:

$$\begin{aligned} b(\alpha - k) + d\beta &= kab_0 \\ b\gamma + d(1 - k) &= kcb_0. \end{aligned} \tag{11}$$

Како је детерминанта система овог једнака нули, а $b_0 \neq 0$, то, да би систем имао решења по b и α, потребно је и довољно да буде

$$\begin{vmatrix} kab_0 & \beta \\ kcb_0 & 1-k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha - k & kab_0 \\ \gamma & kcb_0 \end{vmatrix} = 0,$$

т. ј.

$$\frac{a}{c} = \frac{\beta}{1-k} = \frac{\alpha - k}{\gamma},$$

што са (10) даје

$$-\frac{1-k}{\gamma} = \frac{\beta}{1-k} = \frac{\alpha - k}{\gamma},$$

одакле излази

$$(1 - \alpha)^2 + 4\beta\gamma = 0.$$

Ако је овај услов испуњен, из (1) ћемо имати:

$$b = \frac{kcb_0}{\gamma} - \frac{1-k}{\gamma} d, \tag{12}$$

а за k имаћемо просто

$$k = \frac{1+\alpha}{2}, \tag{13}$$

па ћемо из (10) и (12) имати

$$\begin{aligned} a &= -\frac{1-\alpha}{2\gamma} c \\ b &= \frac{(1+\alpha) b_0 c}{2\gamma} - \frac{1-\alpha}{2\gamma} d. \end{aligned} \tag{14}$$

Одавде излази

$$\begin{aligned} ad - bc &= -\frac{1-\alpha}{2\gamma} cd - \frac{1+\alpha}{2\gamma} c^2 + \frac{1-\alpha}{2\gamma} cd \\ &= -\frac{1+\alpha}{2\gamma} b_0 c^2. \end{aligned}$$

Лако је видети да је $ad - bc \neq o$, само ако је $c \neq o$, јер, прво, по претпоставци је $b_0 \neq o$, а, друго, $1+\alpha$ не може бити нула, јер би онда, према (13), и k било нула, што је, као што смо већ рекли, немогуће.

И тако, дошли смо до овог резултата: *ако је једначина* (2) *друге категорије и ако је* $(1-\alpha)^2 + 4\beta\gamma = o$, *једначина* (2) *има партикуларан интеграл* $Z = \frac{az_0 + b}{cz_0 + d}$ *чији је закон мултиформности у околини тачке* x_0 *дан са* $Z = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + 1}$, $\alpha - \beta\gamma \neq o$); *треба, да бисмо тај интеграл добили, одредити* a *и* b *помоћу* (14); *варирајући произвољно* c *и* d, *добићемо бесконачно много таквих интеграла.*

Решивши тако задатак у случају да је једначина (2) друге категорије, пређимо на случај када је та једначина треће категорије: $a_0 \neq 1$. Тада једначине прва и трећа из (6) гласе:

$$\begin{aligned} a(\alpha - ka_0) + c\beta &= o \\ a\gamma + c(1 - ka_0) &= o. \end{aligned}$$

a и c не смеју у исти мах бити нуле, јер би се онда $\frac{az_0 + b}{cz_0 + d}$ редуцирало на константу. Да a и c не буду у исти мах нуле, потребно је и довољно да детерминанта горњег система две једничине буде нула:

$$(\alpha-ka_0)(1-ka_0)-\beta\gamma=o,$$

т. ј. потребно је k одредити из (9), а не из (9*). Учинимо ли тако, имаћемо:

$$a=-\frac{1-ka_0}{\gamma}c. \tag{15}$$

Другу и четврту једначину из (6) можемо писати

$$\begin{aligned} b(\alpha-k)+d\cdot\beta&=kab_0\\ b-\gamma+d(1-k)&=kcb_0.\end{aligned} \tag{16}$$

Детерминанта овога система је $(\alpha-k)(k-1)-\beta\gamma$. Она је или равна нули или различита од нуле; биће она равна нули, ако једначина (8), из које смо одредили k, и једначина (8*) имају заједнички корен, па за k узмемо тај заједнички корен; неће она бити нула, ако те две једначине имају и такве корене који нису једнаки. Узмимо, прво, да је $(\alpha-k)(1-k)-\beta\gamma\neq 0$; тада из (16) можемо одредити b и d:

$$b=\frac{kb_0}{(\alpha-k)(1-k)-\beta\gamma}[a(1-k)-\beta c]$$

$$d=\frac{kb_0}{(\alpha-k)(1-k)-\beta\gamma}[(\alpha-k)c-\beta\gamma]$$

Према томе, биће

$$\begin{aligned} ad-bc&=\frac{kb_0}{(\alpha-k)(1-k)-\beta\gamma}[(\alpha-k)ac-a^2\gamma-(1-k)ac+\beta c^2]\\ &=\frac{kb_0}{(\alpha-k)(1-k)-\beta\gamma}[(\alpha-1)ac-a^2\gamma+\beta c^2],\end{aligned}$$

што, помоћу (15) даје

$$ad-bc=\frac{kb_0}{(\alpha-k)(1-k)-\beta\gamma}\cdot\frac{(\alpha-ka_0)(1-ka_0)\beta\gamma}{\gamma}=0.$$

Треба, међутим, да буде $ad-bc\neq 0$. Према томе, не можемо одредити тражени партикуларни интеграл, ако је $(\alpha-k)(1-k)-\beta\gamma\neq 0$.

Узмимо, ради тога, $(\alpha-k)(1-k)-\delta\gamma=o$ и погледајмо, прво, шта то значи. Пре свега, то значи да једначине (8) и (8*) имају заједнички корен. Лако је видети, по самим једначинама (8) и (8*) или по (9) и (9*) ово: ако су k_1 и k_2 корени једначине (8*), биће корени једначине (8) $\frac{k_1}{a_0}$ и $\frac{k_2}{a_0}$. Не може бити

$\frac{k_1}{a_0} = k_1$, а исто тако ни $\frac{k_2}{a_0} = k_2$, јер би онда било $a_0 = 1$, против претпоставке да је $a_0 \neq 1$; може бити, дакле, или $k_2 = \frac{k_1}{a_0}$ или $k_1 = \frac{k_2}{a_0}$, што је уосталом само разлика у ознакама. Узмимо, на пример, $k_1 = \frac{k_2}{a_0}$, и

$$k_1 = \frac{1+\alpha+\sqrt{(1-\alpha)^2+4\beta\gamma}}{2}$$

$$k_2 = \frac{1+\alpha-\sqrt{(1-\alpha)^2+4\beta\gamma}}{2};$$

тада ће бити

$$a_0 = \frac{1+\alpha-\sqrt{(1-\alpha)^2+4\beta\gamma}}{1+\alpha+\sqrt{(1-\alpha)^2+4\beta\gamma}}, \qquad (17)$$

и заједнички корен је k_1. Ако хоћемо, дакле, да наш задатак има решења, не може диференцијална једначина (2) треће категорије бити ма каква: мора a_0 бити одређено са (17). Таква једначина се може увек начинити: треба у једначини (5), на пример, узети

$$m = \frac{1}{2\pi i} \log \frac{1+\alpha-\sqrt{(1-\alpha)^2+4\beta\gamma}}{1+\alpha+\sqrt{(1-\alpha)^2+4\beta\gamma}}$$

Како је, по претпоставци, $a_0 \neq 1$, то из (17) излази услов $(1-\alpha)^2+4\beta\gamma \neq 0$, услов обрнут ономе које смо имали код диференцијалних једначина (2) друге категорије.

Узмимо да су сви ови услови и испуњени: да је $(1-\alpha)^2 + 4\beta\gamma \neq 0$, да је диференцијална једначина (2) треће категорије тако да је a_0 одређено са (17). Како је b_0 неодређено (према примедби учињеној у № 11), узмимо $b_0 = o$; тада ће, узевши за k вредност

$$k_1 = \frac{1+\alpha+\sqrt{(1-\alpha)^2+4\beta\gamma}}{2},$$

бити, према предњим претпоставкама, и

$$(\alpha-k)(1-k)-\beta\gamma = o$$

и

$$(\alpha-ka_0)(1-ka_0)-\beta\gamma = o,$$

па ће систем

$$b(\alpha-k)+d\beta = o$$

$$b\gamma+d(1-k) = o$$

~~имати решења по b~~ и d која неће бити идентична с нулом. Биће

$$b = -\frac{1-k}{\gamma} d. \tag{18}$$

Сад ће бити и $ad - bc \neq 0$, јер је

$$ad - bc = -\frac{1-k a_0}{\gamma} cd + \frac{1-k}{\gamma} cd$$

$$= \frac{k(a_0 - 1)cd}{\gamma},$$

што није нула, јер, по претпоставци, $a_0 \neq 1$, а нидели смо већ да је због $\alpha - \beta\gamma \neq 0$ и $k \neq 0$.

И тако смо дошли до овог резултата: *ако је једначина* (2) *треће категорије и ако је* $(1-\alpha)^2 + 4\beta\gamma \neq 0$, *једначина* (2) *има партикуларан интеграл* $Z = \frac{a z_0 + b}{c z_0 + d}$ *чији је закон мултиформности у околини тачке* x_0 *дат са* $Z = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + 1}$ $(\alpha - \beta\gamma \neq 0)$, *но зато је потребно да* a_0 *буде одређено са* (17); *треба, да бисмо тај интеграл добили, одредити* a *и* b *помоћу* (15) *и* (18); *варирајући произвољно* c *и* d, *добићемо бесконачно много таквих интеграла.*

13. — Пошто смо у прошлој № доказали егзистенцију функција које имају у околини тачке x_0 закон мултиформности дат са $Z = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + 1}$, остаје је нам још да такве функције формирамо и видимо њихов аналитички облик.

Узмимо, прво, да је $(1-\alpha)^2 + 4\beta\gamma \neq 0$. Тада, према резултатима № 12, треба да имамо једну диференцијалну једначину облика (2) друге категорије. Таква једначина је (4),

$$2\frac{z'''}{z'} - 3\left(\frac{z''}{z'}\right)^2 = \frac{1}{(x - x_0)^2}.$$

Партикуларан интеграл ове једначине је $z_0 = \log(x - x_0)$, који има, у околини тачке x_0, особину $Z_0 = z_0 + 2\pi i$. Тражени партикуларни интеграл биће, према (13) и (14),

$$P = \frac{-\frac{1-\alpha}{2\gamma} c \log(x - x_0) + \frac{1+\alpha}{2\gamma} b_0 c - \frac{1-\alpha}{2\gamma} d}{c \log(x - x_0) + d}$$

Да бисмо добили што простију функцију, узмимо $d = o$:

$$P = -\frac{1-\alpha}{2\gamma} + \frac{1+\alpha}{2\gamma} \cdot \frac{1}{\log(x-x_0)} \cdot 2\pi i,$$

т. ј.

$$P = \frac{1}{\frac{2}{2 i\pi}\frac{2\gamma}{1-\alpha}\log(x-x_0)} + \frac{\alpha-1}{2\gamma}. \tag{19}$$

Узмимо, друго, да је $(1-\alpha)^2+4\beta\gamma \neq 0$. Тада, према резултатима № 12, треба да имамо једну диференцијалну једначину облика (2) треће категорије са

$$a_0 = \frac{1+\alpha-\sqrt{(1-\alpha)^2+4\beta\gamma}}{1+\alpha+\sqrt{(1-\alpha)^2+4\beta\gamma}}.$$

Таква једначина је, према (5),

$$2\frac{z'''}{z'} - 3\left(\frac{z''}{z'}\right)^2 = \frac{1-m^2}{x-x_0},$$

где је $m = \frac{\log a_0}{2\pi i}$. Партикуларни интеграл ове диференцијалне једначине је $z_0 = (x-x_0)^m$, који има особину $Z_0 = a_0 z_0$. Тражени партикуларни интеграл биће, према (15) и (18),

$$Z = \frac{-\frac{1-ka_0}{\gamma}c(x-x)^m + \frac{k-1}{\gamma}d}{c(x-x_0)^m+d}$$

$$= \frac{-\frac{c}{d}\frac{1-ka_0}{\gamma}(x-x_0)^m + \frac{k-1}{\gamma}}{1+\frac{c}{d}x-x_0)^m}$$

Да бисмо добили што простију функцију, узмимо $\frac{c}{d} = -1$:

$$P = \frac{\frac{k-1}{\gamma} + \frac{1-ka_0}{\gamma}(x-x_0)^m}{1-(x-x_0)^m}.$$

С обзиром на изабрану вредност за k (за k смо узели k_1) и на (18) имаћемо:

$$P = \frac{\zeta_1 - \zeta_2(x-x_0)^m}{1-(x-x_0)^m}, \tag{20}$$

ако ставимо:

$$\zeta_1 = \frac{\alpha-1+\sqrt{(1-\alpha)^2+4\beta\gamma}}{2\gamma} \tag{21}$$

$$\zeta_2 = \frac{\alpha - 1 - \sqrt{(1-\alpha)^2 + 4\beta\gamma}}{2\gamma} \tag{22}$$

Тако смо ми и у једном и у другом случају нашли специјалне функције, дате са (19) и (20), које у околини тачке x_0 имају специјални закон мултиформности $Z = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + 1}$. Да бисмо добили општи облик такве функције z помоћу нађених специјалних облика, начинимо функцију

$$u(x) = \frac{P - z}{\left(P + \frac{1-\alpha}{\gamma}\right) z - \frac{\beta}{\gamma}}$$

Лаким рачуном се можемо уверити да је функција $u(x)$ у околини тачке x_0 униформна. Из ове једначине излази

$$z = \frac{P + \frac{\beta}{\gamma} u(x)}{\left(P + \frac{1-\alpha}{\gamma}\right) u(x) + 1} \tag{23}$$

Треба само узети $z = \psi(x, y)$ и поред α, β, γ ставити индекс 1, па имамо резултате идентичне са резултатима из № 6, добивеним првом методом.

14. — Навешћемо овде неколико простих примера одређивања функција, кад им је познат закон мултиформности, а који ће нам требати у даљем излагању.

1^0 $y_1 = y_0 + \alpha_1$. — Према № 4 или № 9 биће

$$y = \frac{\alpha_1}{2\pi i} \log(x - x_0) + u(x)$$

2^0 $y_1 = \alpha_1 y_0$. — Према № 5 или № 10 биће

$$y = (x - x_0)^{\frac{\log \alpha_1}{2\pi i}} . u(x)$$

3^0 $y_1 = y_0 + \alpha_1 \varphi(x)$, где је $\varphi(x)$ униформна функција у околини тачке x_0. Закон мултиформности можежо писати у облику

$$\frac{y_1}{\varphi(x)} = \frac{y_0}{\varphi(x)} + \alpha_1,$$

па је, према № 4 или № 9

$$\frac{y}{\varphi(x)} = \frac{\alpha_1}{2\pi i} \log(x - x_0) + u(x),$$

т. ј.

$$y = \frac{\alpha_1}{2\pi i}\varphi(x)\log(x - x_0) + v(x),$$

где је $v(x)$ произвољна, у околини тачке x_0 униформна функција од x.

4^0 $y_1 = \alpha_1 y_0 + \beta_1 \varphi(x)$, где је $\varphi(x)$ униформа функција у околини тачке x_0. Закон мултиформности можемо писати у облику

$$\frac{y_1}{\varphi(x)} = \alpha_1 \frac{y_0}{\varphi(x)} + \beta_1,$$

па је према № 5 или № 10

$$\frac{y}{\varphi(x)} = (x - x_0)^{\frac{\log \alpha}{2\pi i}} u(x) + \frac{\beta_1}{1 - \alpha_1},$$

т. ј.

$$y = (x - x_0)^{\frac{\log \alpha}{2\pi i}} u(x) + \frac{\beta_1}{1 - \alpha_1}\varphi(x)$$

где је $v(x)$ произвољна, у околини тачке x_0 униформна, функција од x.

5^0 $y_1 = k y_0^m$. Логаритамским диференцирањем добивамо

$$\frac{y_0'}{y_1} = m\frac{y_0'}{y_0},$$

па је, на основи № 5' или № 10

$$\frac{y'}{y} = (x - x_0)^n u(x), \left(n = \frac{\log m}{2\pi i}\right).$$

Како n није цео број, јер је $m \neq 1$, добићемо интегралењем

$$\log y = (x - x_0)^n v(x) + C,$$

где је $v(x)$ униформна функција у околини тачке x_0, а C интеграциона константа. Одавде добивамо

$$y = Ke^{(x - x_0)^n v(x)},$$

где је K константа. Да бисмо одредили K, узећемо за $(x - x)^n$ једну одређену детерминацију, која ће дати једну одређену детерминацију y_0 за y:

$$y_0 = Ke^{(x - x_0)^n v(x)}.$$

Обиђемо ли једанпут око x_0, биће

$$y_1 = Ke^{m(x - x_0)^n v(x)} = K \cdot \frac{y_0^m}{K^m} = K^{1-m} y_0^m.$$

Како, међутим, мора бити $y_1 = k y_0^m$, то треба узети $K^{1-m} = k$, т. ј. $K = k^{\frac{1}{1-m}}$. Прнма томе је:

$$y = k^{\frac{1}{1-m}} e^{(x-x_0)^n v(x)}.$$

§ IV. — Примери за примену на диференцијалне једначине.

15. — Кад је дана диференцијална једначина, па се из ње, не интегралећи је (јер је то, на пример, немогуће) може изнаћи закон мултиформности њених интеграла, генералног и партикуларних, то ће тај податак бити користан за аналитичко проучавање интеграла. Ми ћемо овај принцип показати на примерима.

Узмимо диференцијалну једначину

$$2\frac{z'''}{z'} - 3\left(\frac{z''}{z'}\right)^2 = 4\omega(x), \tag{1}$$

где је $\omega(x)$ униформна функција са изолованим сингуларним тачкама. Упоређујући у № 11 ову једначину са хомогеном линеарном једначином другог реда

$$y'' + y\omega(x) = o, \tag{2}$$

коју смо добили из (1) сменом $z' = \frac{1}{y^2}$, дошли смо до овог резултала: ако је x_0 сингуларна тачка функције $\omega(x)$, једначина (1) има партикуларни интеграл z_0, за који је x_0 изолована критичка тачка са законом мултиформности $Z_0 = a_0 z_0 + b_0$, код кога могу бити три случаја: 1^0 $a_0 = 1, b_0 = o$, 2^0 $a_0 = 1, b_0 \neq o$, 3^0 $a_0 \neq 1$; сем сингуларних тачака функције $\omega(x)$, z_0 не може имати других критичких тачака.

Помоћу овога партикуларног интеграла z_0 можемо добити генерални интеграл:

$$z = \frac{Az_0 + B}{Cz_0 + D}, \tag{3}$$

где су A, B, C, D константе. Одавде се види да је критичка тачка функције z_0 критичка тачка и функције z, и обрнуто. Према томе, генерални интеграл диференцијалне једначине (1) има сталне критичке тачке; то могу бити једино сингуларне тачке функције $\omega(x)$.

Обиђемо ли око x_0 по једноставној затвореној кривој линији која сем x_0 не обухвата више ни једну критичку тачку, имаћемо:

$$Z = \frac{AZ_0 + B}{CZ_0 + D}$$

$$= \frac{Aa_0 z_0 + Ab_0 + B}{Ca_0 z_0 + Cb_0 + D}.$$

Како је, пак, из (3)

$$z_0 = \frac{-Bz + D}{Cz - A}$$

биће

$$Z = \frac{[-ADa_0 + (Ab_0 + B)C]z + [AB(a_0 - 1) - A^2 b_0]}{[-CD(a_0 - 1) + C^2 b_0]z + [CBa_0 - A(Cb_0 + D)]}$$

$$= \frac{A_1 z + B_1}{C_1 z + D_1},$$

одакле се види закон мултиформности за генерални интеграл.

Ако је једначина (1) у околини тачке x_0 друге категорије, т. ј., ако је $a_0 = 1, b_0 \neq o$, биће $(D_1 - A_1)^2 + 4B_1 C_1 = o$; ако је, пак, треће, биће $(D_1 - A_1)^2 + 4B_1 C_1 \neq o$, о чему се лако уверити кратким рачуном.

16. — Обишавши n пута око x_0, z_0 ће прећи у $a_0^n z_0 + (1 + a_0 + a_0^2 + \cdots + a_0^{n-1})b$, а z у z_n, па ће бити

$$z_n = \frac{Aa_0^n z_0 + B + Ab_0(1 + a_0 + a_0^2 + \cdots + a_0^{n-1})}{Ca_0^n z_0 + D + Cb_0(1 + a_0 + a_0^2 + \cdots + a_0^{n-1})}.$$

Узмимо, прво, да је једначина (1) друге категорије: $a_0 = 1, b_0 \neq o$. Да буде $z_n = z$, потребно је овде и довољно да буде

$$nAb_0 = o, nCb_0 = o,$$

што је немогуће, јер b_0 није нула, а A и C не могу бити у исти мах нуле, јер би се z редуцирало на константу. У овом случају, дакле, циркулација око x_0 даје генералном интегралу, а исто тако и свима партикуларним интегралима, бесконачно много разних грана. Узмимо, друго да је једначина (1) треће категорије: $a_0 \neq 1, b_0 = o$. Да буде $z_n = z$, потребно је и довољно да буде $a_0^n = 1$, одакле закључујемо, ако хоћемо да n буде најмањи такав број, $a_0 = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$. У овом случају може, дакле генерални интеграл, а онда и сви партукуларни интеграли, имати тачно n разних грана; за та је потребно и довољно да буде $a_0 = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$.

Према томе, *да генерални интеграл једначине* (1) *има циркулацијом око* x_0 *тачно* n *разних грана, потребно је и довољно да једначина* (1) *буде у околини тачке* x_0 *треће категорије и да буде* $a_0 = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$. *Онда и сви партикуларни интеграли имају тачно* n *грана.*

17. — Са једначином (1) стоји у уској вези једначина

$$u' + u^2 + \omega(x) = o, \qquad (4)$$

која се из (1) добива сменом

$$u = -\frac{1}{2}\frac{z''}{z'}.$$

Из ове смене се одмах види да су критичке тачке једначине (4) сталне; оне могу бити само сингуларне тачке фунције $\omega(y)$. Ово се, уосталом, види и из једначине (2), из које се (4) добива сменом

$$u = \frac{y'}{y}.$$

Партикуларном интегралу z_0 једначине (1) одговара партикуларни интеграл u_0 једначине (4) дат са

$$u_0 = -\frac{1}{2}\frac{z_0''}{z_0'}.$$

Из $z = \frac{Az_0 + B}{Cz_0 + D}$ излази

$$\frac{z''}{z'} = \frac{z_0''}{z_0'} - 2\frac{Cz_0'}{Cz_0 + D}.$$

па је

$$u = u_0 + \frac{Kz_0'}{Kz_0 + 1}, \qquad (5)$$

где је K интегрална константа. Обиђемо ли око x_0, биће

$$U = U_0 + \frac{KZ_0'}{KZ_0 + 1}$$

$$= u_0 + \frac{Ka_0 z_0'}{Ka_0 z_0 + Kb_0 + 1}$$

$$= u + z_0' \frac{K(a_0 - 1) - K^2 b_0}{(Kz_0 + 1)(Ka_0 z_0 + Kb_0 + 1)}, \qquad (6)$$

што нам даје закон мултиформности генералног интеграла у околини тачке x_0.

Узмимо, прво, да је једначина (1) прве категорије, т. ј. $a_0=1, b_0=o$; тада је $U=u$, т. ј. генерални интеграл је униформан у околини тачке x_0.

Узмимо, друго, да је једначина (1) друге категорије, т. ј. $a_0=1, b_0 \neq o$; тада је

$$U=u-z_0' \frac{K^2 b_0}{(Kz_0+1)(Kz_0+Kb_0+1)}.$$

Да буде $U=u$, потребно је и довољно да буде $K=o$. У овом случају, дакле, генерални интеграл једначине (4) је мултиформан, али има та једначина један и то само један униформан партикуларан интеграл; он је дат, према (5), са

$$u=u_0=-\frac{1}{2}\frac{z_0''}{z_0'}.$$

Узмимо, напослетку, да је једначина (1) треће категорије, т. ј. $a_0 \neq 1, b_0=o$; тада је

$$U=u+z_0' \frac{K(a_0-1)}{(Kz_0+1)(Ka_0z_0+1)}.$$

Да буде $U=u$, потребно је и довољно да буде или $K=o$ или $K=\infty$. У овом случају, дакле, генерални интеграл једначине (4) је мултиформан, али та једначина има два разна, и то тачно два, униформна партикуларна интеграла. Они су дати, према (5), са

$$u=u_0=-\frac{1}{2}\frac{z_0''}{z_0'}$$

$$u=u_0+\frac{z_0'}{z_0}=-\frac{1}{2}\frac{z_0''}{z_0'}+\frac{z_0'}{z_0}.$$

Према томе, *да општи интеграл диференцијалне једначине* (4) *буде униформан у околини тачке* x_0, *потребно је и довољно да једначина* (1) *буде прве категорије; ако то није, једначина* (4), *ипак, има један или два униформна партикуларна интеграла, према томе да ли је једначина* (1) *у околини тачке* x_0 *друге или треће категорије,*

Ако, дакле, једначина (4) у околини неке тачке има три униформна партикуларна интеграла, и генерални интеграл је униформан.

18. — Код партикуларних униформних интеграла једначине (4) могу се добити и извесни подаци о резидуима. ...

~~Ако је генерални~~ интеграл једначине (4) униформан, тада је, видели смо, z_0 униформна функција у околини тачке x_0, па је, према (5),

$$u = -\frac{1}{2}\frac{z_0''}{z_0'} + \frac{K z_0'}{K z_0 + 1}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{d \log z_0'}{dx} + \frac{d \log (K z_0 + 1)}{dx}.$$

Како су z_0' и $K z_0 + 1$ униформне функције у околини тачке x_0, то су резидуа њихових логаритамских извода цели бројеви, *па је резидуум од* u *с обзиром на* x_0 *половина целог броја.*

Ако једначина (4) има само један униформан партикуларни интеграл, онда је једначина (1) друге категорије, па z_0 има облик $z_0 = \log (x - x_0) + v(x)$, где је $v(x)$ униформна функција у околини тачке x_0; према томе, z_0' је униформна функција у околини тачке x_0. Према резултату добивеном у прошлој №, овај једини униформан партикуларни интеграл једначине (4) дат је са

$$u_0 = -\frac{1}{2}\frac{z_0''}{z_0'},$$

па видимо *да му је резидуум половина целог броја.*

Ако је једначина (4) има два униформна партикуларна интеграла у околини тачке x_0, једначина (1) је треће категорије, па z_0 има облик $z_0 = (x - x_0)^m v(x)$, где m није цео број и где је $v(x)$ униформна функција у околини тачке x_0. Један од тих партикуларних интеграла је, према извођењима прошле №, дат са

$$-\frac{1}{2}\frac{z_0''}{z_0'} = -\frac{1}{2}\frac{m-1}{x-x_0} - \frac{1}{2}\frac{[m v(x) + (x-x_0) v'(x)]'}{m v(x) + (x-x_0) v'(x)}.$$

Како је $m v(x) + (x - x_0) v'(x)$ униформна функција у околини тачке x_0, то је резидуум од $\dfrac{[m v(x) + (x-x_0) v'(x)]'}{m v(x) + (x-x_0) v'(x)}$ с обзиром на тачку x_0 цео број k; резидуум од $-\dfrac{1}{2}\dfrac{z_0''}{z_0'}$ биће, дакле, $\dfrac{1}{2}(1-m) - \dfrac{1}{2}k$, т. ј. није половина целог броја. Други униформан партикуларан интеграл дат је са

$$-\frac{1}{2}\frac{z_0''}{z_0'} + \frac{z_0'}{z_0} = -\frac{1}{2}\frac{z_0''}{z_0'} + \frac{m}{x-x_0} + \frac{v'(x)}{v(x)},$$

па му је резидуум

$$\frac{1}{2}(1-m) - \frac{1}{2}k + m + k_1 = \frac{1}{2}(m+1) + k_1 - \frac{1}{2}k,$$

т. ј. опет није половина целог броја. Сума ова два резидуа је, као што се лако види, половина целог броја. У овом случају, дакле, *ни један ни други резидуум није половина целог броја, али њихова сума је половина целог броја.*

Обрнуто можемо рећи: ако је резидуум једног униформног партикуларног интеграла једначине (4) с обзиром на тачку x_0 половина целог броја, та једначина или нема више униформних партикуларних интеграла у околини те тачке или је и генерални интеграл униформан. Ако диференцијална једначина (4) има два униформна партикуларна интеграла у околини тачке x_0, резидуа тих партикуларних интеграла с обзиром на тачку x_0 или су оба половина целог броја или оба то нису; у првом случају, генерални интеграл је униформан у околини тачке x_0, у другом је мултиформан.

19. — Узмимо да диференцијална једначина (4) има само један униформан партикуларан интеграл; тада је $u_0 = -\frac{1}{2}\frac{z_0''}{z_0'}$ униформна функција у околини тачке x_0. Обиђемо ли око x_0 n пута, једначина (5) ће дати

$$u_n = u_0 + \frac{K z_0}{K(z_0 + n b_0) + 1},$$

па не може бити $u_n = u$. У овом случају, дакле, *и генерални интеграл и сви партикуларни интеграли циркулацијом око* x_0 *дају бесконачно много грана.*

Ако диференцијална једначина (4) има у околини тачке x_0 два униформна партикуларна интеграла, тада је u_0 опет униформна функција у околини тачке x_0. Обиђемо ли n пута око x_0, једначина (5) ће дати

$$u_n = u_0 + \frac{K a_0^n z_0'}{K a_0^n z_0 + 1}.$$

Да, дакле, у овом случају генерални интеграл има тачно n *грана циркулацијом око* x_0, *потребно је и довољно да буде* $a_0 = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$; *тада и сви партикуларни интеграли имају тачно* n *грана.*

20. — Расматрајући једначине (1) и (4), видимо да је крајњи критеријум за све категорија једначине (1) и број a_0, ако је (1) треће категорије. Ако знамо одредити категорију једначине (1) и прорачунати број a_0, наши резултати биће потпуно прецизни.

Тај посао — одређивање категорије једначине (1) и прорачунавање броја a_0 — не изгледа лак ни кратак у генералном случају. Но, могу се дати не сасвим генерални, али важни, случајеви у којима је то могуће. Цео посао има сличности са теоријом регуларних и ирегуларних интеграла линеарних хомогених диференцијалних једначина.

Међутим, потпуно расправљање овог питања премашило би оквир овог рада.

САДРЖАЈ