U N I V E R Z I T E T U B E O G R A D U

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

MILUTIN DOSTANIĆ

POTPUNOST, MINIMALNOST I BAZISNOST SVOJSTVENIH FUNKCIJA PRAMENOVA DIFERENCIJALNIH OPERATORA

- doktorska disertacija -

BEOGRAD
1984.

S A D R Ž A J

U V O D

Funkcionalna analiza je poslednjih decenija doživela veoma buran razvoj, tako da su njene metode počele da se primenjuju u skoro svim oblastima matematike. Ali u okviru funkcionalne analize ima nekoliko pravaca koji u značajnom stepenu definišu njen predmet. Jedan od tih krupnih pravaca je teorija linearnih operatora, specijalno spektralna teorija linearnih operatora. Praktično najvažniji delovi te teorije dugo vremena su bili rezultati D. Hilberta i F. Risa, koji su se odnosili na integralne jednačine tipa Fredholma. Bila su izučena svojstva kompaktnih operatora i za njih dokazana spektralna razlaganja. Kasnije su dokazane spektralne teoreme koje se odnose na proizvoljne ograničene ili neograničene samokonj. operatore na Hilbertovom prostoru.

Tako se naporom niza matematičara spektralna teorija samokonjugovanih operatora veoma razvila.

Za razliku od spektralne teorije samokonjugovanih operatora, koja je bila razvijena i u kojoj su, kao što je rečeno već, pronadjena spektralna razlaganja, teorija nesamokonjugovanih operatora je bila veoma nerazvijena. U njoj nije bilo nikakvih spektralnih razlaganja niti kakvih krupnijih rezultata.

Početkom šezdesetih godina napravljen je prvi veliki korak u apstraktnoj teoriji nesamokonjugovanih operatora. Godine 1951. u DANSSSR pojavio se rad [15] M.V. Keldiša, u kome je on formulisao (a 1971. god. u radu [16] dao dokaze) teoreme o potpunosti svojstvenih i prisajedinjenih vektora i teoreme o asimptotskim svojstvima svojstvenih vrednosti za široku klasu polinomijalnih pramenova nesamokonjugovanih operatora.

Potreba za izučavanjem takvih pramenova ukazala se kod razmatranja nekih pitanja gasne dinamike, koja se svode na parcijalne diferencijalne jednačine koje ne čuvaju svoj tip u razmatranoj oblasti i na njenoj granici.

Ovaj rad M.V. Keldiša stimulisao je mnoge matematičare da se bave sličnim problemima. Tih godina M.S. Livišic i grupa njegovih saradnika dolazi do novih rezultata u teoriji nesamokonjugovanih operatora. Tom prilikom je dokazana teorema o potpunosti sistema radikalnih vektora disipativnih operatora sa nuklearnom imaginarnom komponentom. Problemima potpunosti sistema radikalnih vektora nekih klasa operatora bavili su se M.G. Krejn, V.I. Macaev, A.S. Markus, V.B. Lidskij i drugi. Njihovi osnovni rezultati do polovine sedamdesetih godina ušli su u monografiju [7] I.C. Gohberga i M.G. Krejna.

Godine 1962. pojavio se važan rad [26] V.B. Lidskog posvećen pitanjima zbirljivosti redova po radikalnim vektorima nesamokonjugovanih kompaktnih operatora. Dokaz osnovne teoreme zasnovan je na složenom ispitivanju rasta rezolvente operatora.

Rad Lidskog je inspirisao A.G. Kostjučenka i G.V. Radznevskog da ustanove teoreme koje se odnose na zbirljivost po Abelu n-tostrukih razlaganja.

Godine 1978. A.G. Kostjučenko i A.A. Škalikov [19] su dokazali teoreme koje se odnose na zbirljivost razvoja po svojstvenim funkcijama nekih klasa diferencijalnih operatora i operatora konvolucije. Razmatranja tih pitanja i u apstraktnom slučaju i kada se radi o diferencijalnim operatorima, u osnovi počiva na složenom ispitivanju rasta rezolvente odnosno funkcije Grina.

Ali pri proučavanju nekih sistema funkcija nemamo na raspolaganju rezolventu i odgovoriti na pitanje zbirljivosti, potpunosti, bazisnosti je veoma teško čak i u slučaju najprostijih sistema.

Posle pojave rada M.V. Keldiša, 1951. godine, M.G. Krejn i G.K. Langer pristupaju proučavanju kvadratnih operatornih pramenova, tj. operatora oblika $L(\lambda) = I + 2\lambda F + \lambda^2 C$ (λ spektralni parametar). Za operator F se pretpostavlja da je samokonjugovan i ograničen a operator C je kompaktan i pozitivan. Oni utvrdjuju egzistenciju operatornog korena Z koji ima odredjena svojstva i zadovoljava uslov

$$Z^2 + 2FZ + C = 0$$

Pri proučavanju kvadratnih pramenova gornjeg oblika oni su se služili činjenicama teorije operatora u prostorima sa indefinitnom metrikom. Ovakav pristup problematici bio je principijelno nov i sa rezultatima M.V. Keldiša čini osnovu pri proučavanju polinomijalnih pramenova. Osnovna tvrdjenja koja su u vezi s tim nalaze se u radu [21].

Rezultati Krejna i Langera omogućili su da se ustanovi potpunost dela sistema svojstvenih i prisajedinjenih vektora kvadratnog pramena. Njihove rezultate su proširili A.G. Kostjučenko i M.B. Orazov [17].

Ovakvim pitanjima bavili su se i bave se uglavnom matematičari u SSSR.

Sa razvojem teorije nesamokonjugovanih operatora, došlo je do sve većeg korišćenja aparata teorije analitičkih funkcija. Mnoga tvrdjenja teorije funkcija su dobijena baš prilikom izučavanja samih operatora. U današnje vreme, metode teorije funkcija su postale osnovni aparat pri proučavanju spektralnih svojstava nesamokonjugovanih operatora.

Diferencijalni operator generisan diferencijalnim izrazom

$$l(y) = y^{(n)} + p_1(x,\lambda)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x,\lambda)y, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

a graničnim uslovima

$$U_i(y) = \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_{ik} y^{(k)}(0) + \beta_{ik} y^{(k)}(1)) \qquad i = 1,2 \dots n$$

zvaćemo diferencijalnim pramenom. Ukoliko koeficijenti α_{ik} i β_{ik} zavise od parametra λ imaćemo na raspolaganju jedan granični zadatak.

Mi ćemo povremeno raditi sa pramenovima gornjeg oblika gde je $p_\nu(x,\lambda) = a_\nu \lambda^\nu$.

Pramenovi diferencijalnih operatora dovode nas do potrebe ispitivanja svojstava raznih sistema analitičkih funkcija (u smislu potpunosti, minimalnosti i bazisnosti) u raznim prostorima. To je ozbiljan zadatak, ali u mnogim slučajevima on se uspešno rešava metodama sličnim metodu Keldiša. Pri tome se bitno koriste analitička svojstva funkcije Grina.

Ali problem ispitivanja potpunosti, minimalnosti, a pogotovu bazisnosti nekih sistema čisto analitičkim aparatom težak je. Metode za to nisu razvijene, ali postoje neki parcijalni rezultati [35], koji se mogu lepo primenjivati u nekim prilikama.

Osnovna teškoća u radu sa nekim opštim sistemima koji ne potiču od nekog unapred zadanog diferencijalnog pramena (ili graničnog zadatka) se sastoji u činjenici da nam na raspolaganju ne stoji funkcija Grina i mogućnost njene ocene.

Ova disertacija je posvećena proučavanju nekih sistema koji su uopštenja sistema svojstvenih funkcija pramenova diferencijalnih operatora sa stanovišta potpunosti i minimalnosti. Takodje će biti proučavani sistemi svojstvenih funkcija nekih konkretnih graničnih zadataka. Metode koje će biti korišćene su analitičko funkcionalne prirode.

Disertacija je podeljena u četiri poglavlja.

U prva dva poglavlja navode se poznata tvrdjenja iz teorije analitičkih funkcija i funkcionalne analize koja su prilagodjena potrebama treće i četvrte glave. Tvrdjenja su skoro po pravilu navodjena bez dokaza.

Teoreme i razni pojmovi koji se odnose na teoriju analitičkih funkcija uzimani su iz knjiga [5], [12], [24], [25], [28], [33] i [34].

Pri pisanju druge glave koja se odnosi na teoriju nesamokonjugovanih operatora korišćene su knjige [1], [2], [3], [7], [8], [21], [22] kao i radovi [15], [16] i [17].

Rezultati disertacije nalaze se u trećoj i četvrtoj glavi.

Treća glava ima 5 paragrafa.

U §1 biće dokazane teoreme koje predstavljaju uopštenja teoreme M.G. Gasimova o n-tostrukoj potpunosti nekih sistema funkcija u prostoru $L_2(0,1)$. Tvrdjenja se dokazuju čisto analitičkim sredstvima. Navedena je primena tih rezultata na neke diferencijalne pramenove.

U §2 biće razmatrani sistemi oblika $\{\phi(x,\lambda_n)\}_{n=1}^{\infty}$, gde je $\phi(x,\lambda) = a_1 e^{\lambda\omega_1} + b_1 e^{\lambda\omega_2}$ i λ_n su nule cele funkcije $G(\lambda) = ae^{\lambda\omega_1} + be^{\lambda\omega_2}$

Za takav sistem, može se primetiti da se ne može primeniti metod M.G. Gasimova iz rada [4] niti metod koji je poslužio za uopštenje teoreme Gasimova.

S druge strane taj sistem predstavlja uopštenje sistema svojstvenih funkcija pramena

$$y'' + a\lambda y' + \lambda^2 y = 0 \qquad -2 < a < 2,$$
$$y(0) = y(\pi) = 0$$

koji se pojavio pri izučavanju nekih pitanja hidrodinamike.

Za taj sistem ustanovljena je, pod nekim uslovima, dvostruka potpunost i minimalnost u prostoru $L_2(0,1)$.

U §3 dokazana je teorema koja daje jedan dovoljan uslov da sistem $\{e^{-\alpha\lambda_n x}\sin\lambda_n x\}_{n=1}^{\infty}$ nije baza prostora $L_2(0,\pi)$.

U §4 biće dokazana teorema koja se odnosi na problem zbirljivosti po Abelu reda Furije nekih funkcija po sistemu $\{e^{i\lambda_n x}\}_{n=1}^{\infty}$. Dokaz je čisto analitički.

Biće ispitivana svojstva bazisnosti (na kompaktima) sredina Risa za sistem $\{e^{i\lambda_n x}\}_{n=1}^{\infty}$. Pri tom će bitno biti iskorišćen rezultat V.A. Iljina koji se odnosi na ispitivanje svojstva bazisnosti sredina Risa spektralnih razlaganja dif. operatora.

Na kraju u §5 biće dokazana teorema o potpunosti sistema $\{e^{\alpha(n+a)x}\sin(n+a)x\}_{n=0}^{\infty}$ $(-\frac{1}{4}< a < \frac{1}{4})$ u prostoru $L_2(0,\pi)$. To predstavlja uopštenje rezultata B. Levina [25] iz 1971. godine.

Četvrta glava ima četiri paragrafa.

U §1 se razmatra pitanje bazisnosti po Risu sistema svojstvenih funkcija graničnog zadatka

$$y'' + \lambda^2 y + \phi(y) = 0$$
$$y(0) = y(\pi) = 0,$$

gde je ϕ ograničeni linearni funkcional na $L_2(0,\pi)$.

Dokazano je da ako funkcional ϕ zadovoljava neke uslove tada se "skoro" samo od sistema svojstvenih funkcija, gornjeg zadatka, koje odgovaraju realnim svojstvenim vrednostima, može sastaviti Risova baza.

U §2 se dokazuje dvostruka potpunost sistema svojstvenih i prisajedinjenih vektora jednog kvadratnog pramena (koji je dosta izučavan) koji je "poremećen" linearnim funkcionalom $\int_0^{\pi} y(x)dx$.

U §3 dokazaćemo zbirljivost po Abelu (odredjenog poretka) reda Furje nekih funkcija iz $L_2(0,\pi)$ po sistemu $\{e^{-\alpha n x}\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$. Pri tome će bitno biti iskorišćene teoreme M.G. Krejna, G.K. Langera [21] i V.B. Lidskog [26].

Na kraju, u §4 navedeno je pet zadataka koji nisu rešeni. Za neke od njih se pretpostavlja da bi prethodno trebalo formulisati i dokazati neke teoreme jedinosti (novog tipa) analitičkih funkcija, pa ih iskoristiti u teoriji operatora (A.G. Kostjučenko).

Sva tvrdjenja u disertaciji koja nisu snabdevena oznakom za literaturu smatram svojim.

Rezultati disertacije predati su u štampu u okviru radova [9], [10] i [11].

Na kraju, želeo bih da se na ovom mestu zahvalim profesoru Moskovskog Univerziteta, doktoru A.G. Kostjučenku, za postavku zadataka i stalni interes za moj rad, za vreme mog boravka u Moskvi.

Takodje, dugujem veliku zahvalnost dr Branislavu Mirkoviću, koji je dao korisne sugestije i doprineo da disertacija bude preciznije i jasnije napisana.

G L A V A I

NEKE ČINJENICE TEORIJE ANALITIČKIH FUNKCIJA

§1. Cele funkcije

U ovom paragrafu biće navedene osnovne činjenice teorije celih funkcija koje su neophodne za dalji rad.

Funkcija f(z) analitička u celoj kompleksnoj ravni naziva se celom funkcijom. Radijus konvergencije njenog stepenog reda je ∞. Klasa celih funkcija raspolaže svojstvima koja su najviše bliska svojstvima polinoma. Za polinome znamo prostu teoremu jedinstvenosti: ako polinom stepena n ima više od n nula, to je on identički jednak nuli. Analogno tvrdjenje važi i za cele funkcije: cela funkcija kojoj su nule rasporedjene "vrlo gusto" i koja ne raste "veoma brzo" identički je jednaka nuli [25]. Razne teoreme toga tipa nalaze primene u teoriji diferencijalnih operatora.

Prilikom proučavanja celih funkcija ukazuje se potreba njihove klasifikacije prema brzini rasta njihovog modula.

Neka je f(z) neka cela funkcija. Označimo sa

$$M(r) = \max_{|z| = r} |f(z)|.$$

Poznato je da moduo analitičke funkcije ne može dostići svoj maksimum unutar kruga. Prema tome funkcija M(r) je rastuća.

Def. 1.1. Poretkom cele funkcije f(z) naziva se

broj $$\rho = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\ln M(r)}{\ln r} .$$

Tačniju karakteristiku rasta funkcije datog poretka daje tip funkcije.

Def. 1.2. Tipom σ cele funkcije f(z) poretka ρ naziva se

broj $$\sigma = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M(r)}{r^{\rho}}$$

Iz definicije 1.1. sledi da je

$$e^{r^{\rho-\varepsilon}} < M(r) < e^{r^{\rho+\varepsilon}} \qquad (\varepsilon \text{ proizvoljan poz. broj})$$

pri čemu desna nejednakost ispunjena za svako r koje je dovoljno veliko, a leva nejednakost je ispunjena za neki niz $\{rn\}$ koji konvergira ka $+\infty$

Iz definicije 1.2. sledi da je

$$e^{(\sigma-\varepsilon)r^{\rho}} < M(r) < e^{(\sigma+\varepsilon)r^{\rho}} \qquad (\varepsilon \text{ je proizvoljan poz. broj})$$

pri čemu je desna nejednakost ispunjena za svako r koje je dovoljno veliko, a leva nejednakost je ispunjena za neki niz $\{r_n\}$ vrednosti r, koji konvergira $+\infty$.

Ako je $\sigma = 0$, kaže se da funkcija f(z) ima minimalni tip a ako je $\sigma = \infty$ maksimalni.

Funkcije prvog poretka i normalnog tipa (tj. $0<\sigma<\infty$) nazivaju se funkcije eksponencijalnog tipa.

Za karakterizaciju zavisnosti rasta funkcije konačnog poretka ρ, analitičke unutar ugla $\theta_1 \leqslant \arg z \leqslant \theta_2$, od pravca po kojem tačka z teži beskonačnosti Fragmen i Lindelef su uveli funkciju

$$h(\theta) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r^{\rho}} \qquad (\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2)$$

koju nazivaju indikatorom funkcije f(z).

Može se dokazati da je tip ς funkcije f(z) jednak

$$\max_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} h(\theta) \qquad ([24]).$$

Prilikom razmatranja pitanja potpunosti nekih sistema funkcija koristićemo se uopštenjem principa maksimuma modula (kada se radi o beskonačnim oblastima). U tom smislu navedimo teoremu koja leži u osnovi principa Fragmena i Lindelefa.

Teorema 1.1. [24]. Neka je funkcija f(z) analitička u nekoj oblasti G i neka postoji funkcija $\omega(z)$ analitička u toj oblasti, pri čemu $f(z)[\omega(z)]^{\delta}$ ima pri svakom $\delta>0$ graničnu vrednost u svim tačkama granice G (uključujući i beskonačno daleku tačku ako je ona granična) i na celoj granici ∂G je ispunjeno

$$|f(z)|\,[\omega(z)]^{\delta} \leqslant M$$

pri čemu M ne zavisi od δ.

Tada je $|f(z)| \leq M$ na svoj oblasti G.

Dokaz: Iz principa maksimuma modula sledi da ispunjenost uslova $|f(z)|[\omega(z)]^{\delta} < M$ na granici ∂G povlači ispunjenje te nejednakosti svuda unutar te oblasti*). Neka tačka z_0 pripada oblasti G u $\omega(z_0) \neq 0$. Tada pri svakom $\delta > 0$ je

$$|f(z_0)| \leq M |\omega(z_0)|^{-\delta}$$

Iz poslednjeg dobijamo (kada $\delta \to 0$): $|f(z_0)| \leq M$.

Koreni funkcije $\omega(z)$ su izolovane tačke i po principu maksimuma modula nejednakost $|f(z)| \leq M$ je ispunjena i u tim tačkama, tj. u celoj oblasti G.

Teorema 1.2. [24]. Neka je f(z) cela funkcija poretka ρ takva da je na kracima ugla čiji je otvor manji od π/ρ ograničena konstantom M. Tada je $|f(z)| \leq M$ za svako z koje pripada uglu.

Dokaz: Ne narušavajući opštost možemo razmatrati ugao $\{z : |\arg z| < \beta\}$. $(\beta < \pi/2\rho)$

Stavimo $\omega(z) = e^{-z^{\gamma}}$ $(|\arg z| \leq \beta)$, gde je $\rho < \gamma < \pi/2\beta$.

Tada unutar ugla $\{z : |\arg z| \leq \beta\}$ važi:

$$|f(z)[\omega(z)]^{\delta}| = |f(z)| e^{-\delta r^{\gamma} \cos\gamma\phi} \qquad (z = re^{i\phi},\ \delta > 0).$$

Odatle se dobija da pri $\rho < \rho_1' < \gamma$ važi:

$$|f(z)| |\omega(z)|^{\delta} < e^{r^{\rho_1} - \delta r^{\gamma} \cos\gamma\phi}$$

Odatle sledi da funkcija $f(z)[\omega(z)]^{\delta}$ ravnomerno konvertira ka nuli unutar ugla $\{z : |\arg z| \leq \beta\}$ kada $|z| \to \infty$.

Osim toga modul funkcije je ograničen brojem M na stranama ugla pa prema opštem principu Fragmena Lindelofa važi

$$|f(z)| \leq M.$$

U slučaju da je otvor ugla baš jednak $\pi/2\rho$ važi sledeća teorema:

---

* Ako funkcija $\omega(z)$ ima korene u oblasti G, to $f(z)[\omega(z)]^{\delta}$ nije analitička u G, no modul te višeznačne funkcije je jednoznačan u G. Princip maksimuma modula se prenosi na taj slučaj bez bitnih izmena u dokazu.

Teorema 1.3. [24]. Ako je $f(z)$ cela funkcija poretka ρ i tipa $\sigma>0$ koja na kracima ugla $\{z:|\arg z|\leq\pi/2\rho\}$ zadovoljava nejednakost $|f(re^{\pm\pi/2\rho\, i})|\leq M$, tada unutar ugla važi nejednakost:

$$|f(re^{i\phi})|\leq M\ e^{\sigma r^{\rho}\cos\rho\phi} \qquad (|\phi|\leq\pi/2\rho)$$

Dokaz: Funkcija $\phi_\varepsilon(z) = e^{-(\sigma+\varepsilon)z^{\rho}}f(z)$ je ograničena na stranama ugla $\{z:|\arg z|\leq\pi/2\rho\}$ i osim toga je ograničena na poluosi $(0,\infty)$. Primenjujući na tu funkciju teoremu 1.2. unutar svakog od uglova $\{z:\ 0\leq\arg z\leq\pi/2\rho\}$ i $\{z:\ -\pi/2\rho\leq\arg z\leq 0\}$ zaključujemo da je $\phi_\varepsilon(z)$ ograničena unutar svakog od njih. Prema posledici opšteg principa Fragmena Lindelofa zaključujemo da važi

$$|\phi_\varepsilon(z)|\leq M,$$

ili

$$|f(z)|\leq M\ e^{(\sigma+\varepsilon)r^{\rho}\cos\rho\phi} \qquad (|\phi|\leq\pi/2\rho)$$

Na kraju zbog proizvoljnosti ε dobijamo

$$|f(z)|\leq M\ e^{\sigma r^{\rho}\cos\rho\phi}$$

Posledica: Ako je cela funkcija $f(z)$ ne više nego prvog poretka i minimalnog tipa i njen modul ograničen na bilo kojoj pravoj kroz kordinatni početak, tada je ona konstanta.

Dokaz: Pod gornjim pretpostavkama $|f_r(z)|$ je ograničena funkcija u svakoj od poluravni na koje ta prava deli ravan, tj. $|f(z)|$ je ograničena u celoj ravni, pa prema teoremi Liuvila $f(z)$ je konstanta.

Sledeće tvrdjenje se analogno dokazuje kao prethodno.

Teorema 1.4. [24]. Neka je $f(z)$ funkcija analitička u traci $\{z:|\mathrm{Jm}z|\leq\gamma\}$ pri čemu je $|f(x\pm i\gamma)|\leq M$ i $|f(x+iy)|\leq N\ e^{e^{k|x|}}$ $(M,N>0)$ i $0\leq k<\pi/2\gamma$.

Tada je $|f(z)|\leq M$ u celoj traci.

Primedba 1.1. Prethodne teoreme prenose se i na apstraktne analitičke funkcije, tj. funkcije čije vrednosti pripadaju nekom Banahovom prostoru.

Za naša dalja razmatranja važan je pojam funkcije oslonca zatvorenog konveksnog skupa u $\mathbb{C}$.

Neka je G zatvoren konveksan skup u $\mathbb{C}$. Funkcijom oslonca konveksne oblasti G nazivamo funkciju

$$k(\phi) = \sup_{z\in G} \operatorname{Re}\,(ze^{-i\phi}) \quad (= \sup_{x+iy\in G} (x\cos\phi + y\sin\phi)$$

Iz ograničenosti i zatvorenosti oblasti G sledi da se suprenum dostiže u nekoj tački oblasti G. Pravu

$x\cos\phi + y\sin\phi - k(\phi) = 0$ označavamo sa ℓ_ϕ

Prave ℓ_ϕ nazivamo pravama oslonca oblasti G. Geometrijski smisao funkcije oslonca je jasan. Ona je jednaka rastojanju prave oslonca od kordinatnog početka. Na primer, funkcija oslonca tačke $z_0 = \rho e^{i\phi_0}$ ima oblik $k(\phi) = \rho\cos(\phi-\phi_0)$. Odavde se neposredno dobija da je funkcija oslonca konveksnog polinoma čija su temena tačke $z_\nu = \rho_\nu e^{i\phi_\nu}$ $(\nu = 1,2\ldots n)$ sledeća:

$$k(\phi) = \max_{1\leq \nu\leq n} \rho_\nu \cos(\phi-\phi_\nu)$$

Ranije uvedeni indikator analitičke funkcije ima sledeće svojstvo.

Teorema 1.5. [24]. Indikator $h(\phi)$ funkcije $f(z)$ analitičke i poretka ρ unutar ugla $\{z:\phi_1\leq \arg z\leq \phi_r\}$, $\phi_3-\phi_1< \pi/\rho$ zadovoljava uslov

$$h(\phi_1)\sin\rho(\phi_2-\phi_3)+h(\phi_2)\sin\rho(\phi_3-\phi_1)+h(\phi_3)\sin\rho(\phi_1-\phi_2)\leq 0$$

pri $\phi_1 < \phi_2 < \phi_3$.

Prethodnu jednakost nazivamo osnovnim svojstvom indikatora.

S druge strane sledeća teorema daje karakteristično svojstvo funkcije oslonca konveksne oblasti.

Teorema 1.6. [24]. Da bi funkcija $k(\phi)$ bila funkcija oslonca ograničene konveksne oblasti neophodno je i dovoljno da su ispunjeni uslovi

a) $k(\phi+2\pi) = k(\phi)$

b) $k(\phi_1)\sin(\phi_2-\phi_3)+k(\phi_2)\sin(\phi_3-\phi_1)+k(\phi_3)\sin(\phi_1-\phi_2)\leq 0$ pri svim $\phi_1<\phi_2<\phi_3$, $\phi_3-\phi_2<\pi$, $\phi_2-\phi_1<\pi$.

Iz teorema 1.5. i 1.6. sledi da je indikator rasta proizvoljne cele funkcije eksponencijalnog tipa, funkcija oslonca neke ograničene konveksne oblasti. Ta konveksna oblast se naziva indikatornim dijagramom date cele funkcije.

Def. 1.3. Cela funkcija f(z) je konačnog stepena σ, ako je ne više nego prvog poretka i normalnog tipa. Pri tome stepen funkcije f(z) je veličina

$$\sigma = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M(r)}{r} \quad .$$

Funkcije konačnog stepena se često sreću u raznim primenama, specijalno u graničnim zadacima teorije diferencijalnih jednačina.

Svakoj celoj funkciji konačnog stepena

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$$

možemo pridružiti funkciju

$$\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}} \qquad (1.1.)$$

koja se naziva funkcija asocirana po Borelu funkciji f(z).

Ako je σ stepen funkcije f(z), to je

$$\sigma = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$$ i red (1.1.) predstavlja analitičku

funkciju u oblasti $\{z: |z|>\sigma\}$.

(Pri tome se služimo činjenicom: Ako je cela funkcija g(z) izražena potencijalnim redom

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n$$

i ima poredak σ i tip σ, tada je

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n\ln n}{\ln\frac{1}{|C_n|}}$$

i $$(\sigma e \rho)^{1/\rho} = \overline{\lim_{n\to\infty}} (n^{1/\rho} \sqrt[n]{|C_n|}$$ [24] ili [28].)

Može se desiti da se funkcija $\phi(z)$ može analitički produžiti i unutar kruga $z: |z|\leq\sigma\}$.

Def. 1.4. Najmanja konveksna oblast $\bar{I}$ koja sadrži sve singularitete funkcije $\phi(z)$ naziva se konjugovan dijagram funkcije $f(z)$.

Drugim rečima konjugovani dijagram funkcije $f(z)$je najmanja konveksna oblast $\bar{I}$ na čiji komplement se može analitički produžiti funkcija asocirana po Borelu funkciji $f(z)$.

Očevidno da je konjugovani dijagram sadržan u krugu $\{z: |z|\leq\sigma\}$.

Sledeća znamenita teorema, koju ćemo kasnije koristiti, pripada Poliju.

Teorema 1.7. [24]. Konjugovani dijagram proizvoljne cele funkcije konačnog stepena se dobija iz njenog indikatornog dijagrama simetričnim preslikavanjem u odnosu na realnu osu.

Neka je $k(\phi)$ funkcija oslonca konjugovanog dijagrama $\bar{I}$ cele funkcije $f(z)$ konačnog stepena. Tada se sadržaj prethodne teoreme kratko može zapisati

$h(\phi) = k(-\phi)$. ($h(\phi)$ je indikator funkcije f).

Primer: Ako je $f(z) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{\lambda_k z}$, to je funkcija asocirana po

Borelu $\phi(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{z-\lambda_k}$ i konjugovani dijagram je najmanja konveksna oblast (u ovom slučaju poligon), koja sadrži sve tačke λ_k.

Cele funkcije konačnog stepena koje na realnoj osi pripadaju prostoru $L_2(R)$ imaju pogodne reprezentacije. O tome govori sledeća teorema Peli Vinera.

Teorema 1.8. [24]. Da bi funkcija $f(x)$ $(-\infty< x< \infty)$ dopuštala reprezentaciju

$$f(x) = \int_a^b e^{i\lambda x}\,\psi(\lambda)d\lambda \qquad (\psi\in L^2(a,b)),$$

neophodno je i dovoljno, da funkcija $f(x)$ ima integrabilan kvadrat modula na R i da se može analitički produžiti na ravan kao cela funkcija konačnog stepena. Pri tom, ako se interval (a,b) ne može zameniti manjim intervalom onda se odsečak (ia,ib) imaginarne ose poklapa sa konjugovanim dijagramom funkcije f(z).

Prethodnu teoremu ćemo koristiti pri ispitivanju dvostruke minimalnosti nekih sistema funkcija.

Prilikom razmatranja zbirljivosti reda Furje nekih funkcija koristićemo se teoremom o oceni modula analitičke funkcije odozdo.

Teorema 1.9. [24]. Neka je funkcija $f(z)$ analitička u krugu $\{z: |z|\leq 2eR\}$ $(R>0)$, $f(0) = 1$ i η proizvoljan pozitivan broj koji ne prevazilazi $3e/2$. Tada, unutar kruga $\{z: |z|\leq R\}$ ali van nekih krugova (čiji su centri nule funkcije $f(z)$)sa ukupnom sumom radijusa manjom od $4\eta R$ važi ocena

$$\ln|f(z)|>-H(\eta)\ \ln M(2eR)$$

gde je $\quad H(\eta) = 2 + \ln \frac{3e}{2\eta}$. (Ovde $M(r)$ kao i ranije

znači $\quad \max\limits_{|z|=r}|f(z)|$).

Neposredna posledica prethodnog tvrdjenja, kojom ćemo se više puta koristiti, odnosi se na opisivanje poretka i tipa proizvoda dve cele funkcije.

Teorema 1.10. [24]. a) Poredak proizvoda dve cele funkcije različitog poretka jednak je većem od poredaka faktora a tip proizvoda jednak tipu one funkcije koja ima veći poredak.

b) Poredak proizvoda dve cele funkcije istog poretka ρ od kojih je jedna normalnog tipa σ, a druga minimalnog tipa je cela funkcija poretka ρ i tipa σ.

Već smo se susreli ranije sa pojmom indikatora cele funkcije. Postavlja se pitanje kakav je indikator proizvoda dve cele funkcije koje su istog poretka. Pri tome se uvodi pojam funkcije potpuno regularnog rasta [24].

Def. 1.5. Relativnom merom skupa E pozitivnih brojeva naziva se granica

$$\lim_{r\to\infty}\frac{m(E\cap(0,r))}{r}$$

Def. 1.6. Cela funkcija f(z) poretka ρ jeste cela funkcija potpuno regularnog rasta ako

$$\frac{\ln|f(re^{i\phi})|}{r^\rho} \rightrightarrows h(\phi) \quad \text{kada } r \to \infty$$

uzimajući sve pozitivne vrednosti, eventualno osim tačaka nekog skupa E_0 nulte relativne mere.

Koristeći se teoremom V. Bernštajna [24] ustanovljuje se sledeći važan rezultat

Teorema 1.11. [24]. Ako su f(z) i (z) dve cele funkcije istog poretka od kojih je jedna potpuno regularnog rasta, tada je indikator njihovog proizvoda jednak sumi indikatora faktora.

Primedba 1.2. Može se dokazati da su funkcije oblika

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} P_k(z)e^{\omega_k z},$$ gde su $P_k(z)$ polinomi, potpuno regularnog rasta.

§2. Neka svojstva konformnih preslikavanja i teorema Margeljana

U ovom odeljku navešćemo dve teoreme koje se odnose na ponašanje na granici oblasti funkcija koje realizuju konformno preslikavanje jedne oblasti na drugu.

Teorema 1.12. (Karateodori). Neka su oblasti D i D* ograničene Žordanovim krivim ∂D i ∂D^*; tada se konformno preslikavanje $f: D \to D^*$ može produžiti na granicu D do homeomorfizma zatvorenih oblasti $\overline{D}$ i $\overline{D^*}$.

Teorema 1.13. (F. i M. Ris, I.I. Privalov). Ako su ∂D i ∂D^* rektificibilne Žordanove krive i f konformno preslikava $D \to D^*$ tada se f produžava na ∂D, kao apsolutno neprekidna funkcija dužine luka.

Dokazi gornjih tvrdjenja mogu se pronaći u [6] i [33].

Prilikom ispitivanja potpunosti jednog sistema funkcija bitno ćemo se služiti sledećom varijantom teoreme Margeljana.

Teorema 1.14. Neka je K kompaktan skup sa povezanim komplementom. **Tada** svaka funkcija, neprekidna na K i analitička u unutrašnjim tačkama skupa K dopušta ravnomernu aproksimaciju na K polinomima.

Dokaz prethodne teoreme može se naći u [5] i [28].

G L A V A II

NEKI REZULTATI TEORIJE NESAMOKONJUGOVANIH OPERATORA

§1. Svojstvene vrednosti i svojstvene funkcije (vektori) graničnih zadataka (pramenova operatora)

Razmotrimo granični zadatak generisan diferencijalnim izrazom $l(y) = y^{(n)} + p_1(x,\lambda)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x,\lambda)y \qquad 0 \leq x \leq 1$

i graničnim uslovima $U_\nu(y) = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\alpha_{i\nu}(\lambda)y^{(i)}(0) + \beta_{i\nu}(\lambda)y^{(i)}(1)\right]$

$$\nu = 1,2\ldots n \quad .$$

Pretpostavimo da su koeficijenti $p_i(x,\lambda)$ diferencijalnog izraza $l(y)$ kao i koeficijenti u linearnim formama $U_\nu(y)$ analitičke funkcije parametra λ.

Kaže se da je $\lambda=\lambda_0$ svojstvena vrednost prethodnog graničnog zadatka ako postoji funkcija $\phi_0 \in C^n[0,1]$ $(\phi \neq 0)$ takva da je

$$l(\phi_0) = 0$$
$$U_\nu(\phi_0) = 0 \qquad \text{(kada je } \lambda=\lambda_0) \qquad \nu = 1,2\ldots n$$

Funkcija $\phi_0(x)$ se naziva svojstvena funkcija koja odgovara svojstvenoj vrednosti $\lambda=\lambda_0$.

Sistem funkcija $\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots \phi_k(x)$ se naziva lancem prisajedinjenih funkcija svojstvenoj funkciji ϕ_0 ako $\phi_0, \phi_1, \ldots \phi_k$ zadovoljavaju pri $\lambda=\lambda_0$

diferencijalne jednačine :

$$l(\phi_q) + \frac{1}{1!}\frac{\partial l}{\partial \lambda}(\phi_{q-1}) + \ldots + \frac{1}{q!}\frac{\partial^q l}{\partial \lambda^q}(\phi_0) = 0 \qquad q = 0,1\ldots k.$$

i granične uslove :

$$U_\nu(\phi_q) + \frac{1}{1!}\frac{\partial U_\nu}{\partial \lambda}(\phi_{q-1}) + \ldots + \frac{1}{q!}\frac{\partial^q U_\nu}{\partial \lambda^q}(\phi_0) = 0 \qquad \begin{matrix} q = 0,1\ldots k. \\ \nu = 1,2\ldots n. \end{matrix}$$

Detaljnije o svojstvenim i prisajedinjenim funkcijama može se naći u [29].

Razmotrimo sada apstraktni polinomijalni pramen $L(\lambda) = I-A_0-\lambda A_1-\ldots-\lambda^n A_n$ na separabilnom Hilbertovom prostoru .

Pretpostavlja se da su $A_0, A_1, A_2, \ldots A_n$ neki operatori iz σ_∞ (kompaktni).

Takvi pramenovi se dobijaju pri rešavanju operatorne diferencijalne jednačine oblika

$$\left(I-A_0-A_1 \frac{d}{dt} -\ldots- A_n \frac{d^n}{dt^n}\right) x(t) = 0 \qquad (2.1.)$$

primenom Furijeove metode. (Ovde je $x=x(t)$ funkcija sa vrednostima u Hilbertovom prostoru $\mathfrak{H}$.).

Ako tražimo rešenje jednačine (2.1.) u obliku

$$x(t) = e^{\lambda_0 t}\phi$$

gde je ϕ neki vektor iz $\mathfrak{H}$ (koji ne zavisi od t) dolazimo do jednačine

$$L(\lambda_0)\phi = 0$$

Broj λ_0 naziva se svojstvenom vrednošću pramena $L(\lambda)$ ako jednačina $L(\lambda_0)\phi = 0$ ima netrivijalno rešenje ϕ_0. To rešenje se naziva svojstveni vektor pramena $L(\lambda)$ koji odgovara svojstvenoj vrednosti λ_0.

Razmotrimo neku funkciju oblika

$$x(t) = e^{\lambda_0 t}\left(\frac{t^k}{k!}\phi_0+\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\phi_1 +\ldots+ \frac{t}{1!}\phi_{k-1}+ \phi_k\right) \qquad (2.2.)$$

gde su $\phi_j \in \mathfrak{H}$ $(j=0,1,2\ldots k,\ \phi_0 \neq 0)$.

Ako je funkcija (2.2.) rešenje jednačine (2.1.), tada se može dokazati da je ϕ_0 svojstveni vektor (koji odgovara svojstvenoj vrednosti λ_0) i da važi:

$$L(\lambda_0)\phi_p+ \frac{1}{1!}\frac{\partial L(\lambda_0)}{\partial\lambda_0}\phi_{p-1} +\ldots+ \frac{1}{p!}\frac{\partial^p L(\lambda_0)}{\partial\lambda_0^p}\phi_0=0 \qquad (2.3.)$$

Važi i obrnuto: ako je za neke vektore $\phi_0, \phi_1, \ldots \phi_k$ ispunjeno (2.3.) tada funkcija (2.2.) zadovoljava jednačinu (2.1.)

Vektori $\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_k$ nazivaju se prisajedinjenim vektorima k svojstvenom vektoru ϕ_0.

Dodelimo svakoj svojstvenoj vrednosti λ_0 pramena $L(\lambda)$ i njenom odgovarajućem sistemu $\phi_0, \phi_1, \phi_2 \dots \phi_k$ sastavljenom od svojstvenog i prisajedinjenih vektora, sistem vektora konstruisan na sledeći način:

$$\phi_p^{(0)} = \phi_p \qquad (p = 0,1,2\dots k)$$

$$\phi_p^{(j)} = \frac{d^j}{dt^j} e^{\lambda_0 t}\left(\phi_p^{(0)} + \phi_{p-1}^{(0)} \frac{t}{1!} + \dots + \frac{t^p}{p!} \phi_0^{(0)}\right)\Big|_{t=0}$$

(Ovde je $\phi_0^{(0)}=\phi_0$) $\qquad (j=1,2\dots n-1, \quad p=0,1,2\dots k)$.

Prema M.V. Keldišu |15| sistem svih svojstvenih i prisajedinjenih vektora promena $L(\lambda)$ je n-tostruko potpun u $\mathfrak{h}$ ako unija svih sistema oblika

$$(\phi_p^{(0)}, \phi_p^{(1)}, \dots \phi_p^{(n-1)}), \qquad (p=0,1\dots k)$$

obrazuje potpun sistem u prostoru $\underbrace{\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{h}.\oplus\mathfrak{h}}_{n\text{-puta}}$

Iz prethodnog se neposredno dobija da ako se radi o polinomijalnom pramenu kome je $\lambda = \lambda_0$ svojstvena vrednost a ϕ_0 njoj odgovarajući svojstveni vektor i ako nema prisajedinjenih vektora, tada je sistem svojstvenih vektora n-tostruko potpun ako je unija svih vektora oblika

$(\phi_0, \lambda_0\phi_0, \dots \lambda_0^{n-1}\phi_0)$ potpun sistem u

$$\underbrace{\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{h}\dots\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{h}}_{n\text{-puta}}.$$

Neka je $\lambda=\lambda_0$ svojstvena vrednost operatora A. Vektor ϕ ($\phi\neq 0$) naziva se radikalnim vektorom koji odgovara svojstvenoj vrednosti $\lambda=\lambda_0$ ako postoji prirodan broj n tako da je ispunjeno $(A-\lambda_0 I)^n\phi = 0$.

Teorema 2.1. (M.V. Keldiš) [7]. Neka je $A = H(I+S)$, gde je H samokonjugovani operator (na $\mathfrak{h}$) konačnog poretka*), a S kompaktni

---

* Kaže se da je operator $H\in\sigma_\infty$ konačnog poretka ako postoji $p<\infty$ tako da je $\sum_{n=1}^{\infty} s_n^p(H) < \infty$, gde je $s_n(H) = \lambda_n((H^*H)^{1/2})$ (s_n su singularni brojevi operatora H) TADA PIŠEMO $H\in\sigma_p$.

operator. Ako se pri tom operator A anulira samo u nuli to je sistem njegovih radikalnih vektora potpun u .

Za proizvoljno malo $\varepsilon(>0)$ sve svojstvene vrednosti operatora A osim možda konačno njih leže u uglovima

$$-\varepsilon < \arg\lambda < \varepsilon, \qquad \pi-\varepsilon < \arg\lambda < \pi+\varepsilon.$$

Poznato je da za svaki ograničen operator A na Hilbertovom prostoru skup $W_A = \{(Af,f): \|f\|=1\}$ je konveksan. (Teorema Stouna - Hausdorfa [3], [32]).

Očevidno da zatvorenje $\tilde{W}_A$ skupa svih vrednosti (Af,f) $(f\in\mathfrak{H})$ se sastoji iz tačaka oblika ξt, gde je $\xi\in W_A$, $0<t<\infty$. Iz konveksnosti W_A sledi da je $\tilde{W}_A$ neki ugao sa vrhom u kordinatnom početku sa otvorom $\theta_A \leq \pi$ ili je $\tilde{W}_A$ cela kompleksna ravan.

Formulišimo sada još jedno tvrdjenje koje se odnosi na problem potpunosti radikalnih vektora kompaktnog operatora.

Teorema 2.2. (M.V. Keldiš, V.B. Lidskij) [7]. Neka je $A\in\sigma_\infty$ i zadovoljava sledeća dva uslova:

1. $\theta_A = \frac{\pi}{p}$ $(p>1)$

2. $s_n(A) = \mathcal{O}(n^{-1/p})$ $(n\to\infty)$

Tada je sistem svih radikalnih vektora operatora A potpun u .

Prethodnu teoremu je uopštio V.I. Macaev, M.G. Krejn i I.C. Gohberg. Teorema 2.2.′ se koristi pri dokazu dvostruke potpunosti sistema svojstvenih i prisajedinjenih vektora nekih kvadratnih pramenova.

§2. Kvadratni pramen

Pošto ćemo se kasnije susretati sa kvadratnim pramenovima naveščemo neka njihova svojstva. Tačnije, naveščemo svojstva nekih pramenova specijalnog oblika.

Razmotrimo pramen:

$$L(\lambda) = I + \lambda B + \lambda^2 C \qquad \text{gde je } C>0,\ B=B^*,\ C\in\sigma_\infty .$$

Takvi pramenovi se susreću prilikom izučavanja malih oscilacija kontinuma sa beskonačno stepena slobode. Za njih je važno ispitati pitanje dvostruke potpunosti svojstvenih i prisajedinjenih vektora.

Teorema 2.3. [7]. Neka je $B=B^*$ i pri nekom $\chi(0<\chi<2)$ je ispunjen uslov $B^2<\chi^2C$. Tada spektar $\sigma(L)$*) leži u vertikalnim uglovima.

$$|\arg\lambda \pm \frac{\pi}{2}| < \theta_1$$

gde je $\quad \sin\theta_1 = \frac{\chi}{2} \quad (0<\theta_1<\frac{\pi}{2})$.

Ako je $0<\chi<1$ i osim toga $\lambda_n(C) = \mathcal{O}(n^{-\frac{\pi}{2\theta}})$ gde je $\sin\theta = \chi \quad (0<\theta<\pi/2)$ onda je sistem svojstvenih i prisajedinjenih vektora pramena L dvostruko potpun u .

Dokaz prethodne teoreme počiva na teoremi 2.2..

Navedimo sada još jednu teoremu na koju ćemo se kasnije pozvati.

Teorema 2.4. (M.B. Orazov) [31]. Neka je dat pramen

$$L(\lambda) = \lambda^2A + 2\lambda B + I-\omega^2T,$$

gde je $\quad B = B^*, \quad T = T^*, \; A \in \sigma_\infty, \; A > 0, \; \omega^2 > 0$ i

$$(Tf,f) < \beta(Af,f), \quad \beta>0, \quad f$$

$$(Bf,f)^2 < \chi^2(Af,f)(f,f) \qquad 0<\chi^2<1, \quad f\in \mathfrak{H}.$$

Ako za takav pramen postoji broj $q>0$ takav da je

$$\lim_{n\to\infty} n^{2q}\lambda_n(A) = 0 \quad \text{i} \quad \chi < \sin\frac{\pi q'}{2}$$

gde je $q' = \min(q,1)$, tada je sistem svojstvenih i prisajedinjenih vektora dvostruko potpun u .

Teorema 2.4. se dokazuje transformacijama pramena koji se u njoj spominje na oblik pogodan za primenu teoreme 2.3. i primenom teoreme 2.3.

Prilikom ispitivanja zbirljivosti po Abelu Furijeovog reda nekih funkcija po sistemu $\{e^{-\alpha nx}\sin nx\}_{n-1}^{\infty}$ koristićemo se teoremom o egzistenciji operatornog korena kvadratnog pramena. Kao što smo u uvodu napomenuli, godine 1965. publikovan je rad [21] Krejna i Langera u kome se na principijelno nov način pristupa izučavanju kvadratnih pramenova.

---

* Tačka λ je regularna tačka pramena $L(\lambda)$, ako je $[L(\lambda)]^{-1}$ ograničen operator. Skup svih regularnih tačaka obeležavamo sa $\rho(L)$. Spektar pramena L je komplement skupa $\rho(L)$. Spektar se označava sa $\sigma(L)$.

Uvedimo u ortogonalnu sumu $\tilde{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h}_+ \oplus \mathfrak{h}_-$ dvaju kopija Hilbertovog prostora $\mathfrak{h}$ indefinitni skalarni proizvod.

$$[\tilde{x},\tilde{y}] = (J\tilde{x},\tilde{y}), \qquad \tilde{x},\tilde{y} \in \tilde{\mathfrak{h}},$$

gde je $J = P_+ - P_-$; P_+, P_- su ortoprojektori na $\mathfrak{h}_+, \mathfrak{h}_-$.

Vektor $\tilde{x} \in \tilde{\mathfrak{h}}$ naziva se J pozitivnim ($J\text{-}>0$), ako je $[\tilde{x},\tilde{x}]>0$ i J neutralnim ako $[\tilde{x},\tilde{x}]=0$. Podprostor $\mathcal{L} \subset \tilde{\mathfrak{h}}$ naziva se $\mathcal{L}$ nenegativnim ($J\text{-}\geq 0$), ako je $[\tilde{x},\tilde{x}] \geq 0$ za sve $\tilde{x} \in \mathcal{L}$, i maksimalnim $J\text{-}\geq 0$ podprostorom ako se on ne sadrži ni u kakvom drugom $J\text{-}\geq 0$ podprostoru.

Operator $K: \mathfrak{h}_+ \to \mathfrak{h}_-$ naziva se uglovnim operatorom (operatorom nagiba prema prostoru $\mathfrak{h}_+$) za $\mathcal{L}$ ako je

$$\mathcal{L} = \{\tilde{x}: \tilde{x} = x_+ \oplus Kx_+,\ x_+ \in \mathfrak{h}_+\}$$

Može se dokazati sledeće tvrdjenje [22]:

Prostor $\mathcal{L} \subset \tilde{\mathfrak{h}}$ je maksimalan $J\text{-}\geq 0$ ako je ispunjen jedan od sledećih uslova:

1° $\quad P_+: \mathcal{L} \to \mathfrak{h}_+$ je homeomorfizam

2° $\quad$ Za podprostor $\mathcal{L}$ postoji operator nagiba (ka $\mathfrak{h}_+$) K sa osobinom $\|K\| \leq 1$.

Razmotrimo pramen

$$L(\lambda) = I + 2\lambda F + \lambda^2 C \qquad (F=F^*,\ C>0,\ C \in \sigma_\infty)$$

Dokazuje se da se nerealni deo spektra pramena $L(\lambda)$ sastoji od svojstvenih vrednosti. Nerealni deo spektra pramena $L(\lambda)$ obeležimo sa $\sigma_0(L)$.

Neka je $\sigma_0(L) = \Gamma \cup \overline{\Gamma}$, $\Gamma \cap \overline{\Gamma} = \emptyset$ proizvoljno razbijanje na simetrične delove skupa $\sigma_0(L)$. Tada važi tvrdjenje o egzistenciji operatornog korena.

Teorema 2.5. [17] (M.G. Krejna, G.K. Langera). Neka je $F = F^*$ (ograničen operator), $C \in \sigma_\infty$, $C>0$ i $\sigma_0(L) = \Gamma \cup \overline{\Gamma}$ ranije navedeno razbijanje nerealnog dela spektra $\sigma_0(L)$ pramena $L(\lambda) = I+2\lambda F+\lambda^2 C$.

Tada jednačina $L(Z) = Z^2 + 2FZ + C = 0$ ima koren $Z_\Gamma \in \sigma_\infty$ oblika $Z_\Gamma = K_\Gamma C^{1/2}$ koji ima sledeća svojstva:

1° $\quad Z_\Gamma^* Z_\Gamma \leq C$

2° $\quad$ skup nerealnih svojstvenih vrednosti operatora Z_Γ je : $\{\frac{1}{\lambda} / \lambda \in \Gamma\}$

3° Za svako $\lambda_0 \in \Gamma$ pramenovi $Z(\lambda) = I-\lambda Z_\Gamma$ i $L(\lambda)$ imaju iste lance svojstvenih i prisajedinjenih vektora. Osim toga, K_Γ je operator nagiba (ka Π_+) nekog maksimalnog J-≥ 0 podprostora $\mathcal{L}_\Gamma$.

§3. Teorema Barri

Niz vektora $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$ Banahovog prostora se naziva bazom tog prostora ako se svaki vektor x razlaže na jedinstven način u red

$x = \sum_{j=1}^{\infty} C_j \phi_j$ koji konvergira po normi prostora.

Koeficijenti C_j su linearni funkcionali elementa x tj.

$C_j=\psi_j(x)$ $(j = 1,2,3\ldots)$

Štaviše ψ_j su neprekidni linearni funkcionali i važi

$\|\phi_j\|^{-1} \leq \|\psi_j\| \leq C_\phi \|\phi_j\|^{-1}$ (C_ϕ ne zavisi od j)

Ako je Banahov prostor u stvari Hilbertov prostor tada je prema teoremi Risa

$\psi_j(x) = (x,g_j)$ $j = 1,2,\ldots$

Ako u prethodnu jednakost stavimo $x = \phi_j$, dobijamo

$(\phi_j, g_k) = \delta_{jk}$

Za dva niza $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$, $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ kažemo da su biortogonalni ako je ispunjeno $(\phi_j, g_k) = \delta_{jk}$ $(j,k = 1,2,3\ldots)$

Sistem $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$ je ortonormirana baza Hilbertovog prostora , ako je baza i ako je $(\phi_i,\phi_j) = \delta_{ij}$.

Baza $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ Hilbertovog prostora dobijena iz ortonormirane baze $\{\phi_j\}$ pomoću ograničenog invertibilnog operatora A na sledeći način: $\psi_j = A\phi_j$ naziva se (prema terminologiji N.K. Barri) Risovom bazom.

Sistem $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ je skoro normiran ako je

$\inf_j \|\psi_j\| > 0$ i $\sup_j \|\psi_j\| < \infty$.

Dva niza vektora $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ i $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ se nazivaju kvadratno bliskim ako je $\sum_{j=1}^{\infty}\|f_j-g_j\|^2<\infty$.

Niz vektora $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ se naziva ω linearno nezavisnim, ako je jednakost $\sum_{j=1}^{\infty}c_jg_j=0$

nemoguća pri uslovu $0<\sum_{j=1}^{\infty}|c_j|^2\|g_j\|^2<\infty$.

Ako je niz $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ skoro normiran, prethodni uslov je ekvivalentan sledećem:

$$0<\sum_{j=1}^{\infty}|c_j|^2<\infty$$

Teorema 2.6. (N.K. Bari) [2], [7]. Svaki ω linearno nezavisan niz vektora $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ kvadratno blizak bazi Risa $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ je i sam baza Risa.

Dokaz: Neka je A linearni ograničeni invertibilni operator koji preslikava neku ortonormiranu bazu $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$ prostora u bazu $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$:

$$A\phi_j=\psi_j \qquad (j=1,2\dots)$$

Definišemo operator T stavljajući

$$T\Big(\sum_{j=1}^{\infty}c_j\phi_j\Big)=\sum_{j=1}^{\infty}c_j(\psi_j-g_j) \qquad \Big(\sum_{j=1}^{\infty}|c_j|^2<\infty.$$

Operator T je kompaktan jer je (neposredno se proverava) ravnomerna granica niza T_n kompaktnih operatora definisanih sa

$$T_n\Big(\sum_{j=1}^{\infty}c_j\phi_j\Big)=\sum_{j=1}^{n}c_j(\psi_j-g_j).$$

Jednačina $(A-T)\phi=0$ ima jedinstveno rešenje $\phi=0$. Zaista, ako je $A\phi=T\phi$ to iz jednakosti

$$(A-T)\phi=\sum_j(\phi,\phi_j)\psi_j-\sum_j(\phi,\phi_j)(\psi_j-g_j)=\sum_j(\phi,\phi_j)g_j$$

sledi $\sum_j(\phi,\phi_j)g_j = 0$, a zbogu linearne nezavisnosti niza $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ sledi da je $\phi=0$.

Operator A je invertibilan, operator T je kompaktan, a kako se A-T anulira samo u nuli to je i on invertibilan.

Dokažimo to. Prema Vejlovoj*) teoremi važi

$\sigma(A-T)\subset\sigma(A)\cup\sigma_p(A-T)$ gde je $\sigma_p(A-T)$ punktualni deo spektra operatora A-T. Kako je ustanovljeno $0\notin\sigma_p(A-T)$ i kako je A invertibilan operator dobijamo da je $0\notin\sigma_p(A-T)\cup\sigma(A)$. Odatle se dobija $0\notin\sigma(A-T)$, tj. $0\in\rho(a-T)$, tj. operator A-T je invertibilan.

Imajući u vidu očevidne jednakosti

$(A-T)\phi_j = g_j$ $(j=1,2...\ )$ zaključujemo da sistem $\{g_j\}$ obrazuje Risovu bazu.

Primedba 2.1. Gornji dokaz je nešto modifikovana verzija dokaza teoreme Barri iz knjige [7].

* Neka je X Banahov prostor, A ograničen operator, a K kompaktan operator na X. Tada je $\sigma(A+K)\subset\sigma(A)\cup\sigma_p(A+K)$.

G L A V A III

ISPITIVANJE SVOJSTAVA POTPUNOSTI, MINIMALNOSTI I BAZISNOSTI NEKIH SISTEMA FUNKCIJA ANALITIČKIM METODOM

§1. Uopštenje nekih teorema M.G. Gasimova

Neka je dat sistem funkcija $\{\phi(x,\lambda_k)\}_{k=1}^{\infty}$. Prema M.V. Keldišu [15] sistem $\{\phi(x,\lambda_k)\}_{k=1}^{\infty}$ je n-tostruko potpun u prostoru $L_2(a,b)$ ako za svaki izbor funkcija $f_1, f_2, \dots f_n$ koje pripadaju $L_2(a,b)$, iz jednakosti

$$\int_b^a \sum_{j=1}^{n} \lambda_k^{j-1} f_j(x)\phi(x,\lambda_k)dx = 0$$

koje su ispunjene za svako $k\varepsilon N$, sledi da je $f_1=f_2=\cdot=f_n=0$ skoro svuda na $[a,b]$.

U radu [4] M.G. Gasimova razmatra se pitanje n-tostruke potpunosti sistema funkcija $\{\phi(x,\lambda_n)\}_{n=1}^{\infty}$ u prostoru $L_2(0,1)$ gde je

$$\phi(x,\lambda) = \sum_{j=1}^{n} W_j \exp(\lambda\omega_j x) \qquad (\omega_j \neq \omega_k \text{ za } j\neq k \text{ i } |\omega_j|=1,\ W_j\neq 0,\ \text{za } j=1,2\dots) \tag{3.1.}$$

i gde su $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \dots$ prosti koreni cele funkcije

$$G(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} B_j \exp(m_j \ln\lambda + \omega_j\lambda) \qquad \{1+0(1)\} \qquad (|\lambda|\to\infty).$$

Pretpostavlja se da je $B_1, B_2 \dots B_n \neq 0$ i medju brojevima $m_1, \dots m_n$ bar jedan je $\geqslant n-1$ i tačka $\lambda=0$ se nalazi u mnogouglu sa vrhovima u tačkama $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n$.

Pod tim uslovima M.G. Gasimov je dokazao n-tostruku potpunost sistema $\{\phi(x,\lambda_n)\}_{n=1}^{\infty}$ gde je $\phi(x,\lambda)$ funkcija (3.1.) Koristeći se tim rezultatom Gasimov dokazuje dvostruku potpunost sistema svojstvenih funkcija jednog graničnog zadatka.

U dokazu Gasimova, činjenica da se tačka $\lambda=0$ nalazi u mnogouglu sa vrhovima u tačkama $\omega_1 \dots \omega_n$ bitna je, jer u dokazu bitnu ulogu igra činjenica da indikatorni dijagrami dvaju funkcija koje on proučava imaju osobinu da jedan leži u drugom.

Razmotrimo sada slučaj kada tačka $\lambda=0$ ne leži u mnogouglu čija su temena $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n$.

Teorema 3.1. Neka je funkcija

$$G(\lambda) = \sum_{\nu=1}^{n} P_\nu(\lambda)\, e^{\lambda\omega_\nu}\,(1+R(\lambda)) \qquad (|R(\lambda)| \underset{|\lambda|\to\infty}{\leqslant} C < 1)$$

cela i ima proste nule $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ $\qquad$ ($R(\lambda)$ su polinomi $\not\equiv 0$).

Neka tačke $\omega_1, \omega_2 \dots \omega_n$ leže na kružnici $\{\lambda : |\lambda| = R_0\}$ i njihovi argumenti $\phi_1, \phi_2, \dots \phi_n$ zadovoljavaju uslov $\phi_1 < \phi_2 < \dots < \phi_n$. Ako je $\phi_n - \phi_1 < \pi$ i bar jedan od polinoma $P_\nu(\lambda)$ ima stepen $\geqslant n-1$, sistem $\{\phi(x,\lambda_k)\}_{k=1}^{\infty}$, gde je $\phi(x,\lambda)$ funkcija (3.1.), je n-tostruko potpun u $L_2(0,1)$.

Dokaz: Razmotrimo funkciju

$$F(\lambda) = \int_0^1 \phi(x,\lambda) \sum_{k=1}^{n} \lambda^{k-1} f_k(x)\,dx, \qquad (f_1, \dots f_n \in L_2(0,1))$$

($f_1, \dots f_n$ su takve funkcije da je $F(\lambda_\nu) = 0$ za svako $\nu \in N$)

i funkciju $\qquad P(\lambda) = \dfrac{F(\lambda)}{G(\lambda)}$

Pošto su funkcije $F(\lambda)$ i $G(\lambda)$ poretka $\rho < 1$, to prema teoremi 1.10. funkcija $P(\lambda)$ je cela funkcija poretka $\rho < 1$. ($P(\lambda)$ je cela funkcija jer je po pretpostavci $F(\lambda_\nu)=0$ i funkcija $G(\lambda)$ ima u tačkama $\lambda=\lambda_\nu$ proste nule).

Nije teško pokazati da je funkcija $P(\lambda)$ na sledećim polupravama

$$\begin{aligned} l_1 &: \lambda = r\overline{\omega}_1 \\ l_2 &: \lambda = r\overline{\omega}_n \\ l_3 &: \lambda = ri\overline{\omega}_n \\ l_4 &: \lambda = ri\overline{\omega}_1 \end{aligned} \qquad (0 < r < \infty)$$

zadovoljava sledeću nejednakost:

$$|P(\lambda)| < \sum_{\nu=1}^{n} D_\nu |\lambda|^{\nu-1} \tag{3.2.}$$

gde su D_ν neke konstante.

Kako je $P(\lambda)$ cela funkcija poretka $\rho < 1$, koja na polupravama l_i $(i=\overline{1,4})$ zadovoljava ocenu (3.2.) i ugao medju susednim polupravama l_i je manji od π to prema teoremi Fragmena Lindelofa i Liuvila sledi da je P polinom i da je

$$P(\lambda) = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \lambda^{\nu-1} \qquad (A_\nu \in \mathbb{C} \qquad \text{neke konstante})$$

Ako je stepen polinoma $P_s(\lambda)$ ne manji od n-1, tada je lako oceniti modul $|P_s(\lambda)|$ na polupravoj $\lambda=r\bar{\omega}_s$ $(r>0)$. Tom prilikom se dobija da

$$P(\lambda) \to 0 \quad \text{kada} \quad \lambda \to \infty \text{ i } \quad \lambda = r\bar{\omega}_s.$$

To znači da je $A_1=A_2=\dots=A_n=0$, odnosno $P(\lambda)\equiv 0$.
Odatle se dobija da je $F(\lambda)\equiv 0$.

Znači, $\displaystyle\int_0^1 \phi(x,\lambda) \sum_{k=1}^{n} \lambda^{k-1} f_k(x) \equiv 0.$

Kako je $\displaystyle\phi(x,\lambda) = \sum_{j=1}^{n} W_j \exp(\lambda\omega_j x)$, sledi

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} W_j \lambda^{k-1} \int_0^1 f_k(x)\exp(\lambda\omega_j x)dx \equiv 0 \tag{3.3.}$$

Stavimo da je $\displaystyle\int_0^1 f_k(x)\exp(\lambda\omega_j x)dx = F_k(\lambda\omega_j)$ i

$$\Phi_j(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} \lambda^{k-1} F_k(\lambda\omega_j).$$

Tada se (3.3.) može prepisati kao:

$$\sum_{j=1}^{n} W_j \Phi_j(\lambda) \equiv 0 \tag{3.4.}$$

Posmatrajmo funkciju $\Phi_{j_0}(\lambda)$ (za neko $1 < j_0 < n$). Očevidno da ona najbrže raste u pravcu $\lambda = r/\omega_{j_0}$ i da ostale funkcije $\Phi_j(\lambda)$ $(j\neq j_0)$ po tom pravcu rastu sporije. Ali pošto je ispunjen uslov (3.4.), to znači da je $\Phi_j(\lambda)\equiv 0$ za $j=1,2,\dots n$.

Odatle se dobija da je:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda^{k-1} F_k(\lambda\omega_j) \equiv 0 \qquad \text{za } j=1,2,\dots n.$$

Ako uvedemo smenu $\lambda\omega_j = s$ dobijamo:

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_j^{1-k} s^{k-1} F_k(s) \equiv 0 \qquad \text{za } j=1,2,\dots n.$$

Poslednje jednačine predstavljaju homogen sistem po nepoznatim $F_1(s),\dots F_n(s)$. Njegova determinanta je različita od 0 (zbog $\omega_i \neq \omega_j$ za $i\neq j$).

Odatle neposredno sledi da je $f_1= \cdot \cdot = f_n = 0$ u $L_2(0,1)$. Ovim je n-tostruka potpunost dokazana.

Razmotrimo sada slučaj kada je funkcija $G(\lambda)$ takvog oblika da se u eksponentima nalaze zbirovi oblika $\omega_{i1}+\dots+\omega_{ik}$. Tvrdjenje ćemo formulisati i dokazati u slučaju k=2. (Opšti slučaj se razmatra slično).

Teorema 3.2. Neka su $\omega_1,\omega_2,\dots \omega_n$ kompleksni brojevi $\neq 0$ i $0\in\mathrm{conv}\{\omega_1,\dots \omega_n\}$ i $\arg\omega_i\neq\arg\omega_j$ $(i\neq j)$. Pretpostavimo da postoje tri ugla $\theta_1,\theta_2,\theta_3$ takva da je $|\theta_i-\theta_j| < \pi$ $(i,j=1,2,3)$ i

$$\max_{1\leq i\leq n}|\omega_i|\cos(\theta_s+\arg\omega_i) < \max_{1\leq i<j\leq n}|\omega_i+\omega_j|\cos(\theta_s+\arg(\omega_i+\omega_j)) \tag{3.5.}$$

za $s=1,2,3$.

Ako pri tom funkcija $G(\lambda) = \sum_{1\leq i<j\leq n} P_{ij}(\lambda)e^{\lambda(\omega_i+\omega_j)}$.

($P_{ij}(\lambda)$ su polinomi $\not\equiv 0$) ima proste korene $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\dots$, tada je sistem $\{\phi(x,\lambda_k)\}_{k=1}^{\infty}$ je n-tostruko potpun u $L_2(0,1)$. ($\phi(x,\lambda)$ je funkcija uvedena sa (3.1.)).

Dokaz: Kao što smo već ranije naveli, funkcija oslonca konveksnog mnogougla D, čija su temena $\gamma_1,\gamma_2\dots \gamma_n$ je

$$k(\theta) = \max_{1<j<n}|\gamma_j|\cos(-\theta+\arg\gamma_j)$$

Pretpostavimo da sistem $\{\phi(x,\lambda_k)\}_{k=1}^{\infty}$ nije n-tostruko potpun u $L_2(0,1)$. To znači da postoje funkcije $f_1,f_2,\dots f_n \in L_2(0,1)$ koje nisu sve jednake nuli u prostoru $L_2(0,1)$, takve da je

$$F(\lambda_k) = 0 \quad \text{gde je} \quad F(\lambda) = \int_0^1 \phi(x,\lambda)\sum_{k=1}^{n}\lambda^{k-1} f_k(x)dx.$$

Razmotrimo funkciju $P(\lambda) = \frac{F(\lambda)}{G(\lambda)}$. Očevidno je $P(\lambda)$ cela funkcija. Ako ona nije $\equiv 0$, (taj slučaj je trivijalan i ako je on ispunjen dokaz se završava) to se može postići da umesto funkcije $P(\lambda)$, koja je poretka $\rho < 1$, imamo funkciju poretka rasta $\rho = 1$.

Dovoljno je jednakost $P(\lambda) = \frac{F(\lambda)}{G(\lambda)}$ pomnožiti sa $e^{\varepsilon\lambda}$ gde je $\varepsilon > 0$ takav broj da je ispunjeno

$$\max_{1\leq i\leq n} |\omega_i| \cos(\theta_s + \arg\omega_i) + \varepsilon < \max_{1\leq i<j\leq n} |\omega_i+\omega_j| \cos(\theta_s + \arg(\omega_i+\omega_j)) \quad (s=1,2,3)$$

Uvedimo funkcije

$$P_1(\lambda) = P(\lambda)e^{\varepsilon\lambda}$$
$$F_1(\lambda) = F(\lambda)e^{\varepsilon\lambda}$$

Tada je $P_1(\lambda) = \frac{F_1(\lambda)}{G_1(\lambda)}$, P_1, F_1 su cele funkcije poretka $\rho=1$.

Pošto je $G(\lambda)$ funkcija potpuno regularnog rasta (primedba posle teoreme 1.11.), važi:

$$h_{F_1}(\theta) = h_{P_1}(\theta) + h_G(\theta) \qquad (3.6.)$$

gde su h_{F_1}, h_{P_1}, h_G indikatori celih funkcija F_1, P_1, G.

Kako je funkcija F poretka $\rho=1$ to se dobija

$$h_{F_1}(\theta) = \varepsilon\cos\theta + h_F(\theta) \qquad (3.7.)$$

Iz (3.6.) i (3.7.) sledi

$$h_{P_1}(\theta_s) = h_{F_1}(\theta_s) - h_G(\theta_s) \qquad s=1,2,3.$$

odnosno

$$h_{P_1}(\theta_s) = \varepsilon\cos\theta_s + h_F(\theta_s) - h_G(\theta_s).$$

Iz poslednje jednakosti se dobija

$$h_{P_1}(\theta_s) \leq \varepsilon + h_F(\theta_s) - h_G(\theta_s) \quad \text{za} \quad s=1,2,3. \qquad (3.8.)$$

Kako konjugovani dijagram funkcije F pripada konveksnom omotaču tačaka $\omega_1, \ldots \omega_n$ to je

$$h_F(\theta_s) \leq \max_{1\leq i\leq n} |\omega_i| \cos(\theta_s + \arg\omega_i) \qquad s=1,2,3. \qquad (3.9.)$$

Prema teoremi 1.7. dobijamo:

$$h_G(+\theta_s) = \max_{1\leq i<j\leq n} |\omega_i+\omega_j| \cos(\theta_s + \arg(\omega_i+\omega_j)) \qquad s=1,2,3. \ (3.10.)$$

Iz (3.8.), (3.9.) i (3.10) i načina izbora $\varepsilon < 0$

sledi da je $h_{P_1}(\theta_s) < 0$ za $s=1,2,3$.

Kako je $P_1(\lambda)$ cela funkcija poretka $\rho=1$, to se dobija

da je $\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|P_1(re^{i\theta_s})|}{r} < -\delta$ (za neko $\delta > 0$ i za $s=1,2,3$).

Odatle se dobija da je $|P_1(re^{i\theta_s})| < e^{-\frac{\delta}{2}r}$ za $r>r_0$ i $s=1,2,3$. (3.11.)

Kako je $|\phi_i-\phi_j| < \pi$, funkcija P_1 je poretka $\rho=1$ i kako je ograničena na polupravama $\lambda=re^{i\theta_s}$ $(0<r<\infty)$, to je prema teoremi 1.2. funkcija $P_1(\lambda)$ ograničena u celoj ravni. Odatle sledi (prema teoremi Liuvila) da je $P_1(\lambda)=\text{const}$. Iz (3.11.) sledi da je

$$P_1(re^{i\theta_s}) \underset{r\to\infty}{\to} 0, \quad \text{pa je} \quad P_1(\lambda) \equiv 0.$$

No tada je $F(\lambda) \equiv 0$.

Dalje radeći kao u teoremi (3.1.) dobijamo

$f_1=f_2=\dots=f_n=0$ u $L_2(0,1)$.

Znači sistem $\{\phi(x,\lambda_k)\}_{k=1}^{\infty}$ je n-tostruko potpun u $L_2(0,1)$.

Posledica 3.1. Neka je dat diferencijalni operator definisan diferencijalnim izrazom

$$l(y) = y^{(n)} + a_1\lambda y^{(n-1)} + \dots + a_n\lambda^n y \qquad 0\leq x\leq 1$$

i graničnim uslovima $U_i(y) = 0$ $\qquad i=\overline{1,n}$,

pri čemu je k $(2\leq k<n)$ graničnih uslova zadato u tački $x=0$, a ostalih n-k u tački $x=1$.

Ako su koreni $\omega_1,\dots \omega_n$ jednačine

$$\xi^n+a_1\xi^{n-1}+\dots+a_{n-1}\xi+a_n = 0$$

takvi da zadovoljavaju uslov (3.5.) prethodne teoreme i ako karakteristična determinanta ima proste korene, to je sistem svojstvenih funkcija gornjeg diferencijalnog operatora (pramena diferencijalnih operatora) n-tostruko potpun u $L_2(0,1)$.

§2. O dvostrukoj potpunosti i minimalnosti nekih sistema funkcija

U ovom paragrafu razmatraćemo sistem $\{\phi(x,\lambda_n)\}_{n=1}^{\infty}$ gde je $\phi(x,\lambda) = a\,e^{\lambda\omega_1 x}+be^{\lambda\omega_2 x}$, a $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ su nule funkcije

$$G(\lambda) = a_1e^{\lambda\omega_1}+b_1e^{\lambda\omega_2}.$$

Primetimo da se dvostruka potpunost gornjeg sistema ne može dobiti iz teoreme Gasimova [4], niti iz teoreme 8.1. prethodnog paragrafa (jer su odgovarajući polinomi $P_\nu(\lambda)$ nultog stepena).

S druge strane sistem $\{\phi(x,\lambda_n)\}_{n=1}^{\infty}$ opštiji je od sistema svojstvenih funkcija graničnog zadatka

$$\begin{aligned} &y''+a\lambda y'+\lambda^2 y = 0 \\ &y(0) = y(\pi) = 0 \end{aligned} \qquad -2<a<2,$$

čija se dvostruka potpunost može ustanoviti primenom metode Keldiša [16].

Ovde ćemo pod odredjenim uslovima dokazati dvostruku potpunost i dvostruku minimalnost sistema

$$\{\phi(x,\lambda_n)\}_{n=1}^{\infty} \qquad \text{u } L_2(0,1).$$

Teorema 3.3.′ Neka koeficijenti a,b,a_1,b_1 zadovoljavaju sledeće uslove:

$$a_1b_1ab\neq 0,\quad \frac{\omega_1}{\omega_2}\neq\frac{a}{b}\,\frac{b_1}{a_1} \quad \text{i neka je}$$

$$\cos\theta < \min\left(\left|\frac{\omega_1}{\omega_2}\right|,\left|\frac{\omega_2}{\omega_1}\right|\right),\ \text{gde je } \theta$$

ugao medju odsečcima $(0,\omega_1)$ i $(0,\omega_2)$. $(0<\theta<\pi)$.

Tada je sistem $\{\phi(x,\lambda_n)\}_{n=1}^{\infty}$ dvostruko potpun u $L_2(0,1)$.

Dokaz: Jednostavnosti radi pretpostavimo da je $\mathrm{Jm}\,\omega_1>0$; $\mathrm{Jm}\,\omega_2<0$ $\mathrm{Re}\,\omega_1>0$ $\mathrm{Re}\,\omega_2>0$.

Ako sistem $\{\phi(x,\lambda_n)\}_{n=1}^{\infty}$ nije dvostruko potpun u $L_2(0,1)$ onda postoje dve funkcije (koje nisu istovremeno jednake nuli u $L_2(0,1)$, tako da je

$$F(\lambda_n) = 0 \quad \text{za} \quad F(\lambda) = \int_0^1 \phi(x,\lambda)(f_1+\lambda f_2)dx \quad .$$

Funkcija $G(\lambda)$ ima samo proste korene; zbog toga je funkcija $P(\lambda) = \frac{F(\lambda)}{G(\lambda)}$ cela funkcija poretka $\rho \leq 1$.

Fiksirajmo četiri pravca

$$l_1: \quad \lambda = r\bar{\omega}$$
$$l_1: \quad \lambda = r\bar{\omega}_1 \qquad (r > 0)$$
$$l_1: \quad \lambda = r\bar{\omega}_2 i$$
$$l_1: \quad \lambda = r\bar{\omega}_1 i$$

Lako se može pokazati da na svakom od tih pravaca važi ocena

$$|P(\lambda)| < A_0 + A_1|\lambda| \qquad (A_0, A_1 \text{ su neke konstante } >0)$$

Medju svaka dva susedna pravca ugao je manji od π; zbog toga je na osnovu teoreme 1.2. i na osnovu teoreme Liuvila

$$P(\lambda) = C_0 + C_1\lambda \qquad (C_0, C_1 = \text{const}).$$

Pokažimo da je $C_1 = 0$.

Očevidno je $C_1 = \lim\limits_{\lambda\to\infty} \frac{P(\lambda)}{\lambda}$

Razmotrimo $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \frac{P(\lambda)}{\lambda}$ kada $\lambda \in l_1$.

Kako je $|G(\lambda)| > K_1 e^{r|\omega_2|^2}$, $|\phi(x,\lambda)| < K_2 e^{r|\omega_2|^2 x}$

$$(K_1, K_2 > 0)$$

ispunjeno za dovoljno veliko r i $\lambda = r\bar{\omega}_2$ i kako je

$$\frac{P(\lambda)}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\,\frac{\int_0^1 \phi(x,\lambda)f_1 dx}{G(\lambda)} + \frac{\int_0^1 \phi(x,\lambda)f_2 dx}{G(\lambda)}$$

to je

$$C_1 = \lim_{\substack{\lambda\to\infty \\ \lambda\in l_1}} \frac{\int_0^1 \phi(x,\lambda)f_2(x)dx}{G(\lambda)} \quad .$$

Iz ocene $\left|\int_0^1 \phi(x,\lambda) f_2 dx\right| \leq K_2 \int_0^1 e^{r|\omega_2|^2 x} |f_2| dx \leq \dfrac{K_2 e^{r|\omega_2|^2}}{\sqrt{2r|\omega_2|^2}} \|f_2\|,$

neposredno se dobija da je

$$\frac{\left|\int_0^1 \phi(x,\lambda) f_2(x) dx\right|}{|G(\lambda)|} \leq \frac{K_2 \|f_2\|}{K_1\sqrt{2|\omega_2|^2}} \frac{1}{\sqrt{r}} \underset{r\to\infty}{\to} 0.$$

Znači $C_1 = 0.$

Time je dakle dokazano da je $P(\lambda) = C_0$. Tako se dobija:

$\int_0^1 \phi(x,\lambda)(f_1(x)+\lambda f_2(x)dx - C_0 G(\lambda) = 0$, odakle

sledi $$a\int_0^1 e^{\lambda\omega_1 x}(f_1+\lambda f_2)dx - C_0 a_1 e^{\lambda\omega_1} + b\int_0^1 e^{\lambda\omega_2 x}(f_1+\lambda f_2)dx - $$
$$- C_0 b_1 e^{\lambda\omega_2} = 0.$$

Označimo li sa $F_1(\lambda) = a\int_0^1 e^{\lambda\omega_1 x}(f_1+\lambda f_2)dx - C_0 a_1 e^{\lambda\omega_1}$

$F_2(\lambda) = b\int_0^1 e^{\lambda\omega_2 x}(f_1+\lambda f_2)dx - C_0 b_1 e^{\lambda\omega_2}$

dobijemo $$F_1(\lambda) + F_2(\lambda) \equiv 0. \qquad (3.12.)$$

Funkcija F_1 ima konjugovani dijagram koji pripada segmentu $[0,\omega_1]$, a funkcija F_2 ima konjugovani dijagram koji pripada segmentu $[0,\omega_2]$. Ali zbog (3.12.) funkcije F_1 i F_2 imaju isti konjugovani dijagram. Odatle sledi da je konjugovani dijagram funkcije F_1 i F_2 tačka $\lambda=0$. No, tada iz teoreme 1.7. sledi da su F_1 i F_2 minimalnog tipa.

Razmotrimo funkciju F_1 na pravoj $\lambda = ri\bar{\omega}_1$ $(-\infty < r < \infty)$.

Lako se ustanovljuje da na toj pravoj važi ocena

$|F_1(\lambda)| < P_0 + Q_0|\lambda|$ $(P_0,\ Q_0 = \text{const})$.

No, kako je funkcija F_1 minimalnog tipa zaključujemo da je F_1 oblika

$$F_1(\lambda) = m+n\lambda.$$

Kada se $F_1(\lambda)$ razvije u red dobija se:

$$F_1(\lambda) = ap_0-C_0a_1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n \omega_1^n}{n!} \left(ap_n-C_0a_1-\frac{anq_{n-1}}{\omega_1}\right)$$

gde je $\quad p_n = \int_0^1 x^n f_1(x)dx \quad , \quad q_n = \int_0^1 x^n f_2(x)dx.$

Kako je funkcija F_1 linearna dobijamo:

$$ap_n-C_0a_1-a\frac{nq_{n-1}}{\omega_1} = 0 \quad \text{za} \quad n\geqslant 2 \tag{3.13.}$$

Ako svu prethodnu proceduru primenimo na funkciju $F_2(\lambda)$, dobija se:

$$bp_n-C_0b_1-b\frac{nq_{n-1}}{\omega_2} = 0 \quad \text{za} \quad n\geqslant 2 \tag{3.14.}$$

Primetimo da $p_n \to 0$, $q_n \to 0$ i da iz (3.13.) i (3.14.)

sledi da je
$$nq_{n-1} \to -C_0\frac{a_1\omega_1}{a}$$
$$nq'_{n-1} \to -C_0\frac{b_1\omega_2}{b}$$

Znači $C_0\left(\frac{a_1\omega_1}{a} - \frac{b_1\omega_2}{b}\right) = 0.$ Odatle sledi da je $C_0 = 0$.

No, tada se lako dobija da je $q_{n-1}=0$ i $p_n=0$ za $n>2$.

Odatle sledi da je $f_1=0$ i $f_2=0$ u $L_2(0,1)$ suprotno pretpostavci.

Ovim je dvostruka potpunost dokazana.

Dokažimo sada dvostruku minimalnost sistema $\{\phi(x,\lambda_n)\}_{n=1}^{\infty}$ u $L_2(0,1)$.

Sistem elemenata $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ naziva se minimalnim ako nijedan element toga sistema ne pripada zatvorenom linearnom omotaču ostalih elemenata. Da bi sistem $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ elemenata Hilbertovog prostora bio minimalan neophodno je i dovoljno da postoji sistem $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ u takav da je $(f_i,e_j)=\delta_{ij}$ [7].

Uvedimo prostor $\tilde{L}_2 = L_2(0,1) \oplus L_2(0,1)$ sa skalarnim proizvodom $(\tilde{f},\tilde{g})_{\tilde{L}_2} = (f_1,g_1)_{L_2} + (f_2,g_2)_{L_2}$, gde je $\tilde{f} = (f_1,f_2)$, $\tilde{g} = (g_1,g_2)$, a funkcije f_i, $g_i \in L_2(0,1)$ $(i=1,2)$.

Sistem $\{\phi(x,\lambda_n)\}_{n=1}^{\infty}$ se naziva dvostruko minimalnim u prostoru $L_2(0,1)$ ako je sistem $(\phi(x,\lambda_n),\ \lambda_n\phi(x,\lambda_n))$ minimalan u prostoru $\tilde{L}_2$.

Da bismo dokazali dvostruku minimalnost sistema $\{\phi(x,\lambda_n)\}_{n=1}^{\infty}$ u $L_2(0,1)$ naš zadatak je da pronadjemo sistem $(\overline{f}_{0m}, \overline{f}_{1m})$ $(f_{0m}, f_{1m} \in L_2(0,1))$, koji je biortogonalan sistemu $(\phi(x,\lambda_n), \lambda_n\phi(x,\lambda_n))$ u $\tilde{L}_2$.

Dokažimo najpre sledeće dve leme

Lema 3.1. [27] Neka je $f(\lambda)$ cela funkcija eksponencijalnog tipa čiji konjugovani dijagram pripada segmentu $[o,i]$. Ako je $\lambda f(\lambda) \in L_2(R)$, tada postoji funkcija $g \in L_2(0,1)$ takva da je

$$g(o) = g(1) = 0, \quad g' \in L_2(0,1) \quad \text{i}$$
$$f(\lambda) = \int_0^1 e^{i\lambda x} g(x)\,dx.$$

Dokaz: Očevidno da funkcija $\lambda f(\lambda)$ ima za konjugovani dijagram takodje segment $[o,i]$. S obzirom da je $\lambda f(\lambda)$ cela funkcija eksponencijalnog tipa i $\lambda f(\lambda) \in L_2(R)$ to prema teoremi 1.8. postoji funkcija $g_0 \in L_2(0,1)$ takva da je

$$\lambda f(\lambda) = \int_0^1 e^{i\lambda x} g_0(x)\,dx \tag{3.15.}$$

Označimo $g(x) = -i\int_0^x g_0(t)\,dt$

Očevidno je $g' \in L_2(0,1)$ i $g(0) = 0$. Dokažimo da je $g(1) = 0$.

Parcijalnom integracijom desna strana jednakosti (3.15.) postaje $\lambda f(\lambda) = \int_0^1 e^{i\lambda x} g_0\,dx = ie^{i\lambda} g(1) + \lambda\int_0^1 e^{i\lambda x} g(x)\,dx,$

odakle je $f(\lambda) - \int_0^1 e^{i\lambda x} g(x)\,dx = \dfrac{ie^{i\lambda} g(1)}{\lambda}$.

Kako je na levoj strani prethodne jednakosti cela funkcija, mora biti $g(1) = 0$.

Lema 3.2. Ako za neko $R(x)\varepsilon L_2(0,1)$ važi jednakost

$$\int_0^1 e^{i\lambda x}R(x)dx = \frac{e^{i\lambda}-1-\lambda A}{\lambda(\lambda+B)} \qquad (A,B=\text{const i } e^{-iB}-1+AB=0)$$

tada postoji funkcija $R_0(x)$ takva da je

$$R_0'\varepsilon L_2(0,1) \quad , \quad R_0(1) = 0 \quad \text{i} \quad R_0(0) = -\frac{A}{i} \; .$$

Dokaz: Označimo sa $R_1(x)$ funkciju $R(x)-\frac{A}{i}(x-1)$.

Tada se može lako dokazati da je

$$J(\lambda) = \int_0^1 e^{i\lambda x}R_1(x)dx = \frac{\lambda(e^{i\lambda}-1+A_i e^{i\lambda}-A_i+AB)+AB_i e^{\lambda i}-AB_i}{\lambda^2(\lambda+B)}$$

Očevidno je $\lambda J(\lambda)\varepsilon L_2(R)$. Tada prema lemi 3.1. postoji funkcija $g\varepsilon L_2(0,1)$ takva da je $g'\varepsilon L_2(0,1)$, $g(0) = g(1) = 0$ i

$$\int_0^1 e^{i\lambda x}g(x)dx = J(\lambda).$$

Stavimo $R_0(x) = \frac{A}{i}(x-1) + g(x)$

Tada je $R_0'\varepsilon L_2(0,1)$, $R_0(0) = -\frac{A}{i}$, $R_0(1) = 0$.

Očevidno da R_0 zadovoljava uslove leme.

Teorema 3.4. Ako medju koeficijentima a,b,a_1,b_1,ω_1 i ω_2 postoji sledeća zavisnost: $a+b=0$ i $a_1+b_1=0$ ili $a\omega_2+b\omega_1=0$, sistem $\{\phi(x,\lambda_n)\}_{n=1}^{\infty}$ je dvostruko minimalan u prostoru $L_2(0,1)$.
(Sve oznake koje se spominju u teoremi uvedene su na početku §2).

Dokaz: Neka je $m\varepsilon N$. Kako je $\dfrac{e^{\mu i}-1-\mu A}{\mu(\mu+B)}\varepsilon L_2(R)$

to postoji funkcija $P_m^{(1)}\varepsilon L_2(0,1)$ takva da je

$$\int_0^1 \frac{P_m^{(1)}(x)}{-\dfrac{a_1\omega_1^2}{G'(\lambda_m)}} e^{i\mu x}dx = \frac{e^{\mu i}-1-\mu A}{\mu(\mu+B)} \qquad (3.16.)$$

gde je $A = \frac{i(e^{\lambda_m\omega_1}-1)}{\omega_1\lambda_m}$ i $B = i\omega_1\lambda_m$.

Tada prema lemi 3.2. postoji takva funkcija $P_m(x)$ da je

$$P_m'(x) \in L_2(0,1)\ ,\ P_m(1) = 0\ ,\ P_m(0) = \frac{a_1\omega_1}{\lambda_m G'(\lambda_m)}(e^{\lambda_m\omega_1}-1)$$

i koja zadovoljava jednakost (3.16.).

Ako u (3.16.) uvedemo smenu $\lambda\omega_1 = i\mu$ i imajući u vidu da umesto $P_m^{(1)}(x)$ pišemo $P_m(x)$ dobijamo:

$$\int_0^1 P_m(x)e^{\lambda\omega_1 x}dx = \frac{a_1}{G'(\lambda_m)} \cdot \frac{e^{\lambda\omega_1}-1-\lambda\frac{e^{\lambda_m\omega_1}-1}{\lambda_m}}{\lambda(\lambda-\lambda_m)} \tag{3.17.}$$

gde je $P_m' \in L_2(0,1)$, $P_m(1) = 0$ i $P_m(0) = \frac{a_1\omega_1}{\lambda_m G'(\lambda_m)} \cdot (e^{\lambda_m\omega_1}-1)$.

Na sličan način možemo ustanoviti da postoji $Q_m(x)$ takva da je $Q_m' \in L_2(0,1)$, $Q_m(1) = 0$, $Q_m(0) = \frac{b_1\omega_1}{\lambda_m G'(\lambda_m)}(e^{\lambda_m\omega_2}-1)$

i
$$\int_0^1 Q_m(x)e^{\lambda\omega_2 x}dx = \frac{b_1}{G'(\lambda_m)} \cdot \frac{e^{\lambda_m\omega_2}-1-\lambda\frac{e^{\lambda_m\omega_2}-1}{\lambda_m}}{\lambda(\lambda-\lambda_m)} \tag{3.18.}$$

Neposredno se može proveriti da iz $a+b=0$ i $a_1+b_1=0$ ili iz $a\omega_2+b\omega_1=0$ sledi:

$$(a+b)a_1b\omega_1(e^{\lambda_m\omega_1}-1)-ab_1\omega_2(a+b)(e^{\lambda_m\omega_2}-1)+(a_1+b_1)ab(\omega_1-\omega_2) = 0 \tag{3.19.}$$

(λ_m je koren funkcije $G(\lambda)$).

Odatle imamo:

$$(a+b)\frac{bP_m(0)-aQ_m(0)}{ab(\omega_1-\omega_2)} + \frac{a_1+b_1}{\lambda_m G'(\lambda_m)} = 0 \tag{3.20.}$$

Uvedimo sada funkcije $f_{1m}(x)$, $f_{0m}(x)$ pomoću:

$$f_{1m}(x) = \frac{\omega_2 bP_m(x) - a\omega_1 Q_m(x)}{ab(\omega_1-\omega_2)} \tag{3.21.}$$

$$\int_x^1 f_{0m}(t)dt = \frac{bP_m(x) - aQ_m(x)}{ab(\omega_1-\omega_2)} \tag{3.22.}$$

Kako je $P_m, Q_m \in L_2(0,1)$ to je $f_{1m} \in L_2(0,1)$, a zbog $P'_m, Q'_m \in L_2(0,1)$ sledi da je $f_{0m} \in L_2(0,1)$.

Iz (3.22.) sledi neophodnost da je $bP_m(1) - aQ_m(1) = 0$.

ω, to je u saglasnosti sa $P_m(1) = Q_m(1) = 0$.

Iz (3.22.) sledi

$$\int_0^1 f_{0m}dt = \frac{bP_m(0) - aQ_m(0)}{ab(\omega_1-\omega_2)} \tag{3.23.}$$

Imajući u vidu (3.20.) i (3.23.) dobijamo:

$$(a+b)\int_0^1 f_{0m}(t)dt + \frac{a_1+b_1}{\lambda_m G'(\lambda_m)} = 0 \tag{3.24.}$$

Iz (3.21.) sledi:

$$\left.\begin{aligned} af_{1m}(x) + \omega_1 a\int_x^1 f_{0m}(t)dt &= P_m(x) \\ bf_{1m}(x) + \omega_2 b\int_x^1 f_{0m}(t)dt &= Q_m(x) \end{aligned}\right\} \tag{3.24.}$$

Posle transformisanja iz (3.17.) i (3.18.) dobija se:

$$\int_0^1 P_m(x)e^{\lambda\omega_1 x}dx + \int_0^1 Q_m e^{\lambda\omega_2 x}dx = \frac{1}{\lambda}\left[\frac{G(\lambda)}{G'(\lambda_m)(\lambda-\lambda_m)} + \frac{a_1+b_1}{\lambda_m G'(\lambda_m)}\right] \tag{3.25.}$$

Transformisanjem (3.25.) primenom parcijalne integracije dobijamo:

$$\int_0^1 \phi(x,\lambda)(f_{0m}(x) + \lambda f_{1m}(x))dx = \frac{G(\lambda)}{G'(\lambda_m)(\lambda-\lambda_m)} + (a+b)\int_0^1 f_{0m}dx + \frac{a_1+b_1}{\lambda_m G'(\lambda_m)}$$

Imajući u vidu (3.24.) poslednja jednakost postaje

$$\int_0^1 \phi(x,\lambda)(f_{0m}+\lambda f_{1m})dx = \frac{G(\lambda)}{G'(\lambda_m)(\lambda-\lambda_m)} \qquad (3.26.)$$

Znači za dati prirodan broj m uspeli smo da odredimo dve funkcije f_{0m}, $f_{1m} \in L_2(0,1)$ (pomoću (3.21.) i (3.22.), tako da za svako $\lambda \in \mathbb{C}$ važi (3.26.). Na taj način dolazimo do dva niza funkcija $\{f_{0m}\}_{m=1}^{\infty}$ i $\{f_{1m}\}_{m=1}^{\infty}$ $(f_{0m}, f_{1m} \in L_2(0,1))$, tako da (3.26.) važi za svako $\lambda \in \mathbb{C}$.

Iz (3.26.) očevidno sledi $\int_0^1 \phi(x,\lambda_k)(f_{0m}+\lambda_k \cdot f_{1m})dx = \delta_{mk}$

Odatle sledi da je sistem $(\overline{f_{0m}}, \overline{f_{1m}})$ biortogonalan sistemu $(\phi(x,\lambda_n), \lambda_n \phi(x,\lambda_n))$ u prostoru $\tilde{L}_2$. Odatle sledi dvostruka minimalnost $\{\phi(x,\lambda_n)\}_{n=1}^{\infty}$ u $L_2(0,1)$.

Primedba 3.1. U radu [27] je dokazana dvostruka minimalnost gornjeg sistema samo u slučaju kada se ω_1 i ω_2 nalaze na imaginarnoj osi sa raznih strana kordinatnog početka. Ta činjenica je vrlo važna u dokazu jer su sve tri tačke $\omega_1, 0, \omega_2$, kolinearne i moguće je lako direktno primenjivati Furijeovu transformaciju.

Primedba 3.2. Analogno se može dokazati dvostruka minimalnost ako je $G(\lambda)$ oblika:

$$G(\lambda) = a_1' e^{\lambda\omega_1} + b_1 e^{\lambda\omega_2} + \int_\Gamma K(t) e^{\lambda t} dt \qquad \text{gde je}$$

$K \in L_2(\Gamma)$ i $\Gamma = [\omega_2, 0] \cup [0, \omega_1]$ i $G(\lambda)$ ima proste korene.

Posledica 3.2. Sistem svojstvenih funkcija pramena

$$\begin{aligned} &y'' + a\lambda y' + \lambda^2 y = 0 \\ &y(0) = y(\pi) = 0 \end{aligned} \qquad -2 < a < 2$$

je dvostruko potpun i minimalan u $L_2(0,\pi)$.

§3. Jedan uslov da sistem

$$\{e^{-\alpha\lambda_n x}\sin\lambda_n x\}_{n=1}^{\infty}$$

nije baza u $L_2(0,\pi)$

Poznato je da je sistem $\{e^{\sigma n x}\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ $(\sigma\varepsilon R)$ potpun i minimalan u $L_2(0,\pi)$ [35]. Takodje je poznato da on nije baza u $L_2(0,\pi)$.

Ovde ćemo navesti neke uslove koje treba da zadovolji niz $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ tako da sistem $\{e^{-\alpha\lambda_n x}\sin\lambda_n x\}_{n=1}^{\infty}$ ne bude baza u $L_2(0,\pi)$.

Teorema 3.5. Neka je $\alpha>0$ i niz $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ (počev od nekog indeksa n_0) leži u uglu $\{\lambda: |\arg\lambda|<\phi_0=\operatorname{arctg}\alpha\}$ i $Re\lambda\to\infty$. Ako postoji ε: $0<\varepsilon<\pi$,

tako da je $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(Re\lambda_n)^{3/2}e^{-\varepsilon(\alpha Re\lambda_n-|Jm\lambda_n|)}<\infty$ $\left(\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}(Re\lambda_n)^{3/2}e^{-\varepsilon(\alpha Re\lambda_n-|Jm\lambda_n|)}<\infty\right)$,

(3.27.)

tada sistem $\{e^{-\alpha\lambda_n x}\sin\lambda_n x\}_{n=1}^{\infty}$ nije baza u $L_2(0,\pi)$.

Dokaz: Ne umanjujući opštost pretpostavimo da ceo niz λ_n leži u uglu $\{\lambda: |\arg\lambda|<\phi_0\}$.

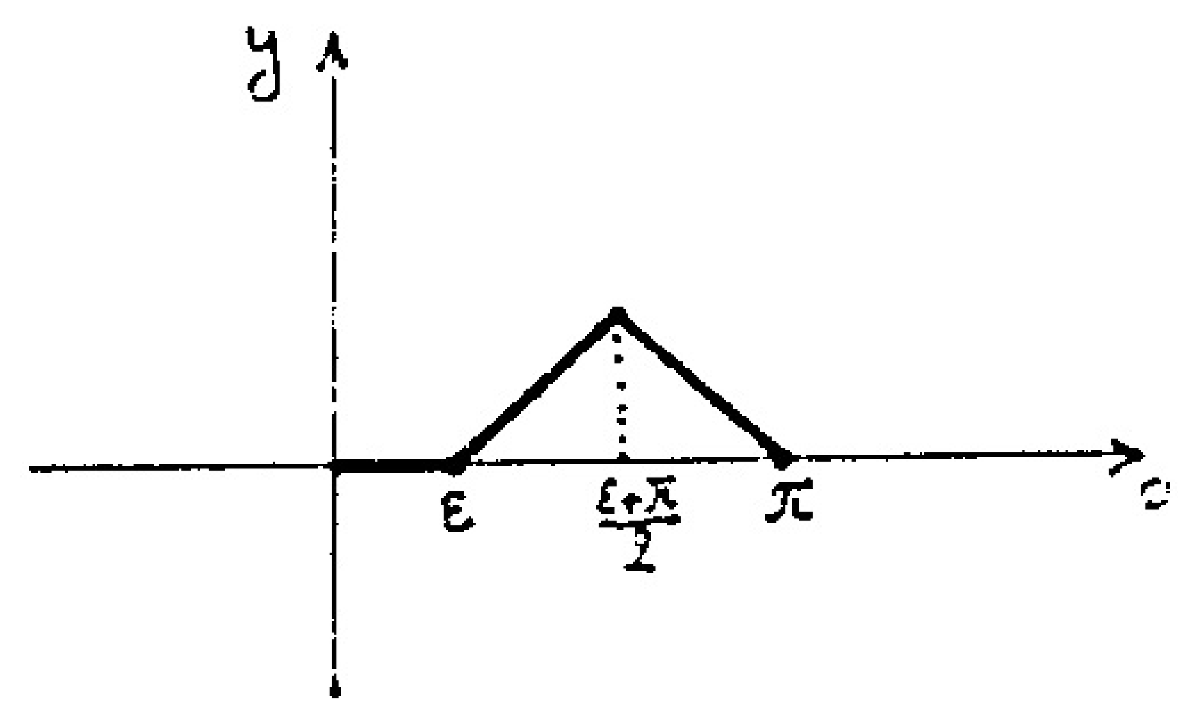
Pretpostavimo da je sistem $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ baza u $L_2(0,\pi)$. $(y_n(x)=e^{-\alpha\lambda_n x}\sin\lambda_n x)$. Tada postoji jedinstven sistem $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ koji je njemu biortogonalan. Tada [7] postoji konstanta $C>0$ $(C<\infty)$ takva da je

$$\|y_n\|\,\|g_n\|\leq C \qquad (3.28.)$$

Svaka funkcija $f\varepsilon L_2(0,\pi)$ može se prikazati u obliku

$$f=\sum_{n=1}^{\infty}(f,g_n)y_n.$$

Neka je $f_0(x)$ funkcija čiji je grafik prikazan na crtežu:



Očito je $f_0(x)$ neprekidna funkcija koja nema izvod u tačkama ε i $\frac{\pi+\varepsilon}{2}$.

Za takvu funkciju imamo:

$$f_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(f_0,g_n)y_n(x) \tag{3.29.}$$

Ocenimo koeficijente (f_0,g_n).

Prema nejednakosti Košija važi:

$|(f_0,g_n)| \leq \|f_n\|\cdot\|g_n\|$ i koristeći se sa (3.28.) dobijamo:

$$|(f_0,g_n)| \leq \frac{C\,\|f_0\|}{\|y_n\|} \tag{3.30.}$$

Ocenimo $\|y_n\|$ odozdo.

Kako je $\|y_n\|^2 = \int_0^{\pi} e^{-\alpha x(\lambda_n+\bar{\lambda}_n)}|\sin^2\lambda_n x|dx$, to, ako se stavi $\lambda_n = u_n+iv_n$, dobijamo da je $|\sin^2\lambda_n x| \geq \sin^2 u_n x$, odakle sledi $\|y_n\|^2 \geq \int_0^{\pi} e^{-2\alpha u_n x}\sin^2 u_n x\,dx$

Iz poslednje nejednakosti se dobija

$$\|y_n\|^2 \geq \frac{C_1^2}{u_n} \tag{3.31.}$$

za neku konstantu $C_1>0$, a iz (3.30.) i (3.31.) konačno dobijamo: $|(f_0,g_n)| \leq \frac{C_0}{C_1}\|f_0\|\sqrt{u_n}$.

S druge strane lako se utvrdjuje da važe sledeće nejednakosti:

$$|e^{-\alpha\lambda_n x}\sin\lambda_n x| \leq e^{-x(\alpha u_n-|v_n|)} \tag{3.32.}$$

$$|(e^{-\alpha\lambda_n x}\sin\lambda_n x)'| \leq C_2 u_n e^{-x(\alpha u_n-|v_n|}\quad (C_2=\text{const}) \tag{3.33.}$$

Posmatrajmo sada funkciju

$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(f_0,g_n)y_n(x)$ na segmentu $[\varepsilon,\pi]$.

zbog ocene $|(f_0,g_n)y_n(x)| < \frac{C_0\|f_0\|}{C_1} \sqrt{u_n} e^{-\varepsilon(\alpha u_n - |v_n|)}$ na $[\varepsilon,\pi]$

i zbog činjenice da red $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{R_e\lambda_n}\, e^{-\varepsilon(\alpha R_e\lambda_n - |J_m\lambda_n|)}$ konvergira,

zaključujemo da je $\Psi(x)$ neprekidna funkcija na segmentu $[\varepsilon,\pi]$.

Slično na osnovu pretpostavki učinjenih u teoremi dokazuje se da i red $\sum_{n=1}^{\infty}(f_0,g_n)y_n'$ ravnomerno konvergira na odsečku $[\varepsilon,\pi]$.

Znači funkcija $\Psi(x)$ ima izvod u svakoj tački segmenta (ε,π).

Kako je $f_0 = \sum_{n=1}^{\infty}(f_0,g_n)y_n$, važi:

$$\|f_0 - s_n\|^2 \underset{n\to\infty}{\to} 0, \quad \text{gde je} \quad s_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n}(f_0,g_\nu)y_\nu(x) .$$

Odatle sledi:
$$\int_{\varepsilon}^{\pi} |f_0(x)-s_n(x)|^2 dx \underset{n\to\infty}{\to} 0 \tag{3.34.}$$

Iz nejednakosti

$$\left(\int_{\varepsilon}^{\pi}|f_0-\Psi|^2 dx\right)^{1/2} < \left(\int_{\varepsilon}^{\pi}|f_0-s_n|^2 dx\right)^{1/2} + \left(\int_{\varepsilon}^{\pi}|s_n-\Psi|^2 dx\right)^{1/2},$$

koristeći se sa (3.34.) i činjenicom da

$$s_n \rightrightarrows \Psi \quad \text{na} \quad (\varepsilon,\pi)$$

dobijamo
$$\int_{\varepsilon}^{\pi}|f_0(x)-\Psi(x)|^2 dx = 0 \tag{3.35.}$$

Funkcije f_0, Ψ su neprekidne na $[\varepsilon,\pi]$ pa iz (3.35.) sledi da je $f_0(x) = \Psi(x)$ za $x\varepsilon(\varepsilon,\pi)$.

Funkcija Ψ ima izvod u svakoj tački intervala (ε,π), pa i u tački $x = \frac{\varepsilon+\pi}{2}$.

No, $f_0(x)$ u tački $x = \frac{\varepsilon+\pi}{2}$ nema izvoda.

To je kontradikcija.

Znači $\{e^{-\alpha\lambda_n x}\sin\lambda_n x\}_{n=1}^{\infty}$ nije baza u $L_2(0,\pi)$.

Posledica 3.3. Sistem $\{e^{-\alpha\lambda_n x}\sin\lambda_n x\}_{n=1}^{\infty}$ nije baza u $L_2(0,\pi)$, ako je $\lambda_n = n + O(1)$.

Primedba 3.3. Pitanje potpunosti sistema $\{e^{-\alpha\lambda_n x}\sin\lambda_n x\}_{n=1}^{\infty}$ u $L_2(0,\pi)$ u slučaju $\lambda_n = n + O(\frac{1}{n})$ je veoma složeno i rešenje do danas nije poznato.

§4. O zbirljivosti Furijeovog reda nekih funkcija po sistemu $\{e^{i\lambda_n x}\}_{n=1}^{\infty}$ u $L_2(-\pi,\pi)$

A) Pretpostavimo da sistem $\{e^{i\lambda_n x}\}_{n=1}^{\infty}$ ima biortogonalni sistem u prostoru $L_2(-\pi,\pi)$.

Razmatramo red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^{\alpha} t}(f,h_n)e^{i\lambda_n x}$ (3.36.)

Ako su $S_{N_\nu}(t)$ delimične sume reda (3.36.) i ako niz tih delimičnih suma konvergira (u $L_2(-\pi,\pi)$ za svako $t>0$ k funkciji $F(x,t)$ pri čemu je

$\lim\limits_{t\to 0+} F(x,t) = f(x)$, (konvergancija u $L_2(-\pi,\pi)$ tada kažemo da je red Furje koji odgovara funkciji f zbirljiv metodom Abela poretka α.

Označimo sa W sledeći skup funkcija:

$$W = \{ f : f(x) = \int_{-\pi}^{x} g(t)dt \ , \ g\varepsilon L_2(-\pi,\pi) \quad i \quad \int_{-\pi}^{\pi} g(t)dt = 0\}$$

Teorema 3.6. Neka je $\phi(\lambda)$ cela funkcija eksponencijalnog tipa $\sigma<\pi$ koja ispunjava sledeće uslove:

1° $\frac{\phi(\lambda)}{\sqrt{1+\lambda^2}} \varepsilon L_2(R)$ i $\phi(\lambda)$ ima u tačkama $\lambda=\overline{\lambda}_n$, koje pripadaju uglu $\{\lambda: 0<\varepsilon<|\arg\lambda|<\theta-\varepsilon\}$ $(0<\theta<\frac{\pi}{2})$ proste nule u tom uglu nema drugih nula.

2° Sistem $\{e^{i\lambda_n x}\}_{n=1}^{\infty}$ je potpun u $L_2(-\pi,\pi)$, a sistem $\{\frac{\phi(\lambda)}{\lambda-\bar{\lambda}_n}\}_{n=1}^{\infty}$ je potpun u $L_2(R)$.

3° $|\phi(\lambda)|\geq Ke^{\pi|J_m\lambda|}$ (K=const)

na pravcima $|\arg\lambda| = \varepsilon$ i $|\arg\lambda| = \theta-\varepsilon$.

Pod tim uslovima Furijeov red svake funkcije $f\varepsilon W$ po sistemu $\{e^{i\lambda_n x}\}_{n=1}^{\infty}$ je zbirljiv metodom Abela poretka α gde je $1<\alpha<\frac{\pi}{2\theta}$.

Dokaz: Označimo $\Omega_1 = \{\lambda: \ |\lambda|>r \quad \varepsilon<\arg\lambda<\theta-\varepsilon\}$

$\Omega_2 = \{\lambda: \ |\lambda|>r \ -\varepsilon>\arg\lambda>\varepsilon-\theta\}$

gde je $r>0$ dovoljno mali broj takav da niz $\{\bar{\lambda}_n\}_{n=1}^{\infty}$ leži u $\Omega_1\cup\Omega_2$.

Označimo sa Γ_i $(i=1,2)$ granice oblasti Ω_i $(i=1,2)$ i $\Gamma = \Gamma_1\cup\Gamma_2$.

Razmatramo funkciju

$$F(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{-\lambda^{\alpha}t+i\lambda x}\frac{R(\lambda)}{\phi(\bar{\lambda})}\,d\lambda \qquad (\lambda^{\alpha}>0 \quad \text{za } \lambda>0)$$

gde je $1<\alpha<\frac{\pi}{2\theta}$, $t>0$,

$$R(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} H(s)\frac{\overline{\phi(s)}}{s-\lambda}\,ds \quad , \quad H(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ist}dt \quad \text{i} \quad f\varepsilon W.$$

(Smer integracije se bira tako da oblasti Ω_i ostaju levo od kontura Γ_i $i=1,2$).

Dokažimo da integral $\int_{\Gamma} e^{-\lambda^{\alpha}t+i\lambda x}\frac{R(\lambda)}{\phi(\bar{\lambda})}\,d\lambda$ konvergira .

Dovoljno je pokazati konvergenciju $\int_{\Gamma_i} e^{-\lambda^{\alpha}t+i\lambda x}\frac{R(\lambda)}{\phi(\bar{\lambda})}\,d\lambda$ za $i=1,2$.

Ocenimo najpre funkciju $R(\lambda)$.

Kako je $f\varepsilon W$ dobijamo:

$$\left.\begin{aligned} -isH(s) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,de^{-ist} = \frac{1}{2\pi}\, f(t)e^{-ist}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ist}f'(t)dt \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ist}g(t)dt \qquad (g\varepsilon L_2(-\pi,\pi)) \end{aligned}\right\} \quad (3.37.)$$

Iz (3.37.) i teoreme 1.8. sledi $\int_{-\infty}^{\infty} s^2 |H(s)|^2 ds < \infty$, tj. $\sqrt{1+s^2}\, H(s) \in L_2(R)$.

Ocenimo funkciju $R(\lambda)$ na Γ.

Kako je $R(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} H(s) \frac{\overline{\phi(s)}}{s-\lambda} ds = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{1+s^2}\, H(s) \frac{\overline{\phi(s)}}{\sqrt{1+s^2}(s-\lambda)} ds$,

to primenom nejednakosti Košija dobijamo:

$$|R(\lambda)|^2 < \int_{-\infty}^{\infty} (1+s^2) |H(s)|^2 ds \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\phi(s)|^2}{1+s^2} \frac{ds}{|s-\lambda|^2} \tag{3.38.}$$

No, ako je $\lambda \in \Gamma$ tada je $|s-\lambda| > |J_m \lambda|$; ako se to uvrsti u (3.38.) dobijamo: $|R(\lambda)|^2 < \frac{C_0}{|J_m\lambda|^2}$ $\left(C_0 = \int_R (1+s^2)|H(s)|^2 ds \int_R \frac{|\phi(s)|^2}{1+s^2} ds\right)$

(3.39.)

Iz ocene (3.39.), pretpostavke 3^o i činjenice da je $1 < \alpha < \frac{\pi}{2\theta}$ dobija se da za svako $t>0$

$\int_\Gamma e^{-\lambda^\alpha t + i\lambda x} \frac{R(\lambda)}{\overline{\phi(\overline{\lambda})}} d\lambda$ konvergira i funkcija $F(x,t)$

pripada $L_2(-\pi,\pi)$.

Neka je $t_1, t_2 > 0$ i $0 < \delta < 1/2$. Tada prema nejednakosti Košija:

$$|F(x,t_1) - F(x,t_2)|^2 = \left| -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \left| \frac{e^{-\lambda^\alpha t_1} - e^{-\lambda^\alpha t_2}}{\lambda^{1/2+\delta}} e^{i\lambda x} \lambda^{1/2+\delta} \frac{R(\lambda)}{\overline{\phi(\overline{\lambda})}} d\lambda \right|^2 \leq\right.$$

$$\leq \frac{1}{4\pi^2} \int_\Gamma \frac{|e^{-\lambda^\alpha t_1} - e^{-\lambda^\alpha t_2}|^2}{|\lambda|^{1+2\delta}} |d\lambda| \int_\Gamma |\lambda|^{1+2\delta} |e^{i\lambda x}|^2 \frac{|R(\lambda)|^2}{|\phi(\overline{\lambda})|^2} d\lambda \leq$$

$$\leq \frac{1}{4\pi^2} \int_\Gamma \frac{|-e^{-\lambda^\alpha t_1} - e^{-\lambda^\alpha t_2}|^2}{|\lambda|^{1+2\delta}} |d\lambda| \left(\int_{\Gamma_0} |\lambda|^{1+2\delta} |e^{i\lambda x}|^2 \frac{C_0^2}{|J_m\lambda|^2} \cdot \frac{1}{K^2} e^{-2\pi|J_m\lambda|} |d\lambda| + C_2 \right) \tag{3.40.}$$

(U poslednjem prelazu je korišćena ocena (3.39.) i uslov 3^o, koji ispunjava funkcija ϕ na Γ_0. Ovde smo sa Γ_0 označili pravolinijski deo granica oblasti Ω_1 i Ω_2, a sa C_2 vrednost integrala

$$\int|\lambda|^{1+2\delta}|e^{i\lambda x}|^2\frac{|R(\lambda)|^2}{|\phi(\bar{\lambda})|^2}|d\lambda|$$ po luku kružnica koje su na granici oblasti Ω_1 i Ω_2.).

Iz (3.40.) se dobija:

$$\int_{-\pi}^{\pi}|F(x,t_1)-F(x,t_2|^2dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma}\frac{|e^{-\lambda^\alpha t_1}-e^{-\lambda^\alpha t_2}|^2}{|\lambda|^{1+2\delta}}|d\lambda|\cdot(2\pi C_2+\int_{\Gamma_0}|\lambda|^{1+2\delta}\frac{C_0^2}{K^2}\frac{e^{-2\pi|J_m\lambda|}}{|J_m\lambda|^2}(\int_{-\pi}^{\pi}|e^{i\lambda x}|^2dx)|d\lambda| \tag{3.41.}$$

Koristeći se činjenicom da ako je $\lambda\varepsilon\Gamma_0$, tada je $|J_m\lambda|>C_1|\lambda|$ (za neko $C_1>0$) i imajući u vidu nejednakost (3.41.) dobijamo:

$$\int_{-\pi}^{\pi}|F(x,t_1)-F(x,t_2)|^2dx\leq\frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma}\frac{|e^{-\lambda^\alpha t_1}-e^{-\lambda^\alpha t_2}|^2}{|\lambda|^{1+2\delta}}|d\lambda|\,(2\pi C_2+\frac{C_0^2}{C_1^3K^2}\int_{\Gamma_0}\frac{|d\lambda|}{|\lambda|^{2-2\delta}}). \tag{3.42.}$$

Kako integral $\int_{\Gamma_0}\frac{|d\lambda|}{|\lambda|^{2-2\delta}}$ konvergira, to stavljajući

$L=\frac{1}{4\pi^2}(2\pi C_2+\frac{C_0^2}{C_1^3K^2}\int_{\Gamma_0}\frac{|d\lambda|}{|\lambda|^{2-2\delta}})$, nejednakost (3.42.) postaje:

$$\int_{-\pi}^{\pi}|F(x,t_1)-F(x,t_2)|^2dx\leq L\int_{\Gamma}\frac{|e^{-\lambda^\alpha t_1}-e^{-\lambda^\alpha t_2}|^2}{|\lambda|^{1+2\delta}}|d\lambda| \quad . \tag{3.43.}$$

Iz (3.43.) neposredno sledi da postoji:

$$\lim_{\substack{t_1\to 0+\\ t_2\to 0+}}\int_{-\pi}^{\pi}|F(x,t_1)-F(x,t_2)|^2dx=0,$$ a to znači da postoji

$\lim_{t\to 0+}F(x,t)$ po normi prostora $L_2(-\pi,\pi)$.

Neka je R neki pozitivan broj i $1>\varepsilon_0>0$. Tada iz teoreme 1.9. sledi da u prstenu $\{\lambda: R>|\lambda|>(1-\varepsilon_0)R\}$ postoji kružnica $\{\lambda: |\lambda|=\tilde{R}\}$ na kojoj važi ocena

$$|\phi(\lambda)| > e^{-\ln\{\max_{0\leq\psi\leq 2\pi}|\phi(2eRe^{i\psi})|\}(2+\ln\frac{3e}{2\varepsilon_0})}$$

Razmotrimo sada niz brojeva $R_\nu = r(1-\varepsilon_0)^{1-\nu}$ $\nu=0,1,2,\ldots$ Kako je $\overline{\phi(\overline{\lambda})}$ cela funkcija, to u prstenu $\{\lambda: R_\nu < |\lambda| < R_{\nu+1}\}$ postoji kružnica $\{\lambda: |\lambda| = \tilde{R}_\nu\}$ na kojoj važi nejednakost:

$$|\phi(\lambda)| > e^{-\ln\{\max_{0\leq\psi\leq 2\pi}|\phi(2eR_{\nu+1}e^{i\psi})|\}(2+\ln\frac{3e}{2\varepsilon_0})} \tag{3.44.}$$

Označimo sa N_ν broj nula funkcije $\overline{\phi(\overline{\lambda})}$, koji pripadaju skupu $(\Omega_1 \cup \Omega_2) \cap \{\lambda: |\lambda| < \tilde{R}_\nu\}$.

Označimo sa $\gamma_{k\nu}$ $(k=1,2)$ deo kružnice $\{\lambda: |\lambda| = \tilde{R}_\nu\}$, koji pripada oblasti Ω_k $(k=1,2)$.

Neka je $\Gamma_{1\nu}$ granica oblasti $\{\lambda: \tilde{R}_\nu > |\lambda| > r \quad \varepsilon < \arg\lambda < \theta - \varepsilon\}$

a $\Gamma_{2\nu}$ granica oblasti $\{\lambda: \tilde{R}_\nu > |\lambda| > r \quad -\varepsilon > \arg\lambda > \varepsilon - \theta\}$

i $\Gamma_\nu = \Gamma_{1\nu} \cup \Gamma_{2\nu}$.

Izračunajmo integral: $-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n} e^{-\lambda^\alpha t + i\lambda x} \frac{R(\lambda)}{\overline{\phi(\overline{\lambda})}}\, d\lambda$

Dobijamo:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n} e^{-\lambda^\alpha t + i\lambda x} \frac{R(\lambda)}{\overline{\phi(\overline{\lambda})}}\, d\lambda = \sum_{\nu=1}^{n-1}\Big(\sum_{s=N_\nu+1}^{N_{\nu+1}} \operatorname*{Res}_{\nu=\nu_s} e^{-i\lambda x - \lambda^\alpha t}\frac{R(\lambda)}{\overline{\phi(\overline{\lambda})}}\Big) \tag{3.45.}$$

Iz (3.44.) sledi: $$\int_{\gamma_{kn}} e^{-\lambda^\alpha t + i\lambda x}\frac{R(\lambda)}{\overline{\phi(\overline{\lambda})}}\, d\lambda \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad (x=1,2) \tag{3.46.}$$

(jer je $1 < \alpha < \frac{\pi}{2\theta}$)

Kada u (3.45.) pustimo da $n\to\infty$, imajući u vidu (3.46.) dobijamo:

$$F(x,t) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\Big(\sum_{s=N_\nu+1}^{N_\nu+1} \operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_s} e^{i\lambda x - \lambda^\alpha t}\frac{R(\lambda)}{\overline{\phi(\overline{\lambda})}}\Big).$$

Pošto su $\lambda = \overline{\lambda}_s$ proste nule funkcije , dobijamo:

$$F(x,t) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\Big(\sum_{s=N_\nu+1}^{N_\nu+1} e^{i\lambda_s - \lambda_s^\alpha t}\frac{R(\lambda_s)}{\overline{\phi(\overline{\lambda}_s)}}\Big), \tag{3.47.}$$

Kako je $\frac{\phi(\lambda)}{\sqrt{1+\lambda^2}} \in L_2(R)$, to je sistem $\{e^{i\lambda_n x}\}_{n=1}^{\infty}$ minimalan.

Njemu biortogonalan sistem $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ se lako konstruiše:

$$h_k(t) = \frac{1}{2\pi}\ \text{l.i.m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(s)e^{ist}}{(s-\overline{\lambda}_k)\phi'(\overline{\lambda}_k)}\, ds. \tag{3.48.}$$

Koristeći se sa (3.48.) lako se dobija da je:

$$(f,h_s) = \frac{R(\lambda_s)}{\overline{\phi'(\overline{\lambda}_s)}} \tag{3.49.}$$

Stavljajući (3.49.) u (3.47.) dobijamo:

$$F(x,t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \Big(\sum_{s=N_\nu+1}^{N_{\nu+1}} e^{i\lambda_s x-\lambda_s^{\alpha} t}(f,h_s)\Big). \tag{3.50.}$$

Dokažimo sada potpunost sistema $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ u $L_2(-\pi,\pi)$. Neka je $h_0 \in L_2(-\pi,\pi)$, takva da je $(h_0,h_k)=0$ za svako $k\in N$. Kako iz činjenice $(h_0,h_k)=0$ sledi

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_0(s) \overline{\Big(\frac{\phi(s)}{s-\overline{\lambda}_k} \Big)}\, ds = 0, \quad \text{gde je}$$

$$H_0(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_0(t)e^{-ist}dt, \quad \text{to zbog potpunosti sistema}$$

$\{\frac{\phi(s)}{s-\overline{\lambda}_k}\}_{k=1}^{\infty}$ u $L_2(R)$ sledi da je $H_0(s)=0$ u $L_2(R)$.

Odatle neposredno sledi da je $h_0=0$ u $L_2(-\pi,\pi)$.

Jednakost (3.50.) pomnožimo skalarno sa h_k. Tada dobijamo:

$$(F(x,t),\ h_k(x)) = e^{-\lambda_k^{\alpha} t}(f,h_k) \tag{3.51.}$$

Ako u (3.51.) pustimo da $t\to 0+$ tada po ranije dokazanom $F(x,t) \xrightarrow{L_2} F_0(x)$ pa dobijamo:

$$(F_0-f,h_k) = 0, \quad \text{za svako } k\in N.$$

No, iz potpunosti sistema $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ u $L_2(-\pi,\pi)$ sledi da je $F_0=f$.

Znači $$\lim_{t\to 0+}\sum_{\nu=1}^{\infty}\Big(\sum_{s=N_\nu+1}^{N_\nu+1}(f,h_s)\,e^{-\lambda_s^{\alpha}t}e^{i\lambda_s x}\Big)=f(x),$$

(konvergencija po normi $L_2(-\pi,\pi)$ što je trebalo dokazati.

Primedba 3.4. U uvodu smo napomenuli da postoje neki rezultati o zbirljivosti po Abelu Furijeovih redova po nekom sistemu funkcija. Tako je u radu [19] to uradjeno za sistem svojstvenih funkcija nekih diferencijalnih operatora. Ali pri tome se bitno koristi funkcija Grina odgovarajućeg operatora.

Kod nas je zadat eksponencijalni sistem i na raspolaganju nemamo nikakav diferencijalni operator niti njegovu funkciju Grina. To stvara glavne teškoće. Ali uspeli smo da formiramo funkciju $\frac{R(\lambda)}{\phi(\bar{\lambda})}$ koja igra ulogu funkcije Grina i koja omogućava da se dobije tvrdjenje.

B) Neka je $\{e^{-is_k x}\}_{k=1}^{\infty}$ neki potpun i minimalan sistem i $\{h_k\}$ njemu biortogonalan sistem (u $L_2(-\pi,\pi)$).

Neka je $f\in L_2(-\pi,\pi)$. Za tu funkciju sastavimo parcijalnu sumu poretka $s(s>0)$ Furijeovog reda | |:

$$\sigma_t^s(x,f)=\sum_{1<k<t}\Big(1-\frac{s_k^2}{|s_{|t|}|^2}\Big)^s(f,h_k)e^{-is_k x}$$

Govorićemo da sredine Risa (tj. $\sigma_t^s(x,f)$) sistema $\{e^{-is_k x}\}_{k=1}^{\infty}$ imaju svojstvo bazisnosti ako za svaku funkciju $f\in L_2(-\pi,\pi)$ i za svaki kompakt intervala $(-\pi,\pi)$ važi:

$$\lim_{t\to\infty}\|\sigma_t^s(x,f)-f(x)\|_{L_2(K)}=0.$$

Teorema 3.7. Neka je $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ niz takav da je $|J_m s_k|<h$

$$\sum_{t<|R_e s_k|<t+1}1\le C_0 \qquad \text{za svako } t>0$$

i sistem $\{e^{-is_k x}\}_{k=1}^{\infty}$ je potpun u $L_2(-\pi,\pi)$.

Neka je $\phi(\lambda)$ cela funckija eksponencijalnog tipa $\sigma<\pi$, takva da je $\phi(-\bar{s}_k)=0$ $(\phi'(-\bar{s}_k)\neq 0)$, $|\phi(x\pm ih)|\leq M<\infty$ i $\phi(\lambda)\varepsilon R$, kada je $\lambda\varepsilon R$.

Ako je $|\phi'(\bar{s}_k)|^2|s_k|^{2s}\sqrt{h^2-Jm^2s_k}\geq C_0>0$ za svako $k\varepsilon N$, $(s<1)$, tada sredine Risa sistema $\{e^{-is_kx}\}_{k=1}^{\infty}$ imaju svojstvo bazisnosti.

Dokaz: Pošto je ϕ funkcija eksponencijalnog tipa i $|\phi(x\pm ih)|\leq M$, to prema teoremi 1.4. u traci $\{\lambda: |Jm\lambda|<h\}$ važi nejednakost $|\phi(\lambda)|\leq M$.

Tada funkcija $\quad G_k(\lambda) = \dfrac{\phi(\lambda)}{(\lambda+\bar{s}_k)\phi'(-\bar{s}_k)}$ pripada $L_2(R)$.

Označimo $\quad h_k(t) = \dfrac{1}{2\pi}\ \text{l.i.m.} \displaystyle\int_R G_k(\lambda)e^{i\lambda t}d\lambda$.

Tada će biti $\quad G_k(\lambda) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} h_k(t)e^{-i\lambda t}dt$.

(Inverzna Furijeova transformacija)

Kako je $\quad G_k(-\bar{s}_e) = \delta_{ke}$, dobijamo:

$$(h_k(t),\ e^{-is_et}) = \delta_{ke}.$$

Znači $\{h_k(t)\}_1^{\infty}$ je biortogonalan sistemu $\{e^{-is_kx}\}_1^{\infty}$.

Neka je K kompakt: $K\subset(-\pi,\pi)$. Očito je da $K\subset[-a,a]\subset(-\pi,\pi)$.

Potrebno je oceniti $\|e^{-is_kx}\|_{L_2(K)}\cdot\|h_k\|_{L_2(-\pi,\pi)}$.

Ocenimo prvo $\|e^{-is_kx}\|_{L_2(K)}$

$$\|e^{-is_kx}\|^2_{L_2(K)} < \|e^{-is_kx}\|^2_{L_2(-a,a)} = \frac{sh(2aJ_ms_k)}{Jms_k} \leq 2M_0a \qquad (3.52.)$$

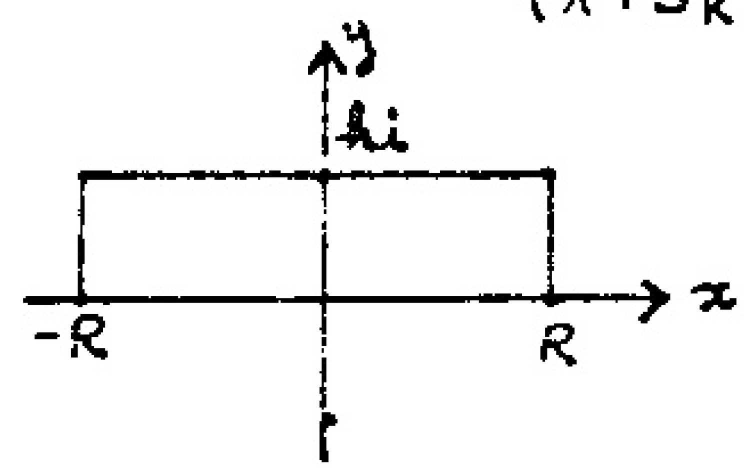
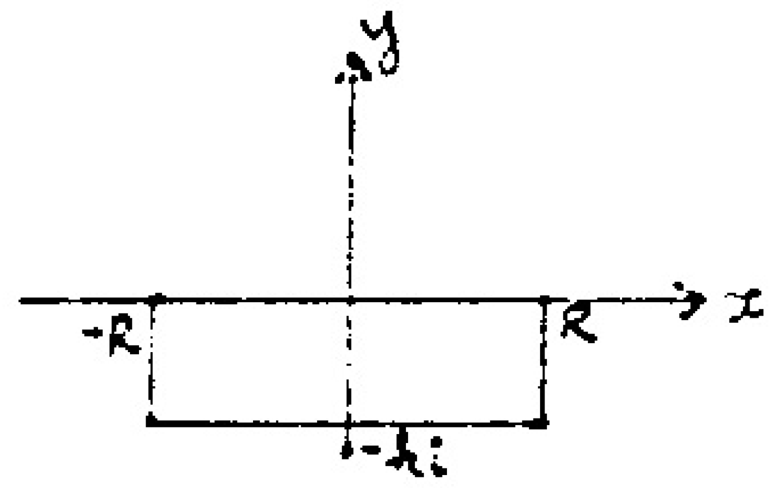
$$\left(\text{Ovde je } M_0 = \max_{0<x<2ah}\frac{shx}{x}\right)$$

Prema teoremi Planšerelja važi:

$$\|h_k\|^2_{L_2(-\pi,\pi)} = \frac{1}{2\pi}\int_R|G_k(\lambda)|^2d\lambda = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{|\phi'(-\bar{s}_k)|^2}\int_R\left|\frac{\phi(\lambda)}{\lambda+s_k}\right|^2d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{|\phi'(-\bar{s}_k)|^2}\int_R\frac{\phi(\lambda)\overline{\phi(\lambda)}}{(\lambda+s_k)(\lambda+\bar{s}_k)}d\lambda = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{|\phi'(-\bar{s}_k)|^2}\int_R\frac{\phi^2(\lambda)}{(\lambda+s_k)(\lambda+\bar{s}_k)}d\lambda.$$

(jer je $\phi(\lambda)\in R$ za $\lambda\in R$).

Za funkciju $\frac{\phi^2(\lambda)}{(\lambda+\bar{s}_k)(\lambda+s_k)}$ možemo uvek izabrati konturu oblika  ili oblika 

tako da unutar takve konture ona bude analitička i neprekidna na granici.

Pretpostavimo (odredjenosti radi) da je funkcija

$\frac{\phi^2(\lambda)}{(\lambda+\bar{s}_k)(\lambda+s_k)}$ analitička i neprekidna na granici tognjeg pravougaonika. (slično se radi i za donji).

Kako je $|\phi(\lambda)|\leq M$ u traci $|Jm\lambda|\leq h$ dobijamo:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\phi^2(\lambda)}{(\lambda+s_k)(\lambda+\bar{s}_k)}\,d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\phi^2(x+ih)}{(x+hi+\bar{s}_k)(x+hi+s_k)}\,dx \leq M^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{|x+hi+\bar{s}_k|\,|x+hi+s_k|} \tag{3.53.}$$

Iz (3.53.) primenom nejednakosti Košija dobijamo:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\phi^2(\lambda)}{(\lambda+s_k)(\lambda+\bar{s}_k)}\,d\lambda \leq M^2\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{|x+hi+\bar{s}_k|^2}\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{|x+hi+s_k|^2}\right)^{1/2} = \frac{M^2\pi}{\sqrt{h^2-Jm^2 s_k}}$$

Znači $$\|h_k\|^2_{L_2(-\pi,\pi)} \leq \frac{M^2}{2}\,\frac{1}{|\phi'(-\bar{s}_k)|^2}\,\frac{1}{\sqrt{h^2-Jm^2 s_k}} \tag{3.54.}$$

Iz (3.52.) i (3.54.) se dobija:

$$\|e^{-is_kx}\|^2_{L_2(K)}\cdot\|h_k\|^2_{L_2(-\pi,\pi)} < 2M_0 a\,\frac{M^2}{2}\,\frac{1}{|\phi'(-\bar{s}_k)|^2}\,\frac{1}{\sqrt{h^2-Jm^2 s_k}}$$

$< \frac{M_0M^2}{C_0}\,a|s_k|^{2s}$ (jer je po pretpostavci $|\phi'(-\bar{s}_k)|^2|s_k|^{2s}\sqrt{h^2-Jm^2 s_k}\geq C_0$)

Znači $$\|e^{-is_kx}\|_{L_2(K)}\cdot\|h_k\|_{L_2(-\pi,\pi)} \leq \sqrt{\frac{M_0M^2a}{C_0}}\,|s_k|^s .$$

Broj $\sqrt{\frac{M_0 M^2 a}{C_0}}$ zavisi od a (znači od kompakta K) pa prema teoremi V.A. Iljina*) sredine Risa sistema imaju svojstvo bazisnosti.

§5. O potpunosti dela sistema svojstvenih funkcija jednog graničnog zadatka

Razmotrimo granični zadatak

$$y'' - 2\alpha\lambda y' + (1+\alpha^2)\lambda^2 y = 0 \tag{3.55.}$$

$$\left.\begin{array}{c} y(0) = 0 \\ y'(\pi)\sin\pi a - (\cos a\pi + \alpha\sin a\pi)\,\lambda y(\pi) = 0 \end{array}\right\} . \tag{3.56.}$$

gde su a,α realni parametri.

Granični zadatak (3.55.)-(3.56.) je u bliskoj vezi sa sledećim kvadratnim pramenom

$$\left.\begin{array}{c} y'' - 2\alpha\lambda y' + \lambda^2(1+\alpha^2)y = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{array}\right\},$$ čiji je sistem svojstvenih funkcija dosta izučavan ([25], [35]).

Sistem svojstvenih funkcija poslednjeg pramena je sledeći:

$$\{e^{+\alpha n x}\sin nx\} \qquad n=\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$$

Od interesa je bilo ustanoviti potpunost dela sistema svojstvenih funkcija u prostoru $L_2(0,\pi)$, tj. potpunost sistema $\{e^{\alpha n x}\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ u $L_2(0,\pi)$ (zadatak A.G. Kostjučenka). Prvo rešenje toga problema dao je B. . Levin [25], 1971. god.

Lako se može ustanoviti da je sistem

$\{e^{\alpha(n+a)x}\sin(n+a)x\}_{n=-\infty}^{\infty}$ sistem svojstvenih funkcija graničnog zadatka (3.55.)-(3.56.).

U ovom paragrafu cilj će nam biti ispitivanje potpunosti "polovine" sistema svojstvenih funkcija, tj. potpunost sistema $\{e^{\alpha(n+a)x}\sin(n+a)x\}_{n=0}^{\infty}$ u $L_2(0,\pi)$.

Teorema 3.8. Ako je $-\frac{1}{4}\leqslant a\leqslant\frac{1}{4}$ sistem funkcije

$$\{e^{\alpha(n+a)x}\sin(n+a)x\}_{n=0}^{\infty}$$ potpun je u $L_2(0,\pi)$.

---

* Formulacija teoreme Iljina zahteva neke prethodne napomene, pa je zbog dužine ne navodimo. Videti o tome u [13].

Dokaz: Pretpostavimo da sistem $\{e^{\alpha(n+a)x}\sin(n+a)x\}_{n=0}^{\infty}$ nije potpun u $L_2(0,\pi)$. To znači da postoji neka funkcija $f\varepsilon L_2(0,\pi)$ (f nije 0 u $L_2(0,\pi)$ takva da je

$$\int_0^{\pi} f(x)e^{\alpha(n+a)x}\sin(n+a)x\,dx = 0 \quad \text{za } n=0,1,2,3,\ldots \qquad (3.57.)$$

Ne smanjujući opštost možemo pretpostaviti da je f realna funkcija:

Stavimo $F(x) = \int_x^{\pi} f(t)dt$ (3.58.)

Jasno je da je $F(x)$ apsolutno neprekidna funkcija takva da je $F(\pi) = 0$.

Iz (3.57.) i (3.58.) dobijamo:

$$\int_0^{\pi} e^{\alpha(n+a)x}\sin(n+a)x\,dF(x) = 0 \qquad n=0,1,2,3,\ldots \qquad (3.59.)$$

a odatle

$$\int_0^{\pi} F(x)\left[e^{\alpha(n+a)x}\alpha\sin(n+a)x + e^{\alpha(n+a)x}\cos(n+a)x\right]dx=0 \qquad n=0,1,2,\ldots$$

Poslednju jednakost možemo zapisati u obliku:

$$\int_0^{\pi} F(x)(\alpha+i)e^{(\alpha+i)(n+a)x}dx-\int_0^{\pi} F(x)(\alpha-i)e^{(\alpha-i)(n+a)x}dx=0 \qquad (3.60.)$$

$$n=0,1,2,\ldots$$

Stavimo $z = e^{(\alpha+i)x}$ i označimo sa

Γ skup: $\Gamma = \{z:\ z = e^{(\alpha+i)x}\ \ 0\leqslant x\leqslant\pi\}$.

Tada je $$\int_0^{\pi} F(x)(\alpha+i)e^{x(\alpha+i)(n+a)}dx=\int_{\Gamma} F\left(\frac{\ln z}{\alpha+i}\right)z^{n+a-1}dz \qquad (3.61.)$$

$(\ln z = \ln|z|+i\arg z$ gde je $-\pi<\arg z\leqslant\pi)$.

Slično: $\int_0^\pi F(x)(\alpha-i)e^{(\alpha-i)(n+a)x}dx = \int_0^\pi \overline{F(x)(\alpha+i)e^{(\alpha+i)x(n+a)}}dx =$

$$= \int_\Gamma \overline{F(\frac{\ln z}{\alpha+i})z^{n+a-1}dz} = \int_\Gamma \overline{F(\frac{\ln z}{\alpha+i})}\ \bar{z}^{n+a-1}\ d\bar{z} =$$

$$= - \int_{\bar\Gamma} \overline{F(\frac{\ln \bar z}{\alpha+i})}\ z^{n+a-1}dz \qquad (3.62.)$$

gde je $\bar\Gamma = \{ z:\ z = e^{(\alpha-i)x} \quad 0\leq x\leq \pi\}$ i integracija ide od tačke $-e^{\alpha\pi}$ do tačke 1.

Uvedimo funkciju $H(z)$ sa:

$$H(z) = \begin{cases} F(\frac{\ln z}{\alpha+i}) & z\in\Gamma \\ \overline{F(\frac{\ln\bar z}{\alpha+i})} & z\in\bar\Gamma \end{cases} \qquad (3.63.)$$

Očevidno je $H(z)$ neprekidno realna funkcija (šta više apsolutno neprekidna funkcija dužine luka s krive Γ $\bar\Gamma$=C).

Iz (3.60.), (3.61.), (3.62.) i (3.63.) se dobija:

$$\int_C H(z)z^{n+a-1}dz = 0 \qquad n=0,1,2,\ldots \qquad (3.64.)$$

Funkcija z^{n+a-1} je višeznačna. Ona u tački $z_0=-e^{\alpha\pi}$ uzima dve različite vrednosti u zavisnosti da li se tački z_0 približavamo po krivoj $\bar\Gamma$ ili Γ. (Ovo se sve odnosi na funkciju z^{n+a-1} koja se javlja u integralu (3.64.) i predstavlja objedinjenje dve različite grane, kao što se vidi iz (3.61.) i (3.62.).

Ako iz kompleksne ravni C izbacimo negativan deo realne ose u novodobijenoj oblasti možemo izdvojiti jednoznačnu granu funkcije z^{n+a-1} definisanu sa $e^{(n+a-1)\ln z}$, gde je $\ln z = \ln|z| + i\arg z$ i $-\pi<\arg z\leq\pi$.

Očevidno je $H(z_0) = 0$.

Označimo sa C_0 skup $C\setminus\{z_0\}$.

Tada je $\int_{C_0} H(z)z^{n+a-1}dz = 0$ (to sledi iz (3.64.)) (3.65.)

($H(z_0)=0$ i pod z^{n+a-1} podrazumevamo već odabranu granu višeznačne funkcije).

Iz (3.65.) sledi: $\int\limits_{C_0} H(z)dz^{n+a} = 0,\qquad n=0,1,2,3,\ldots$

Neka je $\xi = \phi(z)$ funkcija koja vrši konformno preslikavanje oblasti koju ograničava kriva C na jedinični krug $U = \{\xi: |\xi|<1\}$ takva da je $\phi(0) = 0$. (Takva funkcija postoji na osnovu teoreme Rimana o konformnom preslikavanju). Radi lakšeg zapisivanja označimo ograničenu oblast, čija je granica kriva C sa D. Pri tome je $\partial D = C$.

Kako su C i ∂U zatvorene rektificibilne Žordanove krive, to prema teoremama 1.12. i 1.13. preslikavanje ϕ se može produžiti na granicu C do homeomorfizma oblasti $\bar{D}$ i $\bar{U}$ tako da to preslikavanje bude apsolutno neprekidna funkcija dužine luka krive C. To produženo preslikavanje takodje ćemo označiti sa ϕ. Znači, možemo smatrati da je $\xi= \phi(z)$ analitička funkcija u D i neprekidna na $\bar{D}$.

Pošto je ϕ konformno preslikavanje takvo da je $\phi(0)=0$, to osim tačke $z=0$ nijedna druga tačka iz oblasti D se ne slika u tačku $\xi=0$. Očito je da je zbog konformnosti $\phi'(0)\neq 0$ (tj. tačka $z=0$ je prosta nula funkcije $\phi(z)$).

Znači, funkcija $\frac{\phi(z)}{z}$ je analitička u D i neprekidna na $\bar{D}$ i tamo se ne anulira.

Iz poslednjeg sledi da je funkcija $\left(\frac{\phi(z)}{z}\right)^{n+a}$ analitička u oblasti D i neprekidna na $\bar{D}$. (Za svako $n=0,1,2,\ldots$)

Tada prema teoremi 1.14. postoji niz polinoma $P_{n,k}(z)$ takav da je:

$$P_{n,k}(z) \underset{k\to\infty}{\rightrightarrows} \left(\frac{\phi(z)}{z}\right)^{n+a} \text{ na } \bar{D} \quad (n=0,1,2,\ldots) \tag{3.66.}$$

tj. $$z^{n+a} P_{n,k}(z) \underset{k\to\infty}{\rightrightarrows} (\phi(z))^{n+a} \text{ na } C_0 \ (n=0,1,2,\ldots)$$

Kako je $P_{n,k}(z) = \sum_{\nu=0}^{s_k} a_{n,\nu} z^\nu$, ($a_{n,\nu}$ su neki kompleksni, a s_k neki prirodni brojevi)

dobijamo $$\int\limits_{C_0} H(z)d(z^{n+a} P_{n,k}(z)) = \sum_{\nu=0}^{s_k} a_{n,\nu} \int\limits_{C_0} H(z)dz^{n+\nu+a} \tag{3.67.}$$

Kako je $\int\limits_{C_0} H(z)dz^{n+a} = 0\ (n=0,1,2,\ldots)$ sledi:

$$\int_{C_0} H(z)dz^{n+\nu+a} = 0.$$

Imajući to u vidu (3.67.) postaje:

$$\int_{C_0} H(z)\, d\,(z^{n+a}P_{n,k}\,(z)) = 0 \qquad (n=0,1,2,\ldots) \qquad (3.68.)$$

Iz (3.68.) kada $k\to\infty$ dobijamo:

$$\int_{C_0} H(z)\, d\,[\phi(z)]^{n+a} = 0 \qquad \text{za } (n=0,1,2,\ldots) \qquad (3.69.)$$

Kako je $\xi=\phi(z)$ to je $z=\phi^{-1}(\xi)$ neprekidna funkcija na $\{\xi: |\xi|=1\}$.
Neka je $\xi_0=\phi(z_0)$

Označimo sa ∂U_0 skup $\{\xi: |\xi|=1\}\setminus\{\xi_0\}$.

Imajući sve to u vidu (3.69.) postaje:

$$\int_{\partial U_0} H(\phi^{-1}(\xi))\, d\,\xi^{n+a} = 0 \qquad (n=0,1,2,\ldots) \qquad (3.70.)$$

ili
$$\int_{\theta_0}^{2\pi+\theta_0} H(\phi^{-1}(e^{i\theta}))\, d\,e^{i(n+a)\theta} = 0. \qquad (n=0,1,2,\ldots) \qquad (3.71.)$$

gde je sa θ_0 označen argument tačke ξ_0.

Posle smene $\theta=\theta_0+\pi+x$ jednakost (3.71.) postaje:

$$\int_{-\pi}^{\pi} H(\phi^{-1}(e^{i(\theta_0+\pi+x)}))\, e^{i(n+a)(\theta_0+\pi+x)}dx = 0 \quad (n=0,1,2,\ldots)\,(3.72.)$$

Ako sa $R(x)$ označimo funkciju $H(\phi^{-1}(e^{i(\theta_0+\pi+x}))$ neposredno iz (3.72.) dobijamo:

$$\int_{-\pi}^{\pi} R(x)\, e^{i(n+a)x}\, dx = 0 \qquad (n=0,1,2\ldots) \qquad (3.73.)$$

Očevidno je $R(x)$ realna neprekidna funkcija (kao kompozicija neprekidnih funkcija).

Iz (3.73.) dobija se za $n=0$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} R(x)\cos ax dx = \int_{-\pi}^{\pi} R(x)\sin ax dx = 0 \qquad (3.74.)$$

Uočimo funkcije:

$R_1(x) = R(x)\cos ax$

$R_2(x) = R(x)\sin ax$

Iz (3.73.) razdvajajući realni i imaginarni deo i delenjem sa π dobijamo:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} R_1(x)\cos nx\,dx - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} R_2(x)\sin nx\,dx = 0 \\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} R_1(x)\sin nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} R_2(x)\cos nx\,dx = 0 \end{aligned}\right\} \quad (n=1,2,3....) \qquad (3.75.)$$

Iz izraza $a_n' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} R_1(x)\cos nx\,dx \qquad a_n'' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} R_2(x)\cos nx\,dx$

$b_n' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} R_1(x)\sin nx\,dx \qquad b_n'' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} R_2(x)\sin nx\,dx$

vidi se jasno da su a_n', b_n', a_n'', b_n'' Furijeovi koeficijenti funkcija R_1 i R_2 pa zbog toga važe sledeće jednakosti Parsevala:

$$\frac{a_0'^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n'^2 + b_n'^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} R^2(x)\cos^2 ax\,dx \qquad (3.76.)$$

$$\frac{a_0''^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n''^2 + b_n''^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} R^2(x)\sin^2 ax\,dx \qquad (3.77.)$$

Iz (3.74.) zaključujemo da je

$$\left.\begin{aligned} a_0' = a_0'' = 0 \\ a_n' - b_n'' = 0 \\ a_n'' + b_n' = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3.78.)$$

Ako od jednakosti (3.76.) oduzmemo jednakost (3.77.), to imajući u vidu (3.78.) dobijamo:

$$\int_{-\pi}^{\pi} R^2(x)(\cos^2 ax - \sin^2 ax)\,dx = 0,$$

odnosno $\int_{-\pi}^{\pi} R^2(x)\cos 2ax\,dx = 0 \qquad (3.79.)$

Kako je $-\frac{1}{4} \leq a \leq \frac{1}{4}$, to je $\cos 2ax \geq 0$, na $(-\pi,\pi)$ i pošto je

$R(x)$ realna neprekidna funkcija na $(-\pi,\pi)$, to iz (3.79.) zaključujemo da je $R^2(x)\cos 2ax=0$, odnosno $R(x)=0$, na $(-\pi,\pi)$.

Vraćajući se unazad dobijamo da je $H(z)=0$ na Γ, odnosno $F(x)=0$. Odatle sledi da je $f=0$ s.s na $(0,\pi)$, što je suprotno pretpostavci.

Primedba 3.5. Očevidno je da za $a=0$ dobijamo tvrdjenje o potpunosti sistema $\{e^{\alpha nx}\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ u $L_2(0,\pi)$., koje je B. . Levin dokazao 1971. godine.

Primedba 3.6. Prema teoremi 3.5. sistem $\{e^{\alpha(n+a)x}\sin(n+a)x\}_{n=0}^{\infty}$ nije baza u $L_2(0,\pi)$ ako je $\alpha<0$.

Primedba 3.7. Pitanje potpunosti sistema $\{e^{\alpha\lambda_n x}\sin\lambda_n x\}_{n=1}^{\infty}$ gde λ_n nisu celobrojne tačke nije rešeno. Kod nas se pojavljuje rešenje jednog specijalnog slučaja, tj. kada je $\lambda_n=n+a$. Ako je a dovoljno veliko svojstvo potpunosti se gubi. Na primer, za $a=2$, naš sistem se svodi na $\{e^{\alpha nx}\sin nx\}_{n=2}^{\infty}$. No, poznato je [35] da je sistem $\{e^{\alpha nx}\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ potpun i minimalan u $L_2(0,\pi)$. To znači da za $a=2$ naš sistem nije potpun. Da li se svojstvo potpunosti gubi za sve $a>\frac{1}{4}$, tj. da li je $a=\frac{1}{4}$ "prirodna" granica, nije mi poznato.

Primedba 3.8. Prethodni metod može se primeniti za ispitivanje potpunosti nekih drugih sistema kada je Γ (kriva koja se spominje u dokazu teoreme) neka druga pogodna rektificibilna kriva.

Primedba 3.9. Veoma lako se dokazuje potpunost sistema $\{e^{\alpha(n+a)x}\sin(n+a)x\}_{n=0}^{\infty}$ u prostoru $L_2(0,\pi-\varepsilon)$, gde je $0<\varepsilon<\pi$, proizvoljan broj. Dovoljno je koristiti se teoremom Karlsona*).

---

* Koristimo se sledećom varijantom: Neka je $F(z)$ analitička funkcija u desnoj poluravni, neprekidna na $\{z: \operatorname{Re} z\geq 0\}$, koja zadovoljava uslov

$$|F(iy)|<M\exp\{(\pi\sigma-\varepsilon)|y|\} \quad -\infty<y<\infty \quad \text{za neko } \varepsilon$$

$$\text{i} \quad |F(z)|<M\exp(A|z|) \quad (A=\text{const}) \quad \text{za } \operatorname{Re} z>0.$$

Ako je $F(\lambda_n)=0$ gde je $0<\operatorname{Re}\lambda_1<\operatorname{Re}\lambda_2<\ldots$; $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\lambda_n}=\sigma$ gde je $0<\sigma<\infty$, tada je $F(z)\equiv 0$. Videti [12].

G L A V A IV

ISPITIVANJE SVOJSTAVA SVOJSTVENIH ELEMENATA NEKIH OPERATORA ANALITIČKO FUNKCIONALNIM METODOM

§1. O bazisnosti Risa sistema svojstvenih funkcija jednog graničnog zadatka

Razmotrimo granični zadatak

$$\left.\begin{aligned} y'' + \lambda^2 y + \phi(y) &= 0 \\ y(0) = y(\pi) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4.1.)$$

gde je $\phi(f) = \int_0^\pi f(x)g(x)dx.$

Neka funkcija zadovoljava sledeće uslove:

1° $g \in L_2(0,\pi)$ i $g(x) \geq 0$ s.s. na $[0,\pi]$

2° $\int_0^\pi g(x)\sin nx\, dx \neq 0$ za $n \in N$

3° $\int_0^\pi g(x)dx = a < 1$

Pod prethodnim uslovima ispitajmo svojstvene vrednosti i svojstvene funkcija zadatka (4.1.)

U radu [20] rešava se problem razlaganja nakih funkcija u red po svojstvenim funkcijama graničnog zadatka generisanog diferencijalnim izrazom drugog reda i graničnim uslovima u kojima se javlja integral.

U zadatku (4.1.) integral se javlja u reprezentaciji funkcionala $\phi(y)$ a ne u graničnom uslovu.

Cilj će nam biti (pod nekim uslovima nametnutim na funkciju g) da dokažemo bazisnost dela svojstvenih funkcija zadatka (4.1.) u prostoru $L_2(0,\pi)$.

Pod svojstvenom vrednošću zadatka (4.1.) podrazumevamo kompleksan broj λ_0 takav da postoji funkcija $y_0(x)\in C^2[0,\pi]$ $(\not\equiv 0)$ na [illegible] i pri tome je:

$$y_0'' + \lambda_0^2 y_0 + \phi(y_0) = 0$$
$$y_0(0) = y_0(\pi) = 0$$

Tada se funkcija $y_0(x)$ naziva svojstvenom funkcijom koja odgovara svojstvenoj vrednosti λ_0.

Neposredno se proverava da ukoliko važi

$$2+\int_0^\pi x^2 g(x)dx-\pi\int_0^\pi xg(x)dx = 0,$$

tačka $\lambda=0$ je svojstvena vrednost zadatka (4.1.) a odgovarajuća svojstvena funkcija je $y(x)=x(\pi-x)$.

Pretpostavimo sada da je:

$$2+\int_0^\pi x^2 g(x)dx-\pi\int_0^\pi xg(x)dx \neq 0.$$

Dokažimo da tada $\lambda=0$ nije svojstvena vrednost. Ako jeste, tada postoji odgovarajuća svojstvena funkcija $y(x)\not\equiv 0$, tako da važi

$$y'' + \phi(y) = 0 \qquad (4.2.)$$
$$y(0) = y(\pi)=0 \qquad (4.3.)$$

Iz (4.2.) se dobija da je:

$y(x) = -\frac{x^2}{2}\phi(y)+C_1x+C_2$; korišćenjem uslova (4.3.) dobijamo:

$$y(x) = \frac{\pi}{2}\phi(y)x-\frac{x^2}{2}\phi(y). \qquad (4.4.)$$

Ako na obe strane jednakosti (4.4.) primenimo linearni funkcional ϕ dobijamo:

$$\phi(y) = \frac{\pi}{2}\phi(y)\phi(x)-\frac{1}{2}\phi(y)\ \phi(x^2)$$

ili
$$\phi(y)\left|1-\frac{\pi}{2}\int_0^\pi xg(x)dx + \frac{1}{2}\int_0^\pi x^2 g(x)dx\right| = 0.$$

Imajući u vidu da je drugi faktor u prethodnoj jednakosti različit od nula, dobijamo:

$$\phi(y) = 0. \tag{4.5.}$$

Tada iz (4.4.) i (4.5.) sledi da je $y(x) \equiv 0$.

Znači, $\lambda=0$ nije svojstvena vrednost.

Dokažimo sada da neparni celi brojevi nisu svojstvene vrednosti graničnog zadatka (4.1.).

Ako je $\lambda_n=2n+1$ ($n\in Z$) svojstvena vrednost, tada iz (4.1.) sledi:

$$y(x,\lambda_n) = C_1\cos\lambda_n x+C_2\sin\lambda_n x - \frac{\phi(y(x,\lambda_n))}{\lambda_n^2}$$

i

$$C_1= \phi(y(x,\lambda_n))/\lambda_n^2$$

$$-C_1= \phi(y(x,\lambda_n))/\lambda_n^2.$$

Iz poslednjeg se dobija da je $C_1=0$, tj. $\phi(y(x,\lambda_n)) = 0$, pa je svojstvena funkcija $y(x,\lambda_n)$ oblika:

$$y(x,\lambda_n) = C_2\sin\lambda_n x = C_2\sin(2n+1)x$$

Kako je $\phi(y(x,\lambda_n)) = 0$ dobijamo da je

$$C_2 \ \phi(\sin(2n+1)x) = 0. \tag{4.6.}$$

S obzirom na osobinu 2° funkcije g iz (4.6.) dobijamo da je $C_2 = 0$.

Znači, $y(x,\lambda_n) = 0$.

Odatle zaključujemo da neparni celi brojevi nisu svojstvene vrednosti graničnog zadatka (4.1.). Sličnim postupkom (da ga ne ponavljamo) može se dokazati da su $\lambda_n = 2n$ ($n=\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$) svojstvene vrednosti zadatka (4.1.) i odgovarajuće svojstvene funkcije su:

$$y_n(x) = \cos 2nx + D_n\sin 2nx-1, \quad \text{gde je}$$

$$D_n = \frac{4n^2-\int_0^\pi \cos 2nx\, g(x)\,dx}{\int_0^\pi \sin 2nx\, g(x)\,dx}.$$

Neka je λ svojstvena vrednost zadatka (4.1.) i λ nije ceo broj. Označimo sa $y(x,\lambda)$ odgovarajuću svojstvenu funkciju.

Tada treba da bude ispunjeno:

$$y(x,\lambda) = C_1\cos\lambda x + C_2\sin\lambda x - \frac{\phi(y(x,\lambda))}{\lambda^2} \qquad (4.7.)$$

Iz uslova $y(x,\lambda) = x(\pi,\lambda) = 0$ sledi:

$$C_1 = \frac{\phi(y(x,\lambda))}{\lambda^2} \qquad C_2 = \frac{\phi(y(x,\lambda))}{\lambda^2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi\lambda}{2} \qquad (4.8.)$$

Zamenimo (4.8.) u (4.7.) dobijamo:

$$y(x,\lambda) = \frac{\phi(y(x,\lambda))}{\lambda^2}\cos\lambda x + \frac{\phi(y(x,\lambda))}{\lambda^2}\mathrm{tg}\,\frac{\lambda\pi}{2}\sin\lambda x - \frac{\phi(y(x,\lambda))}{\lambda^2} \qquad (4.9.)$$

Ako na (4.9.) primenimo funkcional ϕ dobijamo:

$$\phi(y(x,\lambda))\left| 1 - \frac{\phi(\cos\lambda x)}{\lambda^2} - \frac{\mathrm{tg}\,\frac{\lambda\pi}{2}}{\lambda^2}\phi(\sin\lambda x) + \frac{\phi(1)}{\lambda^2}\right| = 0 \qquad (4.10.)$$

Dokažimo da je $\phi(y(x,\lambda)) \neq 0$.
Ako bi bilo $\phi(y(x,\lambda)) = 0$, to iz (4.7.) sledi:

$$y(x,\lambda) = C_1\cos\lambda x + C_2\sin\lambda x$$

$$y(0,\lambda) = y(\pi,\lambda) = 0 \quad \text{(granični uslov)},$$

a odatle $y \equiv 0$.

Znači, $y(x,\lambda)$ nije svojstvena funkcija, tj. $\phi(y(x,\lambda)) \neq 0$. Tada iz (4.10.) sledi:

$$1 - \frac{\phi(\cos\lambda x)}{\lambda^2} - \mathrm{tg}\,\frac{\lambda\pi}{2}\,\frac{\phi(\sin\lambda x)}{\lambda^2} + \frac{\phi(1)}{\lambda^2} = 0$$

Kako je $\phi(1) = a$ iz prethodnog dobijamo:

$$(a+\lambda^2)\cos\frac{\lambda\pi}{2} = \int_0^{\pi} g(x)\cos\lambda\left(x - \frac{\pi}{2}\right)dx \qquad (4.11.)$$

Znači, necele svojstvene vrednosti λ zadatka (4.1.) su rešenjajednačine (4.11.) a odgovarajuće svojstvene funkcije (bez koeficijenata) se neposredno dobijaju iz (4.9.) i jednake su:

$$y(x,\lambda) = \cos\lambda\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \cos\frac{\lambda\pi}{2} \qquad (4.12.)$$

Lako se uveravamo da je tačno i obrnuto, tj. rešenja jednačine (4.11.) koja nisu celobrojna su svojstvene vrednosti zadatka (4.1.) sa odgovarajućim svojstvenim funkcijama (4.12.).

Dokažimo sada da jednačina (4.11.) ima niz realnih nula λ_n oblika $\lambda_n=2n+1+\varepsilon_n$ gde je $|\varepsilon_n|<1$ i $\varepsilon_n \to 0$.

Razmotrimo funkciju: $G(\lambda) = \int_0^\pi \cos\lambda(x-\frac{\pi}{2})g(x)dx$

Očito je da $G(\lambda)\to 0$ kada $\lambda\to\pm\infty$ (Riman-Lebegova teorema)

Kako je $|G(\lambda)|< \int_0^\pi |g(x)|dx = \int_0^\pi g(x)dx = a \quad (<1)$, to

se grafik funkcije $G(\lambda)$ nalazi u traci oko x ose širine 2a. Iz toga i činjenice da se funkcija $(a+\lambda^2)\cos\frac{\lambda\pi}{2}$ anulira u tačKama $\lambda=2n+1$ sledi da na svakom od intervala (2,4); (4,6); (6,8); ... postoji bar jedno rešenje jednačine (4.11.)

Ta rešenja su oblika

$$\lambda_n = 2n+1+\varepsilon_n \quad (\text{za neko } \varepsilon_n \text{ tako da je } |\varepsilon_n|<1) \tag{4.13.}$$

Ocenimo sada niz $\{\varepsilon_n\}$.

Iz (4.11.) sledi:

$$(a+\lambda_n^2)\cos\frac{\lambda_n\pi}{2} = \int_0^\pi \cos\lambda_n(x-\frac{\pi}{2})g(x)dx,$$ odakle dobijamo:

$$(a+\lambda_n^2)\,|\cos(2n+1+\varepsilon_n)\frac{\pi}{2}| < \int_0^\pi |g(x)|dx = \int_0^\pi g(x)dx = a \tag{4.14.}$$

Kako je $|\varepsilon_n|<1$ odatle sledi:

$$\sin\frac{\pi|\varepsilon_n|}{2} \leq \frac{a}{a+4n^2} \tag{4.15.}$$

S druge strane, na intervalu $\left[0,\frac{a}{a+4}\right]$ imamo:

$$\arcsin \leq x\,\frac{a+4}{\sqrt{8a+16}} \tag{4.16.}$$

Kako je $0<\frac{\pi|\varepsilon_n|}{2}<\frac{\pi}{2}$ to iz (4.15.) i (4.16.) sledi ocena:

$$|\varepsilon_n| \leq \frac{2}{\pi}\,\frac{a(a+4)}{\sqrt{8a+16}}\,\frac{1}{a+4n^2} \qquad n=1,2,3,\ldots \tag{4.17}$$

Iz (4.17.) sledi da $\varepsilon_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

Ispitajmo sada asimtotiku svojstvenih funkcija $y(x,\lambda_n)$ koje odgovaraju svojstvenoj vrednosti λ_n.

Lako se uveravamo da je:

$$y(x,\lambda_n) = (-1)^n \sin(\lambda_n x - \frac{\varepsilon_n \pi}{2}) + (-1)^n \sin\frac{\pi\varepsilon_n}{2} \quad (\text{zbog } \lambda_n = 2n+1+\varepsilon_n)$$

a odatle dobijamo:

$$|y(x,\lambda_n) - (-1)^n \sin(2n+1)x| < 2\sin^2\frac{|\varepsilon_n|\,|x-\frac{\pi}{2}|}{2} + \sin|\varepsilon_n||x-\frac{\pi}{2}| + \sin\frac{\pi|\varepsilon_n|}{2}$$

Imajući u vidu da je $|x-\frac{\pi}{2}| \leqslant \frac{\pi}{2}$ iz prethodne nejednakosti sledi:

$$|y(x,\lambda_n) - (-1)^n \sin(2n+1)x| \leqslant \frac{3\pi}{2}\,|\varepsilon_n|. \tag{4.18.}$$

Iz (4.18.) dobijamo:

$$\int_0^\pi |y(x,\lambda_n) - (-1)^n \sin(2n+1)x|^2 dx \leqslant \frac{9\pi^3}{4}\,|\varepsilon_n|^2 \qquad \text{tj.}$$

$$\|y(x,\lambda_n) - (-1)^n \sin(2n+1)x\|^2 \leqslant \frac{9\pi^3}{4}\,|\varepsilon_n|^2 \tag{4.19}$$

Razmotrimo sada sistem svojstvenih vrednosti

$\Omega = \{2n \mid n \in N\} \cup \{\lambda_n \mid n \in N\}$

i sistem odgovarajućih svojstvenih funkcija

$$H_0 = \{\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\,(\sin 2nx - \frac{1-\cos 2nx}{D_n})\}_{n=1}^{\infty} \cup \{\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}(\cos\lambda_n(x-\tfrac{\pi}{2}) - \cos\frac{\lambda_n \pi}{2})\}_{n=1}^{\infty}$$

zadatka 4.1.

Teorema 4.1. Pretpostavimo da funckija $g(x)$ (koja se pojavljuje u funkcionalu $\phi(.)$) zadovoljava uslove 1° i 2° koji su navedeni na početku §1 i

$$\int_0^\pi g(x)\,dx < \frac{\sqrt{45}}{\pi^2}.$$

Tada, ako se sistemu H_0 doda funkcija $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x$, novodobijeni sistem obrazuje Risovu bazu prostora $L_2(0,\pi)$.

Dokaz: Razmotrimo sisteme:

$$H=H_0 \cup \{\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\ \sin\}=\{\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}(\cos\lambda_n(x-\tfrac{\pi}{2})-\cos\tfrac{\lambda_n\pi}{2})\}_{n=1}^{\infty}\cup\{\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\sin x\}\cup\{\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}(\sin 2nx - \frac{1-\cos 2nx}{D_n})\}_{n=1}^{\infty}$$

$$L=\{\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}(-1)^n\sin(2n+1)x\}_{n=1}^{\infty}\cup\{\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\sin x\}\cup\{\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\sin 2nx\}_{n=1}^{\infty}.$$

Očevidno je L ortonormiran sistem u $L_2(0,\pi)$ i da tamo obrazuje bazu. Štaviše, to je Risova baza.

Koristeći se uslovom $a<\frac{\sqrt{45}}{\pi^2}$ i koristeći (4.19.) dobijamo (posle izvesnih transformacija i ocena):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\|\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}((\cos\lambda_n(x-\tfrac{\pi}{2})-\cos\tfrac{\lambda_n\pi}{2})-(-1)^n\sin(2n+1)x\right\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\|\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\left(\frac{1-\cos 2nx}{D_n}\right)\right\|^2<1 \qquad (4.20.)$$

Stavimo:

$H=\{f_j\,|\,j\in N\}$

$L=\{g_j\,|\,j\in N\}$

Iz (4.20.) sledi $\sum_{j=1}^{\infty}\|f_j-g_j\|^2<1$ (4.21.)

(Pri tome se iz (4.20.) vidi na koji način su poredjeni u nizove elementi skupova H i L).

Pomenuli smo već da je $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ Risova baza prostora $L_2(0,\pi)$.

Iz (4.21.) sledi da su $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ i $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ kvadratno bliski.

Dokažimo sada da je niz $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ ω linearno nezavisni.

Koristeći se ocenom (4.17.) može se lako ustanoviti da je sistem $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ skoro normiran.

Ako niz $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ nije ω linearno nezavisan, tada postoje konstante C_n takve da je $0<\sum_{n=1}^{\infty}|C_n|^2<\infty$ i

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_nf_n=0 \text{ (konvergencija u } L_2(0,\pi)) \qquad (4.22.)$$

Odatle sledi $\sum\limits_{\nu=1}^{N} C_\nu(f_\nu-g_\nu)+\sum\limits_{\nu=N+1}^{\infty} C_\nu f_\nu = -\sum\limits_{\nu=1}^{N} C_\nu g_\nu.$

Iz (4.18.) sledi da red $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} C_\nu(f_\nu-g_\nu)$ konvergira (u $L_2(0,\pi)$).

Kako je uz to $\sum\limits_{\nu=N+1}^{\infty} C_\nu f_\nu \to 0$ kada $N\to\infty$, dobijamo:

$$\left\|\sum_{\nu=1}^{\infty} C_\nu(f_\nu-g_\nu)\right\|^2 = \left\|\sum_{\nu=1}^{\infty} C_\nu g_\nu\right\|^2 \tag{4.23.}$$

Pošto je $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ ortonormiran sistem, dobijamo:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|C_\nu|^2 = \left\|\sum_{\nu=1}^{\infty} C_\nu(f_\nu-g_\nu)\right\|^2 \tag{4.24.}$$

Kako je $\left\|\sum\limits_{\nu=1}^{+\infty} C_\nu(f_\nu-g_\nu)\right\|^2 = \int\limits_0^{\pi} \left|\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} C_\nu(f_\nu-g_\nu)\right|^2 dx \leq$

$\leq \int\limits_0^{\pi} \sum\limits_{\nu=1}^{\infty}|C_\nu|^2 \sum\limits_{\nu=1}^{\infty}|f_\nu-g_\nu|^2 dx = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty}|C_\nu|^2 \cdot \sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\|f_\nu-g_\nu\|^2$, to imajući

u vidu da je $0 < \sum\limits_{\nu=1}^{\infty}|C_\nu|^2 < \infty$ dobijamo: $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\|f_\nu-g_\nu\|^2 > 1$

što je u suprotnosti sa (4.21.).

Znači $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ je ω linearno nezavisan niz koji je kvadratno blizak Risovoj bazi $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ pa je prema teoremi 2.6. i sam Risova baza.

Primedba 4.1. Granični zadatak

$$\left.\begin{aligned} &-y''+\lambda q(x)y-\omega^2\int_0^{\pi} K(x,\xi)y(\xi)d\xi=0 \\ &y(0) = y(\pi) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.25.}$$

gde $q(x)\in L_1(0,\pi)$, $0\leq q(x)$ s.s na $[0,\pi]$, $q(x)\leq b(<\infty)$, $K\in L^2([0,\pi]\times[0,\pi])$ i $|\omega|^2 < \dfrac{1}{\sqrt{\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\pi}|K(x,\xi)|^2 dx d\xi}}$

je uopštenje graničnog zadatka (4.1.).

Pod gornjim pretpostavkama možemo da dokažemo potpunost svojstvenih i prisajedinjenih funkcija zadatka (4.25.) ali ne i bazisnost.

Ukratko izložimo dokaz prethodnog tvrdjenja.

Funkcija $y(x,\lambda_0)=y_0(x)$ je svojstvena funkcija zadatka (4.25.) ako je $l(y_0)=0$ i $y_0(0)=y_0(\pi)=0$; funkcije $y_1(x), y_2(x) \dots y_k(x)$ su prisajedinjene svojstvenoj funkciji $y\ (x)$ ako je

$$l(y_p)+\frac{\partial l}{\partial \lambda_0}(y_{p-1})=0$$

$$y_p(0)=y_p(\pi)=0 \qquad\qquad p=1,2,\dots k$$

gde je $l(y)=-y''+\lambda q(x)y-\omega^2\int_0^\pi K(x,\xi)y(\xi)d\xi$.

Razmotrimo operator

$$A^{-1}=-\frac{d^2}{dx^2}\ ,\quad \mathcal{D}(A^{-1})=\left\{\ f:\ \begin{array}{l} 1^\circ\ f,f'\varepsilon AC|0,\pi| \\ 2^\circ\ f(0)=f(\pi)=0 \\ 3^\circ\ f''\varepsilon L_2(0,\pi). \end{array}\right.$$

Tada se lako može dokazati da je $A\varepsilon\sigma_\infty$ i $A>0$.

Označimo sa T_0 operator

$$(T_0f)(x) = \int_0^\pi K(x,\xi)f(\xi)d\xi \qquad (T_0:L_2(0,\pi)\to L_2(0,\pi))$$

Stavljajući $A^{1/2}\ v=y$ i množeći jednačinu (4.25.) sa $A^{1/2}$ dobijamo sledeći linearni pramen:

$$L(\lambda)v = (I+\lambda F_0-\omega^2T)v = 0 \tag{4.26.}$$

gde je $F_0= A^{1/2}q(x)A^{1/2}$

$$T = A^{1/2}T_0A^{1/2}.$$

Ako je $\lambda=\lambda_0$ svojstvena vrednost zadatka (4.25.), to je ona svojstvena vrednost pramena (4.26.) i obrnuto.

Ako je $v=v_0$ svojstven vektor pramena (4.26.) koji odgovara svojstvenoj vrednosti $\lambda=\lambda_0$, tada je $y_0=A^{1/2}v_0$ svojstven vektor zadatka (4.25.) koji odgovara svojstvenoj vrednosti $\lambda=\lambda_0$ i obrnuto. Iste veze važe i za prisajedinjene vektore.

Očevidno je da $F_0\varepsilon\sigma_\infty$ i $T\varepsilon\sigma_\infty$ (jer je $A^{1/2}\varepsilon\sigma_\infty$). Takodje se neposredno proverava da je $F_0=F_0^*$. (To sledi iz svojstva funkcije $q(x)$). Osim toga $F_0\varepsilon\sigma_p$ $(p>1)$ (jer za singularne brojeve operatora F_0 može da se dobije ocena $s_k(F_0)<\frac{b}{k}$).

Iz osobina jezgra $K(x,\xi)$ sledi da je operator $I-\omega^2T$ invertibilan pa se sistemi svojstvenih i prisajedinjenih vektora (kao i svojstvene vrednosti) pramena $L(\lambda) = I-\omega^2T +\lambda F_0$ i pramena $L_1(\lambda) = I +\lambda(I-\omega^2T)^{-1} F_0$ poklapaju.

Lako se uveravamo da postoji operator $S\varepsilon\sigma_\infty$ (linearan) takav da je

$$(I-\omega^2T)^{-1} = I+S.$$

Imajući to u vidu pramen $L_1(\lambda)$ postaje

$$L_1(\lambda) = I+\lambda(I+S)F_0$$

Označimo operator $(I+S)F_0$ sa A_1 tj.,

$$A_1 = (I+S)F_0.$$

Tada dobijamo $L_1(\lambda) = I+\lambda A_1$

Radeći kao što se radi kod dokaza ekvivalenta teoreme Keldiša [7] dobijamo da se sistem radikalnih vektora operatora A_1 poklapa sa sistemom svojstvenih i prisajedinjenih vektora pramena $L_1(\lambda)$ (znači i pramena $L(\lambda)$).

No, prema teoremi (2.1.)*) sistem radikalnih vektora operatora A_1 je potpun u $L_2(0,\pi)$, pa dobijamo da je sistem svojstvenih i prisajedinjenih vektora pramena $L(\lambda)$ potpun u $L_2(0,\pi)$. No, kako izmedju svojstvenih i prisajedinjenih funkcija graničnog zadatka (4.25.) i svojstvenih i prisajedinjenih vektora pramena $L(\lambda)$ postoje veze oblika $y=A^{1/2}v$ i kako je skup vrednosti operatora $A^{1/2}$ gust u $L_2(0,\pi)$ zaključujemo da je tvrdjenje navedeno u primedbi 4.1. tačno.

---

* Nije teško ustanoviti [7] da teorema 2.1. važi i za operatore oblika $A = (I+S)H$ pod uslovima koji su u njoj navedeni.

§2. O dvostrukoj potpunosti sistema svojstvenih i prisajedinjenih funkcija jednog graničnog zadatka

Razmotrimo granični zadatak

$$-y''+2\alpha\lambda i\, y' + \lambda^2(1+\alpha^2)y-\int_0^\pi y\,dx = 0 \qquad (\alpha\in R) \tag{4.27.}$$

$$y(0) = y(\pi) = 0 \tag{4.28.}$$

Sistem svojstvenih funkcija graničnog zadatka

$$-y''+2\alpha\lambda i y'+ \lambda^2(1+\alpha^2)y = 0 \qquad (\alpha\in R)$$

$$y(0) = y(\pi) = 0,$$

kao što smo ranije napomenuli, dosta je izučavan [14], [25], [35]. I mi smo (posledica 3.2.) ustanovili dvostruku potpunost i minimalnost njegovog sistema svojstvenih funkcija. Pri tome smo u dokazu koristili čisto analitički aparat.

U ovom odeljku ćemo dokazati dvostruku potpunost svojstvenih i prisajedinjenih funkcija graničnog zadatka (4.27.) - (4.28.) u kome je diferencijalni izraz "poremećen" linearnim funkcionalom.

Pod svojstvenim i prisajedinjenim funkcijama zadatka (4.27.) i (4.28.) podrazumevamo funkcije koje zadovoljavaju uslove navedene na početku druge glave. (Znači, zadovoljavaju iste uslove kao kada diferencijalni izraz nije "poremećen" linearnim funkcionalom.

Stavimo $A^{-1} = -\dfrac{d^2}{dx^2}$ gde $\mathcal{D}(A^{-1}) = \left\{ f: \begin{array}{l} 1^\circ\ f,f'\in AC|0,\pi| \\ 2^\circ\ f(0)=f(\pi)=0 \\ 3^\circ\ f''\in L_2(0,\pi) \end{array} \right\}$

Može se pokazati lako da je

$$(Af)(x) = \int_0^\pi G(x,\xi)f(\xi)d\xi \quad \text{gde je } G(x,\xi)= \begin{cases} \dfrac{x(\pi-\xi)}{\pi} & 0\le x< \xi\le \pi \\ \dfrac{\xi(\pi-x)}{\pi} & 0\le \xi< x\le \pi \end{cases} \tag{4.29.}$$

i operator A: $L_2(0,\pi) \to L_2(0,\pi)$.

Takodje se jednostavno utvrdjuje da operator A ima sledeću reprezentaciju:

$$A = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (\cdot, \sin nx) \sin nx \qquad (4.30.)$$

Iz (4.30.) sledi da je $A>0$ i

$$A^{1/2} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\cdot, \sin nx) \sin nx.$$

Linearni funkcional $\phi(y) = \int_0^{\pi} y(x)dx$ shvatimo kao linearni operator $T_0: L_2(0,\pi) \to L_2(0,\pi)$.

Znači $\quad (T_0 f)(x) = \int_0^{\pi} f(t)dt \quad (=\text{const}) \qquad x \in [0,\pi] \qquad (4.31.)$

Iz (4.30.) i (4.31.) sledi da je $T_0 = T_0^*$, $T_0 \in \sigma_\infty$ (jer je ranga 1), $A>0$ i $A \in \sigma_\infty$ (i $A^{1/2} > 0$).

Stavljajući $y = A^{1/2} v$ [36] u (4.27.) i množeći (4.27.) sa $A^{1/2}$ dobijamo:

$$L(\lambda)v = (I + 2\lambda F + \lambda^2 C - T)v \qquad (4.32.)$$

gde je $F = \alpha A^{1/2}$ i $\frac{d}{dx} A^{1/2}$, $C = (1+\alpha^2)A$ i $T = A^{1/2} T_0 A^{1/2}$.

Očevidno je $T = T^*$ (jer je $A^{1/2} > 0$ i $T_0 = T_0^*$).

Operator A je pozitivan i kompaktan pa je takav i operator C.

Dokažimo sada da je za svako $f \in L_2(0,\pi)$ funkcija $A^{1/2} f$ apsolutno neprekidna sa izvodom iz $L_2(0,\pi)$.

Neka je $f \in L_2(0,\pi)$. Tada je

$$(A^{1/2} f)(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (f, \sin nx) \sin nx .$$

Kratkoće radi označimo $(A^{1/2} f)(x)$ sa $g(x)$ i

$$a_n = \frac{2}{\pi} (f, \sin nx) .$$

Kako je sistem $\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormirana baza u $L_2(0,\pi)$ to iz jednakosti Parsevala sledi da

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_2$.

Sada ćemo dokazati da je funkcija

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin nx \tag{4.33.}$$

apsolutno neprekidna na $[0,\pi]$ ako je $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_2$.

Očevidno je funkcija $g(x)$ neprekidna jer red (4.33.) ravnomerno konvergira. Neposredno se vidi da je $g(0)=g(\pi)=0$.

Razmotrimo red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$. (4.34.)

Kako je $\left\|\sum\limits_{\nu=m}^{n} a_\nu \cos\nu x\right\|^2 = \frac{\pi}{2}\sum\limits_{\nu=m}^{n}|a_\nu|^2$ i niz $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_2$.

to red (4.34.) konvergira u prostoru $L_2(0,\pi)$.

Označimo sa $h(x)$ njegovu sumu (y $L_2(0,\pi)$).

Znači $\|h-h_N\|_{L_2(0,\pi)} \to 0$ kada $N\to\infty$ gde je

$$h_N(x) = \sum_{\nu=1}^{N} a_\nu \cos\nu x \ .$$

Kako je $\int\limits_0^x h_N(t)dt = \sum\limits_{\nu=1}^{N} a_\nu \frac{\sin\nu x}{\nu}$, dobijamo:

$$\int_0^x h_N(t)dt - \int_0^x h(t)dt = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \frac{\sin\nu x}{\nu} - \int_0^x h(t)dt \tag{4.35.}$$

Iz (4.35.) primenom nejednakosti Košija dobijamo:

$$\left|\sum_{\nu=1}^{N} a_\nu \frac{\sin\nu x}{\nu} - \int_0^x h(t)dt\right|^2 = \left|\int_0^x h_N(t)-h(t)dt\right|^2 \leq \int_0^x dt\int_0^x |h_N-h|^2 dt \leq$$

$$\leq \quad \pi\int_0^{\pi}|h_N-h|^2 dt = \pi\|h_N-h\|^2 .$$

Iz poslednjeg sledi:

$$\left|\sum_{\nu=1}^{N} a_\nu \frac{\sin\nu x}{\nu} - \int_0^x h(t)dt\right| \leq \sqrt{\pi}\,\|h_N-h\|,$$

a odatle (kad $N\to\infty$)

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \frac{\sin\nu x}{\nu} = \int_0^x h(t)dt$$

tj.
$$g(x) = \int_0^x h(t)dt.$$

Odatle dobijamo da je g apsolutno neprekidna funkcija sa izvodom iz $L_2(0,\pi)$.

Dokažimo sada da je operator F samokonjugovan na $L_2(0,\pi)$.

Neka je $f\in L_2(0,\pi)$. Pošto je $A^{1/2}>0$ to važi:

$$(A^{1/2}\, i\frac{d}{dx}A^{1/2}f,f) = (i\frac{d}{dx}A^{1/2}f,A^{1/2}f) \qquad (4.36.)$$

Kako smo $A^{1/2}f$ označili sa g, to dobijamo:

$$(i\frac{d}{dx}A^{1/2}f,A^{1/2}f)=\int_0^\pi i\frac{d}{dx}g\cdot\overline{g}\,dx = i\int_0^\pi \overline{g}\,dg = i\left|\overline{g}g\right|_0^\pi - \int_0^\pi g\overline{g}\,'dx\Big| =$$

$$= -i\int_0^\pi g\overline{g}\,'dx = \int_0^\pi g\,\overline{i\frac{d}{dx}g}\,dx = (g,i\frac{d}{dx}g) \quad (\text{jer je } g(0)=g(\pi)=0)$$

$$(4.37.)$$

Iz (4.36.) i (4.37.) sledi:

$$(A^{1/2}\,i\frac{d}{dx}A^{1/2}f,f)=(i\frac{d}{dx}A^{1/2}f,A^{1/2}f)=(i\frac{d}{dx}g,g)=(g,i\frac{d}{dx}g)=$$

$$=(A^{1/2}f,i\frac{d}{dx}A^{1/2}f)=(f,A^{1/2}\,i\frac{d}{dx}A^{1/2}f)$$

Dakle, za svako $f\in L_2(0,\pi)$ je

$(Ff,f) = (f,Ff)$ a odatle $(Ff,f) = \overline{(Ff,f)}$.

Znači, kvadratna forma (Ff,f) je realna pa je F samokonjugovan operator.

Teorema 4.2. Sistem svojstvenih i prisajedinjenih funkcija graničnog zadatka (4.27.)-(4.28.) je dvostruko potpun u prostoru $L_2(0,\pi)$ za svako $\alpha\neq 0$. $(\alpha\in R)$.

Dokaz: Ispitaćemo pitanje dvostruke potpunosti sistema svojstvenih i prisajedinjenih vektora apstraktnog kvadratnog pramena (4.32.). Za dokaz će nam biti potrebna sledeća lema:

Lema 4.1. Važe sledeće nejednakosti:

a) $(Tf,f)\leqslant\beta(Cf,f)$ za neko $\beta>0$ i svako $f\in L_2(0,\pi)$

b) $(Ff,f)^2\leqslant \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}(Cf,f)(f,f)$ za svako $f\in L_2(0,\pi)$.

Dokaz leme:

Kako je $(Tf,f)=(A^{1/2}T_0A^{1/2}f,f)=(T_0A^{1/2}f,A^{1/2}f)$, (jer je operator $A^{1/2}>0$) dobijamo

$(Tf,f)\leqslant M\|A^{1/2}f\|^2 = M(Af,f)$ (M je gornja granica samokonjugovanog operatora T_0).

Iz poslednje nejednakosti s obzirom na to da je $C=(1+\alpha^2)A$ dobijamo:

$(Tf,f)\leqslant\beta(Cf,f)$ gde je $\beta=\frac{M}{1+\alpha^2}$.

b) $(Ff,f)^2=(\alpha A^{1/2}\, i\frac{d}{dx}A^{1/2}f,f)=\alpha^2(i\frac{d}{dx}A^{1/2}f,A^{1/2}f)^2 =$

$= \alpha^2(i\frac{d}{dx}g,g)^2 = \alpha^2|(g',g)|^2$. (shodno ranijim oznakama)

Kako je $g'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ (konvergencija u $L_2(0,\pi)$,

gde je $a_n=\frac{2}{\pi}(f,\sin nx)$, dobijamo

$$|(g',g)|^2=|(g,g')|^2=|(g,\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx)|^2=|\sum_{n=1}^{\infty}\bar{a}_n(g,\cos nx)|^2\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}|(g,\cos nx)|^2 \qquad (4.38.)$$

Sistem $\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ je ortonormirana baza u $L_2(0,\pi)$, a sistem $\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nx\}_{n=1}^{\infty}$ je ortonormiran u $L_2(0,\pi)$, pa prema jednakosti Parsevala i nejednakosti Besela važi:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 = \frac{2}{\pi}\,||f||^2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(g\cos nx)|^2 \leqslant \frac{\pi}{2}\,||g||^2$$

Iz (4.38.) i poslednje dve nejednakosti dobijamo:

$$|(g',g)|^2 \leqslant \frac{2}{\pi}||f||^2\cdot\frac{\pi}{2}\,||g||^2 = ||f||^2\cdot||A^{1/2}f||^2 = ||f||^2\cdot(Af,f) =$$

$$= \frac{||f||^2}{1+\alpha^2}(Cf,f) = \frac{(Cf,f)\cdot(f,f)}{1+\alpha^2}$$

Dakle, $\quad (Ff,f)^2 \leqslant \alpha^2|(g',g)|^2 \leqslant \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}(Cf,f)\cdot(f,f)$

Ovim je dokaz završen.

Neka je sada q neki fiksiran broj sa segmenta $\left(\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{|\alpha|}{\sqrt{1+\alpha^2}},\ 1\right)$.

Stavimo $\quad \chi = \frac{|\alpha|}{\sqrt{1+\alpha^2}}$.

Neposredno se uveravamo da su svojstvene vrednosti operatora C brojevi

$$\lambda_n(C) = \frac{1+\alpha^2}{n^2} .$$

Tada važi: $n^{2q}\lambda_n(C) \to 0$ kad $n\to\infty$ (jer je $q<1$),

$\chi < \sin\frac{\pi q'}{2}$ gde je $q'=\min\{q,1\}$ (znači $q'=q$ s obzirom na izbor broja q),

i $(Tf,f) \leqslant \beta(Cf,f)$

$(Ff,f)^2 \leqslant \chi^2(Cf,f)(f,f) \qquad (0<\chi^2<1)$.

Znači prema teoremi 2.4. sistem svojstvenih i prisajedinjenih vektora pramena

$$L(\lambda) = I+2\lambda F+\lambda^2 C-T$$

je dvostruko potpun u $L_2(0,\pi)$.

No, pošto je veza izmedju svojstvenih i prisajedinjenih vektora prethodnog pramena i svojstvenih i prisajedinjenih funkcija graničnog zadatka (4.27)-(4.28.) tipa $y=A^{1/2}v$ (y je svojstvena ili prisajedinjena funkcija zadatka (4.27.)-(4.28.) a v svojstveni ili prisajedinjeni vektor pramena $L(\lambda)$) i pošto je $A^{1/2}$ ograničeni linearan operator čiji je skup vrednosti gust u $L_2(0,\pi)$, zaključujemo da je tvrdjenje o dvostrukoj potpunosti dato teoremom 4.2. tačno.

§3. O pitanju zbirljivosti po Abelu redova Furije nekih funkcija po sistemu $\{e^{-\alpha nx}\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$

Kao što je poznato [35] sistem $\{e^{-\alpha nx}\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ je potpun i minimalan u $L_2(0,\pi)$. ($\alpha\in R$). No, s druge strane iz teoreme 3.5. sledi da taj sistem nije baza u $L_2(0,\pi)$.

Medjutim, može se desiti da je ipak red Furije nekih funkcija zbirljiv nekom od poznatih metoda.

U ovom odeljku ćemo se pozabaviti tim pitanjem.

Označimo sa $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ sistem biortogonalan sistemu

$$\{e^{-\alpha nx}\sin nx\}_{n=1}^{\infty} = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$$

Neka je funkcija $f\in L_2(0,\pi)$.

Kaže se da je red $\sum_{n=1}^{\infty}(f,g_n)y_n e^{-n^{\gamma}t}$ zbirljiv metodom Abela poretka γ, ukoliko postoji podniz delimičnih suma $S_{N_\nu}(t)$ ovog reda koji konvergira u prostoru $L_2(0,\pi)$ ka

$$u(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{S=N_\nu+1}^{N_{\nu+1}} e^{-s^{\gamma}t}(f,g_s)y_s) \quad \text{i pri tome je}$$

$$\lim_{t\to 0+} u(t) = f \qquad (y\ L_2(0,\pi)).$$

Kao što smo ranije videli, sistem $\{e^{-\alpha nx}\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ je deo sistema svojstvenih funkcija pramena:

$$-y''+2\alpha\lambda iy'+\lambda^2(1+\alpha^2)y = 0 \tag{4.39.}$$

$$y(0) = y(\pi) = 0 \tag{4.40.}$$

Svojstvene vrednosti pramena (4.39.)-(4.40.) su $\lambda_n=ni$, gde je $n\varepsilon Z$ i $n\neq 0$.

Nerealni deo spektra zadatka (4.39.)-(4.40.) možemo zapisati u obliku

$$\sigma_0 = \Gamma\cup\bar{\Gamma} \qquad \text{gde je} \qquad \begin{array}{l}\Gamma = \{\, ni\,|\,n\varepsilon N\} \\ \bar{\Gamma} = \{-ni\,|\,n\varepsilon N\}.\end{array}$$

Kao što smo ranije činili, diferencijalni pramen (4.39.) -(4.40.) svodimo na apstraktni pramen

$$L(\lambda) = I+2\lambda F+\lambda^2 C \tag{4.41.}$$

gde je $F = F^* = \alpha A^{1/2}\, i\, \frac{d}{dx}\, A^{1/2}$, $C = (1+\alpha^2)A$ i

$$A = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\cdot,\sin nx)}{n^2}\sin nx.$$

Pramen (4.41.) zadovoljava uslove teoreme 2.5., pa postoji operator $Z_\Gamma\varepsilon\sigma_\infty$ takav da je:

1° $Z_\Gamma^2 + 2FZ_\Gamma + C = 0$

2° $Z_\Gamma^* Z_\Gamma < C$

3° ako je $\lambda_0\varepsilon\Gamma$, pramenovi $Z(\lambda) = I-\lambda Z_\Gamma$ u $L(\lambda)$ imaju iste lance svojstvenih i prisajedinjenih vektora.

4° Nerealni deo spektra operatora Z_Γ je jednak $\{\frac{1}{ni}\,|\,n\varepsilon N\}$.

Pošto je operator $Z_\Gamma\ \varepsilon\sigma_\infty$, to sve njegove tačke spektra različite od nule su svojstvene vrednosti.

Dokažimo sada da operator Z_Γ nema realnih svojstvenih vrednosti.

Neka je, naprotiv, λ_0 realna svojstvena vrednost operatora Z_Γ a $x_0 \neq 0$ odgovarajući svojstveni vektor $(x_0 \varepsilon L_2(0,\pi))$. Tada je $Z_\Gamma x_0 = \lambda_0 x_0$ pa iz osobina 1° operatora Z_Γ važi:

$\lambda_0^2 x_0 + 2\lambda_0 F x_0 + C x_0 = 0$, odakle sledi:

$$\lambda_0^2 (x_0, x_0) + 2\lambda_0 (F x_0, x_0) + (C x_0, x_0) = 0 \tag{4.42.}$$

Kako smo već ranije ustanovili da je za svako $f \varepsilon L_2(0,\pi)$ ispunjeno

$(Ff,f)^2 \leq \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2} (Cf,f)(f,f)$, to je jednakost (4.42.) nemoguća (jer je $\lambda_0 \varepsilon R$).

Znači, operator Z_Γ nema realnih svojstvenih vrednosti pa je njegov spektar

$$\sigma(Z_\Gamma) = \{0\} \cup \{\frac{1}{ni} \mid n \varepsilon N\}.$$

Zadatak (4.39.)-(4.40.) nema prisajedinjenih funkcija. Takodje, na pramen (4.41.) nema prisajedinjenih vektora. Ako je v_n svojstveni vektor pramena (4.41.) koji odgovara svojstvenoj vrednosti $\lambda_n = ni$, tada je

$A^{1/2} v_n = y_n$, gde je y_n svojstvena funkcija zadatka (4.39.)-(4.40.). Iz osobine 3° operatora Z_Γ sledi:

$$Z_\Gamma v_n = \frac{1}{ni} v_n \tag{4.43.}$$

Neka je $R_\Gamma = iZ_\Gamma$.

Očevidno je $R_\Gamma \varepsilon \sigma_\infty$, $\sigma(R_\Gamma) = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \varepsilon N\}$,

$R_\Gamma v_n = \frac{1}{n} v_n$ i $R_\Gamma^* R_\Gamma \leq C$.

Iz uslova $R_\Gamma^* R_\Gamma < C$ sledi da je $s_k(R_\Gamma) \leq \frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{n}$.

Neka je $|\arg(R_\Gamma f, f)| \leq \theta$ za svako $f \varepsilon L_2(0,\pi)$.

Teorema 4.3. Ako je funkcija ϕ oblika $\phi = A^{1/2} R_\Gamma f$ $(f \varepsilon L_2(0,\pi))$, tada je njen Furijeov red zbirljiv metodom Abela svakog poretka γ gde je $1 < \gamma < \frac{\pi}{2\theta}$.

Dokaz: Sa $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ smo označili biortogonalan sistem sistemu $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$. Znači, $(g_m, y_n) = \delta_{nm}$.

Stavimo $A^{1/2} g_n = h_n$.

Tada imamo

$$(h_n, v_m) = (A^{1/2} g_n, v_m) = (g_n, A^{1/2} v_m) = (g_n, y_m) = \delta_{nm}.$$

(u poslednjem je iskorišćena samokonjgovanost operatora $A^{1/2}$).

Znači, $(h_n, v_m) = \delta_{nm}$.

Kako operator R_Γ zadovoljava sve uslove teoreme Lidskog*) to postoji niz N_ν prirodnih brojeva koji rastući teži ∞, takav da je

$$(R_\Gamma f)(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \Big(\sum_{s=N_\nu+1}^{N_{\nu+1}} e^{-s^\gamma t} (R_\Gamma f, h_s) v_s \Big). \tag{4.44.}$$

Konvergencija u (4.44.) je po normi prostora $L_2(0,\pi)$ (za svako $t>0$).

Osim toga, jednakost (4.44.) važi za proizvoljno γ koje ispunjava uslov $1 < \gamma < \frac{\pi}{2\theta}$.

Kako je prema teoremi Lidskog

$$\lim_{t \to 0+} (R_\Gamma f)(t) = R_\Gamma f \qquad \text{(konvergencija u } L_2(0,\pi)) \tag{4.45.}$$

to iz (4.44.) dejstvom ograničenog operatora $A^{1/2}$ dobijamo:

$$A^{1/2} R_\Gamma f = \sum_{\nu=1}^{\infty} \Big(\sum_{s=N_\nu+1}^{N_{\nu+1}} e^{-s^\gamma t} (R_\Gamma f, h_s) A^{1/2} v_s \Big) . \tag{4.46.}$$

Kako je $A^{1/2} v_s = y_s$ i $(R_\Gamma f, h_s) = (R_\Gamma f, A^{1/2} g_s) = (A^{1/2} R_\Gamma f, g_s)$, iz (4.46.) dobijamo:

$$A^{1/2} R_\Gamma f = \sum_{\nu=1}^{\infty} \Big(\sum_{s=N_\nu+1}^{N_{\nu+1}} e^{-s^\gamma t} (A^{1/2} R_\Gamma f, g_s) y_s \Big).$$

---

* Teorema Lidskog ima veoma dug i komplikovan dokaz. On se može videti u radu [26]. U osnovi dokaza nalazi se složeno ispitivanje rasta rezolvente operatora R_Γ i njena integracija po pogodnoj konturi.

Kako je

$$\|A^{1/2}(R_\Gamma f)(t) - A^{1/2}R_\Gamma f\| < \|A^{1/2}\|\,\|(R_\Gamma f)(t)-R_\Gamma f\|,$$

to prelaskom na lim kada $t\to 0+$ i koristeći se sa (4.45.) dobijamo:

$$\phi(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\Big(\sum_{s=N_\nu+1}^{N_{\nu+1}} e^{-s^\gamma t}(\phi,g_s)y_s\Big) \qquad \text{i}$$

$$\lim_{t\to 0+}\phi(t) = \phi.$$

Time je tvrdjenje dokazano.

§4. Neki nerešeni zadaci

Ispitivanje svojstava potpunosti, minimalnosti i bazisnosti sistema svojstvenih funkcija graničnih zadataka u kojima diferencijalni izraz i granični uslovi zavise od parametra λ, veoma je složeno. Ta svojstva je osobito teško dokazati čisto analitički ne dovodeći taj sistem u vezu sa graničnim zadatkom kod koga se pojavio.

Navešćemo nekoliko problema te vrste.

1° Pitanje zbirljivosti po Abelu Furijeovog reda funkcije iz $L_2(0,\pi)$ po sistemu $\{e^{-\alpha nx}\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ nije razjašnjeno. Pretpostavlja se da je odgovarajući red zbirljiv metodom Abela svakog poretka $\gamma>1$ (A.G. Kostjučenko). Osnovna teškoća pri čisto analitičkom prilaženju problemu se sastoji u tome što se biortogonalni sistem sistemu $\{e^{-\alpha nx}\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ izražava preko eliptičkih funkcija pa je neophodne ocene praktično nemoguće sprovesti.

2° Problem potpunosti sistema $\{e^{-\alpha\lambda_n x}\sin\lambda_n x\}_{n=1}^{\infty}$ gde je $\lambda_n = n+O(\frac{1}{n})$ je neraspravljen. Taj sistem se pojavljuje prilikom ispitivanja potpunosti sistema svojstvenih funkcija diferencijalnog pramena

$$y''+a\lambda y'+\lambda^2 y = 0$$

$$y(0) = 0 \qquad (-2<a<2)$$

$$y'(0)+\beta y(\pi) = 0 \qquad (\beta\in R)$$

koje odgovaraju svojstvenim vrednostima koje pripadaju desnoj poluravni.

3° Sistem $\{e^{-\alpha\sqrt{n^2-\omega^2}x}\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$, (pojavljuje se u teoriji zvuka) ($\omega\in R$) je potpun u $L_2(0,\pi)$. Medjutim čisto analitički dokaz tog tvrdjenja nije poznat. Smatra se da se za rešenje pitanja 2° i 3° moraju izgradjivati principijelno novi metodi.

4° Neka su $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\ldots$ nule funkcije

$$G(\lambda) = ae^{\lambda\omega_1}+be^{\lambda\omega_2} \qquad (\omega_1=\overline{\omega}_2) \quad a,b\in C).$$

koje pripadaju desnoj poluravni.

Pitanje potpunosti sistema (ili potpunosti sa nekim defektom) $\phi(x,\lambda_n)$, gde je

$$\phi(x,\lambda) = a_1e^{\lambda\omega_1 x}+b_1e^{\lambda\omega_2 x}, \quad \text{u prostoru } L_2(0,1)$$

nije razjašnjeno.

5° Neka funkcija $W(\lambda)=a_0(\lambda)+a_1(\lambda)e^{\lambda\omega_1}+a_2(\lambda)e^{\lambda\omega_2}+a_3(\lambda)e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)}$ ($\arg\omega_1\neq\arg\omega_2$), gde su $a_i(\lambda)$ $(i=\overline{0,3})$ polinomi istog stepena, ima proste nule $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\ldots$.

Pitanje bazisnosti Risa sistema $(\phi(x,\lambda_n),\ \lambda_n\phi(x,\lambda_n))$ u prostoru $L_2 \oplus W$, gde je W pogodno odabrani prostor, nije razrešeno. (Ovde je $\phi(x,\lambda)=a_1e^{\lambda\omega_1 x}+b_1e^{\lambda\omega_2 x}$).

Pokazuje se da prostor W mora raspolagati sa svojstvom glatkosti svojih elemenata.

Neki rezultati toga tipa postoje [30], ali su povezani sa diferencijalnim jednačinama.

Inače u apstraktnom obliku ništa nije poznato.

L I T E R A T U R A

1) Н.И.АХИЕЗЕР, И.М.ГЛАЗМАН: Теория линейных операторов в гилбертовом пространстве, изд.3-ье, "Виша школа", Харков; Т.I 1977, Т.2 1978.

2) Н.К.БАРИ: Биортогональные системы и базисы в гилбертовом пространстве, учен.зап.моск.ун-та, 4, № I48 (I95I), 68-I07

3) WEIDMANN YOACHIM: Linear operators in Hilbert spaces, Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin 1980.

4) М.Г.ГАСЫМОВ: О кратной полноте системы функций, Д.А.Н. Азербайджанской ССР, Т.27., № 7 (I97I)

5) Т.Гамелин: Равномерные алгебры, Москва I973.

6) Г.М.ГОЛУЗИН: Геометрическая теория функций комплесного перемечого, изд.второе, "Наука", Москва, I966.

7) И.Ц.ГОХБЕРГ, М.Г.КРЕЙН: Введение в теорию линенных несамосопряженных операторов в гилбертовом пространстве, изд."Наука" Москва, I965.

8) Н.ДАНФОРД, ДЖ.Т.ШВАРЦ: Линейные операторы
часть I общая теория, Москва I962.
часть II спектральная теория, Москва I966.

9) М.ДОСТАНИЧ: О суммируемости рядов Фурье некоторых функций по системе $\left\{e^{i\lambda_n x}\right\}_{n=1}^{\infty}$ методом Абеля, Вестник М.Г.У.(в печате)

I0) М.ДОСТАНИЧ: О полноте и минимальности некоторых систем функций, Мат. весник (у штампи)

II) М.ДОСТАНИЧ: Об одном условии чтобы система $\left\{e^{-\alpha\lambda_n x}\sin\lambda_n x\right\}_{n=1}^{\infty}$ не была базисом в пространстве $L_2(0,\pi)$, Мат.весник (у штампи)

I2) М.А.ЕВГРАФОВ: Асимптотические оценки и целые функции, изд.3-ье,"Наука" I979.

I3) В.А.ИЛЬИН, В.В.ТИХОМИРОВ: О базисности риссовских средних спектральных разложений,отвечающих обыкновенному несамосопряженному дифференциальному оператору порятка n ,дифференц. уравн.,Т.I8.,№ I2 (I982), 2093-2126.

I4) К.А.КАЗЬМИН:Замыкания линейной оболочки одной системы функций,Сиб.мат.журнал.,Т.I8.,№ 4 (I977), 799-805

I5) М.В.КЕЛДЫШ: О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений, докл. АНСССР, 77 № I,(I95I), II-I4

I6) М.В.КЕЛДЫШ: О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов,Успехи мат.наук,Т 26 вып.4.(I97I), I5-4I.

I7) А.Г.КОСТЮЧЕНКО, М.Б.ОРАЗОВ: Задача о колебаниях упругого полуцилиндра и связанные с ней самосопряженные квадратные пучки,труди семинара им.И.Г.Петровского,вып.6, (I98I),97-I46

I8) А.Г.КОСТЮЧЕНКО, Г.В.РАДЗИЕВСКИЙ: О суммировании методом Абельа n -кратных разложений,Сиб.мат.журнал,Т.I5.,№ 4, (I974), 855-870.

I9) А.Г.КОСТЮЧЕНКО,А.А.ШКАЛИКОВ: О суммируемости разложений по собственным функциям дифференциальных операторов и операторов свертки, функц.анализ и его приложения,Т.I2, вып.4,(I978),24-40

20) A.M.KRALL: A nonhomogeneous eigenfunction expansion,Trans. amer. math.soc. 117 (1965), 352-361

2I) М.Г.КРЕЙН,Г.К.ЛАНГЕР: О некоторых математических принципах линейной теории демпфированных колебаний континумов,в.кн.труды международного симпозиума по применению теории функций комплесного переменого в механике сплошной среды,"Наука"I965.

22) М.Г.КРЕЙН: Введение в геометрию индефинитных J пространств и теорию операторов в этих пространствах, в.кн. вторая летняя матем.школа, I, (1965), "Наукова думка", Киев

23) H.LANGER: Zur Spektraltheorie J-selbstadjungierter Operatoren, Math.Annalen, 146, (1962), 60-85.

24) Б.Я.ЛЕВИН: Распределение корней целых функций, Москва, 1956.

25) Б.Я.ЛЕВИН: Целые функции (курс лекций), изд.-во МГУ, 1971.

26) В.Б.ЛИДСКИЙ: О суммируемости рядов по главным векторам несамосопряженных операторов, труды М.М.О. Т.II, 1962), 3-35

27) Н.Е.МАМЕДОВ: О минимальности кратно-полных систем функций, известия академии наук Азербайджанской ССР, № 2, (1978), 23-26.

28) А.И.МАРКУШЕВИЧ: Теория аналитических функций, Т. I и Т.2, Москва 1968.

29) М.А.НАЙМАРК: Линейные дифференциальные операторы изд.2-ое, "Наука", Москва 1969.

30) М.Г.ОРАЗОВ, А.А.ШКАЛИКОВ: Об n -кратной базисности собственных функций некоторых регулярных краевых задач, Сиб.мат.журнал, Т.17., № 3, (1976), 627-639

31) М.Г.ОРАЗОВ: О полноте собственных и присоединенных векторов самосопряженного квадратичного пучка, Функц.анализ и его приложения, Т.10, вып.2, (1976), 82-83.

32) P.R. HALMOS: A Hilbert Space Problem Book, Second edition, Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin 1982.

33) E.F.COLLINGWOOD, A.J.LOHWATER: The theory of cluster sets, Cambridge 1966.

34) Б.В.ШАБАТ: Введение в комплексный анализ "Наука" Москва 1969.

35) А.А.ШКАЛИКОВ: Об одной системе функций, Мат.заметки, Т.18, № 6 (1975).

36) А.А.ШКАЛИКОВ: О базисности собственных векторов квадратичных операторных пучков, Мат. заметки, Т.30, № 3, (1981), 371-385.