АНАЛИТИЧКЕ ФУНКЦИЈЕ ПРЕТСТАВЉЕНЕ КОНВЕРГЕНТНИМ НИЗОВИМА АЛГЕБАРСКИХ ФУНКЦИЈА

ТЕЗА

МИЛОША РАДОЈЧИЋА

ПРИМЉЕНА ЗА ДОКТОРСКИ ИСПИТ НА СЕДНИЦИ ФИЛОСОФСКОГ ФАКУЛТЕТА УНИВЕРСИТЕТА У БЕОГРАДУ 21. ЈАНУАРА 1928. ПРЕМА РЕФЕРАТУ ЧЛАНОВА ИСПИТНОГ ОДБОРА Г. Г. Д-РА МИХ. ПЕТРОВИЋА, РЕД. ПРОФ. УНИВЕРСИТЕТА И Д-РА НИКОЛЕ САЛТИКОВА, РЕД. КОНТР. ПРОФ. УНИВЕРСИТЕТА.

БЕОГРАД
ГРАФИЧКИ ЗАВОД „МАКАРИЈЕ“ А. Д. У ЗЕМУНУ
1928

Увод.

Предмет овог рада је развијање општих мултиформних аналитичких функција у ма каквим областима њихове егзистенције, у конвергентне низове алгебарских функција. Тај предмет спада у општи, по речима *K. Weierstrass-a* главни задатак теорије аналитичких функција, који гласи: изналазити и испитивати што простије низове аналитичких функција, које претстављају дате опште аналитичке функције у што разноврснијим областима њихове егзистенције. Зато је најбоље ако отпочнемо са кратким историјским прегледом овог проблема:

Прво је *Weierstrass* дао у том правцу у радовима од год. 1841 и год. 1876, његово схватање Taylor-овог реда и развијање у редове и бескрајне производе, целих и мероморфних функција[1].

Затим је г. *P. Appell* изнео год. 1883 неке развитке, чије су области конвергенције, области у равни или на алгебарским Riemann-овим површинама, а ограничене су кружним луковима[2].

Г. *K. Runge* доказао је пак год. 1885 следећи основни став[3]:

„Нека је D ма каква *отворена област*[4] равни z, а $f(z)$ функција холоморфна у D. Увек постоји низ (или ред) рационалних функција холоморфних у D и које конвергирају у унутрашњости[5] те области униформно функцији $f(z)$. Полове рационалних функција можемо ставити ма где, изван D."

Ако је област D *једноставно повезана*[6], следује одатле непосредно следећи општи став:

---

[1] Werke, Bd. 1, p. 67, Bd. 2, p. 77.

[2] Acta Math. I, p. 109.

[3] Acta Math. VI, p. 129.

[4] *отворена област* = *domaine ouvert* = *Gebiet*; напротив, *затворена област* = *domaine fermé* = *Bereich*.

[5] т. ј. у свакој затвореној области садржаној у D.

[6] *n-тоструко повезан* = *n-fach zusammenhängend* = *n-tuplement connexe*.

„Нека је D ма каква коначна, једноставно повезана, отворена област равни z, а $f(z)$ функција холоморфна у D. Увек постоји низ (или ред) полинома који конвергирају у унутрашњости области D униформно функцији $f(z)$."

Затим долазе свестрана испитивања редова полинома, на челу са методама г. г. *P. Painlevé-a* и *D. Hilbert-a*, конвергирањем у звездастим областима г. г. *E. Borel-a* и *G. Mittag-Leffler-a*, „најбољом апроксимацијом" *Чебишева*, специјалним полиномима г. *G. Faber-a* и општим ставовима г. *P. Montel-a*. Редове општих рационалних функција испитивао је поглавито г. *Borel*[1].

Одатле видимо да се, изузев г. *Appell*-овог рада, остали односе искључиво на конвергирање у областима где је функција униформна. Природно је међутим пренети испитивање и на потпуно опште поље мултиформних функција. То и јесте предмет овог рада. Но, пошто сада за апроксимацију не могу више доћи у обзир униформне функције као што су рационалне функције и полиноми, то је природно, заменити их мултиформним алгебарским функцијама[2].

Приметимо нузгред, да низови мултиформних алгебарских функција нису непознати у математици. То потврђује сам елементарни образац:

$$lg\, z = \mathop{\mathrm{L}}_{n \to \infty} n(\sqrt[n]{z} - 1),$$

који претставља апроксимацију логаритма помоћу низа алгебарских функција, $n(\sqrt[n]{z} - 1)$. Конвергирање овог низа је униформно у целој области егзистенције логаритма, т. ј. на целој логаритамској површини, изузев у $z = 0$ и $z = \infty$, где $lg\, z$ бива бескрајан.

Први одељак садржи општа посматрања, други одељак неколико специјалних.

Као што већ горњи пример показује, код развијања мултиформних функција у општим областима њихових Riemann-ових површина у низове специјалних функција, јавља се једна нова околност, која не постоји за равне области. Она се састоји у томе, што су Riemann-ове површине специјалних функција, у

[1] прегледно у: *P. Montel, Leçons sur les séries de polynomes* и у *Borel*-овим књигама исте збирке.

[2] види и моју белешку у *Comtes rendus des séances de l'Acad. des Sciences, Paris:* Sur l'approximation des fonctions analytiques multiformes par les fonctions algébriques.

општем случају простије него што је Riemann-ова површина дате опште функције, тако, да се низ специјалних површина мора приближавати, тежити облику опште површине. Та је околност неизбежна, ако су специјалне функције, као што је то случај у овом раду, алгебарске функције, а област у којој развитак треба да конвергира, сувише компликован, да би се могао сматрати за део једне алгебарске Riemann-ове површине.

Дакле, први одељак нашег рада морамо почети са дефиницијом једног начина, како да се Riemann-ове површине једног низа алгебарских функција, постепено компликују, па да може бити реч о конвергирању тог низа функција у датој општој области Riemann-ове површине. Међу могућим дефиницијама изабрали смо најпростију коју је и најприродније узети; она гласи:

„Нека је D ма каква отворена област једне Riemann-ове површине. За алгебарске Riemann-ове површине $S_n (n = 1, 2, \cdots)$ кажемо да гранично садрже област D, ако за сваку затворену област Δ (која се може сматрати за област једне алгебарске површине) садржану у D, постоји довољно велик број N, такав да за свако $n > N$, Δ можемо сматрати за област површине S_n."

Помоћу те дефиниције, поменута испитивања о низовима рационалних функција и полинома, уопштавају се на један природан начин. Тако добијамо наш главни став, који гласи:

Став I. „Нека је $f(Z)$ општа аналитичка функција, D једна отворена област њене Riemann-ове површине, а у којој је $f(Z)$ холоморфна, изузев у алгебарским тачкама гранања који се налазе у D и где је довољно да $f(Z)$ буде континуирана; нека је D' једна отворена област (неке Riemann-ове површине) која садржи област D.

Ма како изабрали низ алгебарских Riemann-ових површина $S_n (n = 1, 2, \cdots)$ које гранично садрже област D', увек постоји низ алгебарских функција $f_n(Z) (n = 1, 2, \cdots)$ чије површине су $S_n (n = 1, 2, \cdots)$ и које конвергирају у унутрашњости области D униформно функцији $f(Z)$".

На даљем месту прецизирамо овај став, те добијамо следећи став:

Став I'. „Нека је $f(Z)$ општа аналитичка функција, D једна отворена област њене Riemann-ове површине, а у којој је $f(Z)$ холоморфна изузев у алгебарским тачкама гранања, које се налазе у D и где је довољно да $f(Z)$ буде континуирана; нека је D' једна отворена област (неке Riemann-ове површине) која садржи област D; нека су $S_n (n=1, 2, \cdots)$ неке алгебарске Riemann-ове површине које гранично садрже област D'; нека су $\Delta_n (n=1, 2, \cdots)$ неке затворене области садржане у D, које конвергирају области D, а такве су, да се Δ_n може сматрати за област површине S_n.

Увек постоји низ алгебарских функција $\varphi_n(Z) (n=1,2,\cdots)$ чије површине су $S_n (n=1, 2, \cdots)$ и које конвергирају у унутрашњости области D униформно функцији $f(Z)$, а да свака функција $\varphi_n(Z)$ има за једине полове, у свакој комплементарној области области Δ_n, само један пол, у произвољно изабраној тачки".

Из ставова I и I' следују непосредно, разни нови ставови, а у случају да је D област у равни и поменути Runge-ов став: став I садржи прву половину Runge-овог става, т. ј. без произвољног бирања полова, став I' напротив, цели став. На крају првог одељка посматрамо симултано конвергирање у више одељених области Riemann-ових површина.

Други одељак садржи три примера који служе илустровању првог одељка. Први пример показује како је у општим ставовима првог одељка садржано развијање функција униформних на логаритамској површини, други пример садржи једну врсту уопштења Taylor-овог реда, док се трећи пример односи на проблем испитивања функције коју претставља дати низ алгебарских функција.

Први одељак.

1. Претходна посматрања о Riemann-овим површинама.

Пре него што пређемо на главни предмет овог рада, морамо се задржати на посматрању Riemann-ових површина, са гледишта на које се ми овде стављамо.

Најпростије се долази до појма Riemann-ове површине S опште моногене аналитичке функције $f(z)$, конструкцијом те површине. Суштина те конструкције састоји се у следећем:

Посматрајмо скуп свију елемената функције $f(z)$, чији је општи облик, $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^{\frac{\nu}{n}}$ $\left(\text{ако је } z_0 = \infty, \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^{-\frac{\nu}{n}}\right)$, где је $n = 1$ или цео број > 1 и где сваки елеменат конвергира у једном кругу описаном око z_0. Те кругове не сматрајмо за делове равни, него за кружне отворене области које се распростиру изнад равни и састоје се из n листова.

Уочимо прво, ма који овакав елеменат; означимо његову област конвергенције (у горњем смислу) са K_1. Затим уочимо један други елеменат, такав, да његова област конвергенције K' има у пројекцији на раван један део заједнички у коме се поклапају вредности f, оне у K_1, са онима у K'. Спојмо у том делу K_1 и K' и назовимо нову област, K_2. Затим уочимо један трећи елеменат, такав да његова област конвергенције K'' има у пројекцији један или више делова заједничких, са K_2, у којима се поклапају вредности f, оне у K_2 са оним у K''. Спојмо у тим деловима K_2 и K'' и добивену област назовимо K_3.

Наставимо овако бескрајно, држећи се следећих правила:

1. K_{m+1} настаје из K_m и $K^{(m)}$, ако обоје спојимо у оним њиховим деловима где се поклапају и њихове пројекције на раван и вредност функције $f(z)$; где се поклапају само пројекције, док вредности функције остају различите, тамо оставимо области да се распростиру, једна област преко друге.

2. Горњи низ ~~елемената бирамо~~ тако, да сваки елеменат поменутог скупа буде садржан у области конвергенције, бар једног елемента тог низа.

Овако дефинирани низ области $K_m (m=1,2,\cdots)$ одређује, површину S као границу, којој те области теже. Према томе, Riemann-ова површина има карактер отворене области. Изузев алгебарских *тачака гранања*[1] у којима је функција континуирана, за сингуларне тачке функције $f(z)$ се сматра да не припадају самој површини, него њеној *међи*[2].

Има аналитичких функција које су униформне на некој Riemann-овој површини S, а егзистирају само у једном делу површине S: њихове области егзистенције су неке отворене области површине S. Ипак се и S сматра Riemann-овом површином такве једне функције. Дакле, треба разликовати појам Riemann-ове површине S неке аналитичке функције $f(z)$, од њене области егзистенције E: у општем случају, E је отворена област површине S (у горњој конструкцији је $E=S$).

Једна отворена област неке Riemann-ове површине, може се сматрати у општем случају (т. ј. када њена међа садржи и линије) и као отворена област многих других Riemann-ових површина. У овом раду имају нарочиту важност оне отворене области, које се могу сматрати за области *алгебарских* Riemann-ових површина. Ако једној оваквој области додамо њену међу, настаје једна затворена област, које се може сматрати за *затворену област једне алгебарске Riemann-ове површине*. Такве затворене области, означаваћемо редовно, словом Δ, па ћемо их укратко називати, областима Δ (одн. $\Delta_n, \Delta_n^{(\mu)}, \ldots$).

Уведимо сада следећу дефиницију:

Дефиниција I. Уочимо једну отворену област D неке Riemann-ове површине и један низ затворених области $\Delta_n (n=1,2,\cdots)$ садржаних у D. За затворене области Δ_n кажемо да конвергирају према отвореној области D (или да апроксимирају D), ако за сваку тачку области D постоји довољно велик број N, такав, да се за свако $n>N$, та тачка налази у Δ_n.

Докажимо следећи, лако схватљиви став:

---

[1] *тачка гранања = point de ramification = Verzweigungspunkt.*

[2] *међа = frontière = Begrenzung.*

Став 1. *Свака отворена област D једне Riemann-ове површине, може се апроксимирати једним низом затворених области $\Delta_n (n = 1, 2, \cdots)$, коначне повезаности*[1] *и чије контуре имају коначне дужине.*

Доказ. Уочимо горе поменути низ области $K_m (m = 1, 2, \cdots)$ које конвергирају области D. Међа области K_m има заједничких тачака са међом области D. Зато области K_m, ако им додамо њихове међе, те их сматрамо за затворене области, нису садржане у D. Међутим, то се може лако поправити. Треба само у горњој конструкцији Riemann-ове површине посматрати место целих кругова конвергенције, концентричне кругове мањих полупречника па их узимати тако, да с обзиром на њих опет важе правила 1. и 2. на стр. 5 и 6. Тада ће области које одговарају областима K_m, заједно са њиховим међама бити садржане у D, а испуњаваће осим тога и остале услове поменуте у горњем ставу.

Уведимо још следећу дефиницију:

Дефиниција II. Означимо са D ма какву отворену област Riemann-ове површине, а са $S_n (n = 1, 2, \cdots)$ алгебарске Riemann-ове површине. За површине S_n кажемо да *гранично садрже* отворену област D, ако за сваку затворену област Δ садржану у D, постоји довољно велик број N, такав, да за свако $n > N$, Δ можемо сматрати за област површине S_n.

Овакав низ алгебарских површина, које гранично садрже дату област D, можемо на пр. конструирати помоћу једног низа области Δ_n, што апроксимирају област D. Треба само узети за S_n једну алгебарску површину која садржи Δ_n. Према томе, из става 1. следује, да *за сваку област D, постоји један овакав низ површина S_n.*

Појам граничног садржавања је у простијим случајевима врло зоран. На пр., ако је D логаритамска површина, имамо у низу површина функција $\sqrt[n]{z} (n = 1, 2, \cdots)$, један низ површина S_n.

Специјалан случај граничног садржавања је садржавање просто речено. Оно долази онда, када се и D може сматрати за област алгебарске површине S', јер тада можемо ставити,

---

[1] *повезаност = connexité = Zusammenhang.*

$S_n = S'$. Приметимо још да, ако низ површина садржи гранично област D, онда он садржи гранично и сваку област садржану у D.

2. О Cauchy-јевом интегралу на Riemann-овој површини.

Нека $f(z)$ означава функцију униформну и холоморфну у некој коначној, затвореној области Δ равни z, чија контура C има коначну дужину. Cauchy-јев интеграл

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(t)\,dt}{t - z} \tag{1}$$

даје нам вредности функције $f(z)$ у унутрашњости области Δ, из вредности које та функција има на контури C.

Ако се област Δ не налази у равни, него, ако се, покривајући раван на неким местима више него једанпут, распростире по некој Riemann-овој површини, онда образац (1) не важи. Међутим, нама је потребно да проширимо образац (1) за такве опште области.

Претпоставимо дакле, да је Δ затворена област једне алгебарске Riemann-ове површине S', а да њена целокупна контура C има коначну дужину. Затим, нека је $f(z)$ аналитичка функција, униформна и холоморфна у тој области Δ, изузев највише, у алгебарским тачкама грања које се налазе у Δ и где је довољно да $f(z)$ буде континуирана.

У теорији функција постоје ставови који нам омогућују да образац (1) заменимо општим обрасцима, који важе и за ове општије случајеве.

Пре свега морамо да уведемо следећи начин обележавања променљивих: Претпоставимо да се у излагању посматра нека Riemann-ова површина S. Нек слова $z, t, \ldots$ обележавају тачке бројне равни; за разлику од њих, обележимо великим словима, $Z, T, \ldots$ одређене тачке површине S, које се у равни пројицирају у одговарајуће тачке, $z, t, \ldots$. Дакле је на пр. Z, симбол који у себи садржи поред количине z, и извесну нумерацију појединих листова површине S. У томе смислу $f(Z)$ обележава функцију $f(z)$ али, када ју посматрамо као функцију униформну у некој области на површини S.

Ако је *род*[1] области Δ раван нули, једно познато уопштење обрасца (1) добијамо одмах помоћу конформног пресликавања

[1] *род* = *genre* = *Geschlecht*.

~~области Δ на извесну област~~ у равни. Ако род области Δ није раван нули, конформно пресликавање није више могуће, те морамо употребити други начин. Један такав општи начин оснива се на познатим важним чињеницама што су их у теорији алгебарских функција нашли Riemann и Roch. Ми ћемо их скупити у следећи став:

Став. Нека је S ма каква алгебарска Riemann-ова површина. Увек постоји алгебарска функција површине S, која има r датих полова, ако је само r веће од рода p површине S. Та функција садржи $r-p$ произвољних констаната, које се могу на пр. одредити тиме што функцији доделимо q датих нула и $r-p-q$ датих коефициената у главним деловима полова.

(Број r односи се на полове првог реда; пол реда s, вреди s бескрајно блиских полова првог реда. Критичке тачке у ставу не играју изузетну улогу: према називу уобичајеном у теорији алгебарских функција, критична тачка m-тог реда, $z=a$ је пол s-тог реда, ако развитак функције око те тачке по степенима од $(z-a)^{\frac{1}{m}}$ почиње са степеном $-s$. Слично важи за нуле.)

Претпоставимо прво, да је област Δ коначна. Према овом ставу постоји на S' алгебарска функција променљиве T која има у унутрашњости области Δ један једини пол првог реда у $T=Z$, са остатком $=1$. Из аналитичког израза за такву функцију, она је алгебарска и по променљиву Z, са истом површином S'. Зато назовимо ту функцију, $\alpha(T, Z)$. Функција $\alpha(T, Z)$ је потпуно одређена ако ставимо $q=0$, $r=p+1$, а p полова ставимо ма где изван Δ, на пр. у једну те исту тачку изван Δ.

Пошто је $f(T)\cdot\alpha(T, Z)$ као функција од T, холоморфна у Δ осим у $T=Z$, то, ако формирамо интеграл дуж C, добијамо лако помоћу рачуна остатака, образац:

$$f(Z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(T)\,\alpha(T, Z)\,dT. \tag{2}$$

Тај образац претставља тражено уопштење Cauchy-јевог обрасца (1), *за сваку коначну затворену област* Δ. Он нам даје у сваком Z у унутрашњости области Δ вредност функције $f(Z)$. Ако је Z изван Δ, интеграл је раван нули.

Ако смо једном одредили функцију α, можемо ју задржати за све могуће функције f, и све коначне области Δ, ако само остаје иста површина S', а Δ не обухвата осталих p полова функције α. Ако пак тих p полова ставимо у бескрајност, образац (2) вреди неограничено за све коначне области Δ површине S'.

Претпоставимо сада, на против, да област Δ није коначна. У том случају тачка у бескрајности налази се у Δ, бар на једном листу површине S'. Ако ставимо $(t-z)\,\alpha(t,z)=\beta(t,z)$, имамо

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(T)\,\alpha(T,Z)\,dT=f(Z)-\sum m_\nu f_\nu(\infty)\,\beta_\nu(\infty,Z), \tag{3}$$

где се збир односи на све оне детерминације f_ν и β_ν функција f и β, којима одговарају тачке $T=\infty$, у унутрашњости од Δ; пошто то могу бити и тачке гранања, то m_ν означава којега су реда.

Ако дакле желимо да образац (2) важи и за бескрајне области Δ, морамо захтевати да буде $\beta_\nu(\infty,Z)\equiv 0$, т. ј. алгебарска функција $\alpha(T,Z)$ мора поред поменутих особина имати у $T=\infty$, на оним листовима где се та тачка налази у Δ, нуле реда $m_\nu+1$ (дакле другог реда, ако није у питању тачка гранања). Из горњег става о алгебарским функцијама следује да таква функција α увек постоји. У овом случају је само, $q>0$, па према томе морамо и r повећати, да би се одржао услов, $r-p-q>0$.

Ако $\alpha(T,Z)$ има ове нуле у бескрајности, образац (2) претставља, тражено уопштење Cauchy-јевог обрасца (1), за сваку затворену област Δ, коначну или не. Ако је Z изван Δ т. ј. ако је Z тачка површине функције $f\cdot\alpha$ промењиве T, која се налази изван Δ, интеграл је раван нули.

Разјаснимо сада образац (2) на неколико примера.

Ако је Δ коначна област у равни, за S' узмимо раван. α је свака рационална функција која има пол првог реда, остатка $=1$ по t у $t=z$. Најпростија тачка фуокција је $\dfrac{1}{t-z}$: са њоме образац (2) прелази у Cauchy-јев образац (1).

Споменимо и случај када је Δ бескрајна област у равни; нека је a тачка изван Δ. Можемо ставити, $\alpha=(z-a)/[(t-a)(t-z)]$, те (2) прелази у, по себи јасни образац:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{(z-a)\,f(t)}{(t-a)\,(t-z)}\,dt. \tag{4}$$

Ако је Δ коначна област, таква да се може сматрати за област површине функције $\sqrt[n]{z}$, онда за α морамо узети једну алгебарску функцију, униформну на тој површини, са једним полом првог реда, остатка $=1$ по T у $T=Z$, јединим полом у Δ. Лако је увидети да је најпростија таква функција: $\alpha = \dfrac{1}{nt\left(1-\sqrt[n]{\dfrac{z}{t}}\right)}$.

Помоћу ње (2) прелази у познати образац

$$f(z)=\frac{1}{2n\pi i}\int_C \frac{f(t)}{1-\sqrt[n]{\dfrac{z}{t}}}\cdot\frac{dt}{t}. \tag{5}$$

Ако област Δ није коначна и ако се на месту, на коме $\sqrt[n]{a}$ има вредност $\epsilon\left|\sqrt[n]{a}\right|$, налази једна тачка изван Δ, која се у равни пројицира у тачку a, тада можемо ставити

$$\alpha=\frac{\sqrt[n]{z}-\epsilon\left|\sqrt[n]{a}\right|}{\sqrt[n]{t}-\epsilon\left|\sqrt[n]{a}\right|}\cdot\frac{1}{nt\left(1-\sqrt[n]{\dfrac{z}{t}}\right)}.$$

Овим завршавамо припремно излагање, које нам омогућава доказивање наших ставова.

3. Главни став и његове последице.

Наш главни став гласи:

Став I. *Нека је $f(Z)$ општа аналитичка функција, D једна отворена област њене Riemann-ове површине, а у којој је $f(Z)$ холоморфна, изузев у алгебарским тачкама гранања које се налазе у D, и где је довољно да $f(Z)$ буде континуирана; нека је D' једна отворена област (неке Riemann-ове површине) која садржи област D.*

Ма како изабрали низ алгебарских Riemann-ових површина $S_n (n=1,2,\cdots)$ које гранично садрже област D', увек постоји низ алгебарских функција $f_n(Z) (n=1,2,\cdots)$ чије површине су $S_n (n=1,2,\cdots)$ и које конвергирају у унутрашњости[1] области D униформно функцији $f(Z)$.

Доказ. Уочимо један низ алгебарских површина S_n $(n=1,2,\cdots)$ које гранично садрже област D', и један низ затворених области $\Delta_n (n=1,2,\cdots)$ садржаних у D, које конверги-

[1] види [5] (на 1. страни).

рају области D, коначне су повезаности и чије контуре имају коначне дужине.

Пошто је D садржано у D', то површине S_n гранично садрже и област D, дакле можемо одредити низ области $\triangle_n$ тако, да се за свако n, област $\triangle_n$ узмогне сматрати за област површдне S_n. Целокупну контуру области $\triangle_n$ назовимо C_n. На послетку уочимо још један низ затворених области $\triangle'_n (n=1,2,\cdots)$ које конвергирају области D тако, да област $\triangle'_n$ буде садржана у унутрашњости области $\triangle_n$.

Функција $f(Z)$ је униформна и холоморфна у $\triangle_n$, дакле можемо на ту функцију и на ту област применити образац (2). За површину S' алгебарске функције $\alpha(T,Z)$ изаберимо површину S_n. Место α пишимо α_n. Тако добијамо за свако Z у унутрашњости области $\triangle_n$:

$$f(Z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} f(T)\,\alpha_n(T,Z)\,dT. \qquad (n=1,2,\cdots) \tag{6}$$

Ако на C_n одредимо погодне тачке $T^{(n)}_{\mu,\nu}$, и ставимо

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=1}^{\mu} f(T^{(n)}_{\mu,\nu})\cdot\alpha_n(T^{(n)}_{\mu,\nu},Z)\cdot(T^{(n)}_{\mu,\nu}-T^{(n)}_{\mu,\nu-1})=f_{n,\mu}(Z), \tag{7}$$

образац (6) се може писати у облику:

$$f(Z)=\lim_{\mu\to\infty} f_{n,\mu}(Z), \qquad (n=1,2,\cdots) \tag{8}$$

а та граница конвергира униформно у унутрашњости области $\triangle_n$. Сада узмимо низ позитивних бројева $\epsilon_n (n=1,2,\cdots)$ који теже нули. За свако n изаберимо такво $\mu=\mu_n$, да за све $\mu\geqslant\mu_n$ у целоме $\triangle'_n$ буде

$$|f(Z)-f_{n,\mu_n}(Z)|<\epsilon_n \tag{9}$$

или, ако за f_{n,μ_n} пишемо f_n,

$$|f(Z)-f_n(Z)|<\epsilon_n. \qquad (\text{за } Z \text{ у } \triangle'_n) \tag{10}$$

Пошто области $\triangle'_n$ конвергирају области D, то образац (10) значи да функције $f_n(Z)$ конвергирају у унутрашњости области D униформно функцији $f(Z)$:

$$f(Z)=\lim_{n\to\infty} f_n(Z) \qquad (\text{за } Z \text{ у } D). \tag{11}$$

Међутим, из обрасца (7) се види да је функција $f_n(Z)$ алгебарска функција чија је површина S_n.

Тиме је став I. доказан.

Ако у главном ставу учинимо извесне претпоставке, добијамо низ других ставова.

1⁰ Ако претпоставимо да је отворена област D', област Riemann-ове површине функције $f(z)$, добијамо следећи став[1]:

Став II. *Нека је $f(Z)$ општа аналитичка функција, а D' једна отворена област њене Riemann-ове површине; нека је D једна отворена област (исте Riemann-ове површине) садржана у D', а у којој је $f(Z)$ холоморфна, изузев у алгебарским тачкама грањања које се налазе у D, и где је довољно да $f(Z)$ буде континуирана.*

Ма како изабрали низ алгебарских Riemann-ових површина $S_n (n = 1, 2, \cdots)$ које гранично садрже област D', увек постоји низ алгебарских функција $f_n(Z) (n = 1, 2, \cdots)$ чије површине су $S_n (n = 1, 2, \cdots)$ и које конвергирају у унутрашњости области D униформно функцији $f(Z)$.

2⁰ Ако за D узмемо целу област егзистенције функције $f(Z)$, а за D' целу њену Riemann-ову површину, добијамо:

Став III. *Нека је $f(Z)$ општа аналитичка функција, S њена Riemann-ова површина. Ма како изабрали низ алгебарских Riemann-ових површина $S_n (n = 1, 2, \cdots)$ које гранично садрже површину S, увек постоји низ алгебарских функција $f_n(Z) (n = 1, 2, \cdots)$ чије површине су $S_n (n = 1, 2, \cdots)$ и које конвергирају униформно функцији $f(Z)$ у унутрашњости целе области њене егзистенције.*

3⁰ Ако ставимо $D = D'$, имамо следећи став:

Став IV. *Нека је $f(Z)$ општа аналитичка функција, холоморфна у некој области D њене Riemann-ове површине, изузев у алгебарским тачкама грањања које се налазе у D, и где је довољно да $f(Z)$ буде континуирана.*

Ма како изабрали низ алгебарских Riemann-ових површина $S_n (n = 1, 2, \cdots)$ које гранично садрже област D, увек постоји низ алгебарских функција, $f_n(Z) (n = 1, 2, \cdots)$

---

[1] то је став I. у мојој поменутој белешци у »*Comptes Rendus*« Париске Академије.

чије површине су $S_n(n=1, 2, \cdots)$ и које конвергирају у унутрашњости области D униформно функцији $f(Z)$.

Међутим, ставити $D \neq D'$ има смисла у толико што онда на пр., за неки пол P (униформан или у алгебарској тачки гранања) можемо узети да се он налази у D', а тада је могуће сматрати његову околину, ако је n веће од неког броја, увек за део површине S_n. Напротив, ако ставимо $D = D'$, P се налази изван D' а тада S_n може у околини те тачке имати разних тачака гранања, без обзира на то, каква је област D у близини тачке P.

4⁰ Ако за D' узмемо неку алгебарску површину S', па ставимо, $S_n = S'$, добијамо:

Став V. *Нека је $f(Z)$ аналитичка функција, униформна и холоморфна у некој отвореној области D једне алгебарске Riemann-ове површине S', изузев у алгебарским тачкама гранања које се налазе у D, и где је довољно да $f(Z)$ буде континуирана: увек постоји низ алгебарских функција површине S', које конвергирају у унутрашњости области D униформно функцији $f(Z)$.*

5⁰ Приметимо на пр. да у последњем ставу, S' може да претставља и површину саме функције $f(Z)$. Ако за D узмемо област егзистенције функције $f(Z)$, добијамо тада:

Став VI. *Нека је $f(Z)$ аналитичка функција чија је Riemann-ова површина, алгебарска површина S': увек постоји низ алгебарских функција површине S', које конвергирају униформно функцији $f(Z)$ у унутрашњости целе области њене егзистенције.*

6⁰ Ако у ставу V. ставимо за S' саму раван, алгебарске функције постају *рационалне* и ми добијамо став:

„Нека је $f(z)$ аналитичка функција униформна и холоморфна у отвореној области D, равни z. Увек постоји низ рационалних функција које конвергирају у унутрашњости области D, униформно функцији $f(z)$."

Међутим, то је први део добро познатог, у Уводу поменутог, Runge-овог става. Други део произлази из идућих посматрања.

4. Један став о алгебарским функцијама.

Алгебарске функције $f_n(Z)$ обрасца (11), што смо га добили за доказ главног става, имају у општем случају, полова у области D. Шта више, број тих полова расте неограничено са n. Јер, полови функције $f_n(Z)$ налазе се у тачкама $T^{(n)}_{\mu_n,\nu}(\nu=1,2,\cdots,\mu_n)$ криве C_n, која пролази у унутрашњости области D.

Да би отклонили ту, у неку руку, неприродну околност, показаћемо да из функција f_n можемо увек заменити низом простијих алгебарских функција, које имају полове тамо, где ми хоћемо. То премештање полова врши се слично као у доказу г. Runge-а његовог поменутог става, само што је у нашем случају, који је општији, излагање дуже: г. Runge-у је довољно било посматрати у ту сврху функцију облика $\frac{1}{z-a}$, док ми морамо посматрати општу алгебарску функцију.

Дакле, означимо са $\alpha(z)$ једну општу алгебарску функцију, са S' њену Riemann-ову површину а са Δ једну зетворену област на S', где је α холоморфна изузев у тачкама гранања које се налазе у Δ, и где је довољно да α буде континуирана. Треба доказати да се функција $\alpha(z)$, чији се полови налазе где било изван Δ, може у Δ апроксимирати низом извесних алгебарских функција, $\beta_\nu(z)(\nu=1,2,\cdots)$ исте површине S', но које имају полове, где ми хоћемо (изван D). Од свих могућих решења овог проблема, изабраћемо следеће:

Ако из површина S' отстранимо област Δ, остаје извесан број међусобно одељених отворених области, т. з. *комплементарне* области, области Δ; показаћемо, да функцијама β_ν можемо доделити у свакој таквој комплементарној области, један једини пол, у произвољно изабраним тачкама. Искажимо то у следећем ставу:

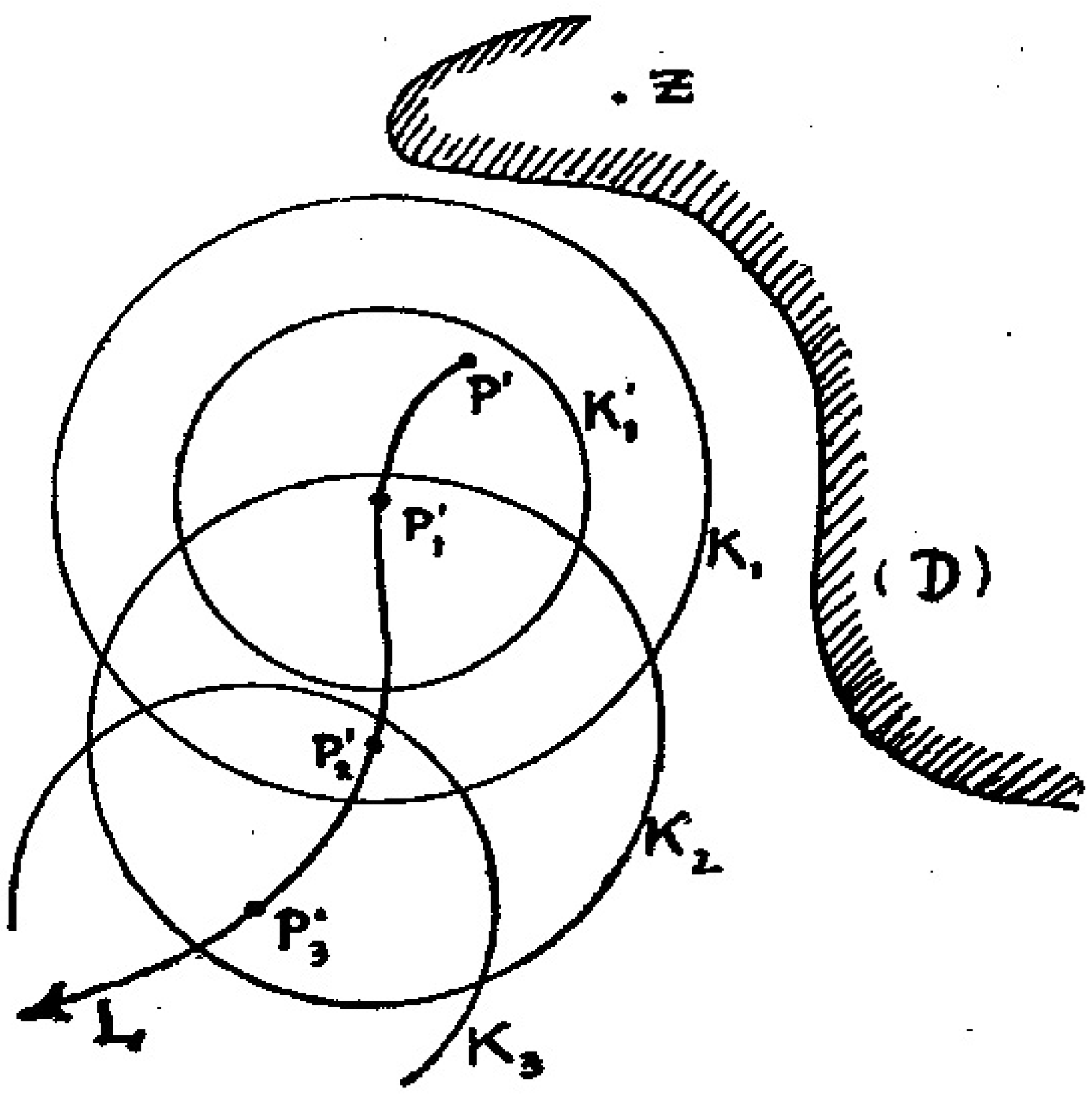
Став 2. *Нека је $\alpha(Z)$ једна алгебарска функција, Δ ма која затворена област њене површине S', а у којој је функција $\alpha(Z)$ холоморфна, изузев у тачкама гранања, које се налазе у Δ, и где је довољно да $\alpha(Z)$ буде континуирана; изаберимо затим у свакој комплементарној области, области Δ, по једну тачку, $P_k(k=1,2,\cdots,r)$:*

Увек постоји низ алгебарских функција $\beta_\nu(Z)$ $(\nu=1,2,\cdots)$ које имају исту површину S', чији се полови налазе само у тачкама P_k, а које конвергирају у области Δ, униформно функцији $\alpha(Z)$.

Доказ: Довољно је ако доказ изведемо за случај да је област Δ једноставно повезана јер, као што се из доказа може видети, за вишеструко повезане области треба само поновити више пута један те исти доказ. Дакле, претпоставимо да постоји само једна комплементарна област, па у њој изаберимо једну тачку, P_1 (једину од тачака P_k). У тој комплементарној области се налазе полови функције, x, означимо их са, $P', P'', \cdots$.

Став 2. биће већ онда доказан, када будемо нашли низ алгебарских функција $\beta_{1,\nu}(\nu=1,2,\cdots)$ које конвергирају у области $\triangle$ униформно функцији α, а место пола P', имају полове у P_1, полови $P', P'', \cdots$ оставши непромењени.

Заиста, ако смо нашли функције $\beta_{1,\nu}$, посматрајмо пол P''. За сваку функцију $\beta_{1,\nu}(\nu=1,2,\cdots)$ можемо опет наћи низ за који је и пол P'' премештен у P_1, дакле можемо из ових последњих, очевидно, извадити нов низ функција $\beta_{2,\nu}(z)\,(\nu=1,2,\cdots)$ које конвергирају у области $\triangle$ униформно функцији $\alpha(z)$, а немају полова ни у P' ни у P''. Ако овако наставимо, исцрпшћемо после коначног броја понављања све полове, $P', P'', \cdots$ и добити тражени низ функција β_ν.



Низ функција $\beta_{1,\nu}$ наћи ћемо пак, овако. Узмимо да је тачка P' променљиви параметар, те га означимо са U (одн. u). Функција $\alpha(Z)$ је алгебарска функција променљиве U, са истом површином S', те ју означимо са $\alpha(Z,U)$. Опишимо од P' до P_1 пут L, који пролази изван $\triangle$ и не кроз полове $P'', P''', \cdots$.

Претпоставимо прво да P' није тачка гранања. Изаберимо на L тачку P'_1 довољно блиску тачки P', да би се могао описати на S круг K_1 око P'_1, који је цео изван $\triangle$, а обухвата P', но ниједну тачку гранања (види слику).

$\alpha(Z,U)$ је за свако Z у $\triangle$ и U у K_1, холоморфна, дакле се за све те вредности може развити у конвергентан Taylor-ов ред по степенима од $U-P'_1$. Ако дакле, пишемо $\alpha^{(\lambda)}$ место $\dfrac{\partial^\lambda \alpha}{\partial U^\lambda}$, развитак гласи:

$$\alpha(Z,U)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda!}\alpha^{(\lambda)}(Z,P'_1)(U-P'_1)^\lambda. \tag{12}$$

Ако пак ставимо $U=P'$ (што је допуштено, јер се P' налази у K_1), па место $\alpha(Z,P')$ опет пишемо $\alpha(Z)$, добијамо:

$$\alpha(Z)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda!}(P'-P'_1)^\lambda\,\alpha^{(\lambda)}(Z,P'_1). \tag{13}$$

У обрасцу (13) функција α развијена је у области $\triangle$ у конвергентан ред алгебарских функција промењиве Z, исте површине S', а које имају пол у P_1' место у P'.

Покажимо да је то конвергирање униформно. Нека је ρ полупречник једног круга K_1' описаног око P_1', садржаног у K_1 а који садржи тачку P'. Будући да $\alpha(Z,U)$ мора бити ограничена за Z у $\triangle$ и U у K_1', то постоји број M такав да је за све те вредности:

$$|\alpha(Z,U)| < M. \tag{14}$$

Ако на то применемо познату Weierstrass-ову релацију за коефицијенте Taylor-овог реда, добијамо

$$\frac{\alpha^{(\lambda)}(Z,P_1')}{\lambda!}\rho^\lambda < M \tag{15}$$

а одатле, за чланове реда (13),

$$\left|\frac{1}{\lambda!}(P'-P_1')^\lambda \alpha^{(\lambda)}(Z,P_1')\right| < M\frac{|P'-P_1'|^\lambda}{\rho^\lambda}. \tag{16}$$

Пошто је $|P'-P_1'| < \rho$, то (16) доказује униформност конвергенције у $\triangle$.

Ако је напротив P' тачка гранања m-тог реда, стављамо $U-P'=V^m$, и тиме добијамо у облику функције $\alpha(Z,P'+V^m)$ прошли случај, а из њега развитак

$$\alpha(Z)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(-1)^\lambda}{\lambda!}(P_1-P')^{\frac{\lambda}{m}}\left[\frac{\partial^\lambda\alpha(Z,P'+V^m)}{\partial V^\lambda}\right]_{V=\sqrt[m]{P_1'-P'}}, \tag{17}$$

у којему је α развијена у области $\triangle$, у униформно конвергентан ред алгебарских функција исте површине, а које имају пол у P_1' место у P'.

После овог првог корака треба помаћи пол из P_1' даље по L. У ту сврху треба поновити горње излагање узевши место $\alpha(z)$ функције $\alpha^\lambda(Z,P_1')$ (одн., чланове реда (17)), место P' тачку P_1', а место P_1' даљу тачку P_2'. На тај начин добијамо развитак функције α у двоструки ред алгебарских функција чији су полови у P_2' место у P' или P_1'.

Овако настављамо, премештајући пол P' у све даље тачке линије $L: P_3', P_4, \cdots$. После коначног броја понављања доспећемо до тачке P_1: тада ће $\alpha(Z)$ бити развијена у вишеструки ред алгебарских функција којима су полови у P_1 место у P'. Преобративши тај вишеструки ред у једноставну границу, добијамо тражене функције $\beta_{1,\nu}$.

5. Допуна главног става.

Према оном што смо споменули на почетку прошлог броја, став 2. омогућава замену функција $f_n(z)$ главног става и његових последица, нарочито упрошћеним алгебарским функцијама. У том смислу допуњен, главни став гласи:

Став I'. *Нека је $f(Z)$ општа аналитичка функција, D једна отворена област њене Riemann-ове површине, а у којој је $f(Z)$ холоморфна изузев у алгебарским тачкама грања, које се налазе у D и где је довољно да $f(Z)$ буде континуирана; нека је D' једна отворена област (неке Riemann-ове површине) која садржи област D; нека су $S_n (n=1, 2, \cdots)$ неке алгебарске Riemann-ове површине које гранично садрже област D'; нека су $\Delta_n (n=1, 2, \cdots)$ неке затворене области садржане у D, које конвергирају области D а такве су, да се Δ_n може сматрати за област површине S_n.*

Увек постоји низ алгебарских функција $\varphi_n(Z)$ $(n=1, 2, \cdots)$ чије површине су $S_n (n=1, 2, \cdots)$ и које конвергирају у унутрашњости области D униформно функцији $f(Z)$, а да свака функција $\varphi_n(Z)$ има за једине полове, у свакој комплементарној области, области Δ_n, само један пол, у произвољно изабраној тачки.

Доказ. За области Δ_n можемо сматрати да су исте што и оне у доказу става I. Према ставу 2., свака алгебарска функција $f_n(Z)$ става I., може се апроксимирати неким низом алгебарских функцијама $f_{n,\nu}(Z) (\nu=1, 2, \cdots)$ исте површине S_n и које у области Δ_n конвергирају униформно функцији f_n, а у свакој комплементарној области, области Δ_n имају, свака само један пол у произвољној тачки. Дакле се образац (11) може заменити обрасцем

$$f(Z) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{L}} \; \underset{\nu\to\infty}{\mathrm{L}} f_{n,\nu}(Z). \tag{18}$$

Ако изаберемо међу бројевима ν, низ бројева $\nu_n (n=1, 2, \cdots)$ који довољно брзо расту и пишемо, $f_{n,\nu_n} = \varphi_n$, образац (18) се може заменити једноставнијим,

$$f(Z) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{L}} \varphi_n(Z), \tag{19}$$

који доказује горњи став.

Слично се употпуњују и остали ставови. Тако, место става V добијамо следећи став:

Став V′. *Нека је $f(Z)$ аналитичка функција, униформна и холоморфна у некој отвореној области D једне алгебарске Riemann-ове површине S', изузев у тачкама грањања које се налазе у D и где је довољно да $f(Z)$ буде континуирана: увек постоји низ алгебарских функција површине S', континуираних у D и које конвергирају у унутрашњости области D униформно функцији $f(Z)$.*

Доказ. Области Δ_n су у овом случају области површине S', Можемо, очигледно, претпоставити, да свака комплементарна област, области Δ_n, садржи бар једну комплементарну област, области D. Према томе можемо ставити полове функција $\varphi_n(Z)$ у тачке ових последњих области, т. ј. изван D. То значи да је φ_n холоморфна у D, до на тачке грањања у којима је али, континуирана, што и тврди горњи став.

Исто тако можемо и у ставу VI ставити, да су алгебарске функције континуиране у целој области егзистенције функције $f(Z)$.

У специјалном случају броја 6^0, став V′ значи, да се рационалне функције могу изабрати тако, да буду холоморфне у D. *Дакле, као последицу става I′ добијамо Runge-ов став у потпуности.*

У ставовима V и V′, као и у Runge-овом ставу, дотичне алгебарске функције су униформне у области D. У ставовима I — IV и у I′, то у главној није случај[1]. Међутим, ма те функције и небиле униформне у D, ипак можемо говорити о томе, да су оне континуиране у D, у случају да на свим путевима у D, те функције остају коначне. У том погледу споменимо следећи став:

Став VII. *Нека је $f(Z)$ општа аналитичка функција, S њена Riemann-ова површина, D једна отворена област површине S која ни на једном листу не садржи тачку у бескрајности, једноставно је повезана и рода 0, а у којој је функција $f(Z)$ холоморфна, изузев у алгебарским тачкама грањања које се налазе у D и где је довољно да $f(Z)$ буде континуирана.*

---

[1] Ма да је могуће, као на пр., када је површина од f, логаритамска површина, а S_n, површина од $\sqrt[n]{z}$.

Ма како изабрали низ алгебарских Riemann-ових површина $S_n(n=1,2,\cdots)$ које гранично садрже одласт D, увек постоји низ целих алгебарских функција, $\varphi_n(Z)$ чије површине су $S_n(n=1,2,\cdots)$ и које конвергирају у унутрашњости области D, униформно функцији $f(Z)$.

Краткоће ради, а по називу који је уобичајен у теорији алгебарских функција у Немачкој, назвали смо алгебарске функције које бивају бескрајне само за $z=\infty$ *целим алгебарским функцијама*. Функције $\varphi_n(Z)$ су дакле континуиране у D.

Доказ. Посматрајмо један низ површина S_n и један одговарајући низ затворених области Δ_n (исте као у доказу става I; овде је међу осталим, $D=D'$). Пошто је област D једноставно повезана, и нултог рода, то ју можемо апроксимирати осим низом области Δ_n, и једним низом једноставно повезаних затворених области нултог рода, $\Delta'_\nu(\nu=1,2,\cdots)$. За свако n довољно велико, постоји један број ν_n такав, да све области Δ'_ν, ако је $\nu\leqslant\nu_n$, буду садржане у Δ_n; штавише, можемо претпоставити да ν_n бива бескрајно са n, не опадајући нигде.

Пошто је област Δ'_{ν_n} садржана у Δ_n, следује: са једне стране да је функција $f_n(Z)$ у Δ'_{ν_n} холоморфна, до на тачке грањања, где је континуирана; са друге стране, да Δ_{ν_n} можемо сматрати за област површине S_n. Дакле, по ставу 2. функцију f_n можемо апроксимирати у Δ'_{ν_n} низом алгебарских функција површине S_n, које имају само један пол и то у бескрајности, јер је област Δ'_{ν_n} као и Δ_n, коначна. Те алгебарске функције назовимо, $\varphi_{n,\lambda}(\lambda=1,2,\cdots)$. Будући да низ области Δ'_{ν_n} $(n=1,2,\cdots)$ конвергира области D, то можемо очигледно изабрати бројеве $\lambda_n(n=1,2,\cdots)$ који довољно брзо расту, а да са ознаком, $\varphi_{n,\lambda_n}=\varphi_n$, буде униформно у унутрашњости целе области D,

$$f(Z)=\underset{n\to\infty}{\mathrm{L}}\,\varphi_n(Z),\tag{20}$$

чиме је став VII доказан.

Ако је у ставу VII, D област у равни, онда и за површине S_n можемо ставити раван, па су φ_n целе рационалне функције, *а од става VII постаје добро познати, у Уводу поменути став о развитку аналитичких функција у низове полинома.* Међутим, у општем ставу I' увек није могуће постићи да функције $\varphi_n(Z)$ буду континуиране у D. То се одмах види, када се за $f(Z)$ узме један елиптичан интеграл прве врсте, а за

D целу Riemann-ову површину те функције. Ова је свуда континуирана и има само алгебарских критичких тачака. Дакле, гдегод ставим полове функција φ_n, увек ће се они налазити у D.

6. Симултана конвергенција у више одељених области.

Споменимо на крају овог одељка најопштији облик што га могу имати ставови ове врсте. Као што на пр. низ полинома може у разним областима равни конвергирати разним аналитичким функцијама, тако је и са низом општих алгебарских функција. За њих ћемо доказати једно уопштење става I, које се не односи само на једну област D и D', него на више њих. Међутим, морамо почети са тиме, да на одговарајући начин уопштимо и појам граничног садржавања. Пошто број области може бити коначан или бесконачан, то ће дефиниција тог појма садржати два случаја:

Дефиниција II'. Претпоставимо да се преко бројне равни распростире $\begin{Bmatrix} m \\ \text{бескрајно много} \end{Bmatrix}$ ма каквих, међусобно одељених, отворених области Riemann-ових површина: $D_\mu \begin{Bmatrix} (\mu = 1, 2, \ldots, m) \\ (\mu = 1, 2, \ldots,) \end{Bmatrix}$; уочимо једну затворену област $\Delta^{(\mu)}$ неке Riemann-ове површине садржану у D_μ; са $S_n (n = 1, 2, \ldots)$ означимо алгебарске Riemann-ове површине. За површине S_n кажемо да *гранично садржe* скуп отворених области D_μ, ако за скуп ма каквих затворених области $\Delta^{(\mu)} \begin{Bmatrix} (\mu = 1, 2, \ldots, m) \\ (\mu = 1, 2, \ldots, m_N; \quad m_N \to \infty \quad \text{ако} \quad N \to \infty \end{Bmatrix}$ постоји довољно велик број N такав, да за свако $n > N$, скуп тих области можемо сматрати за скуп међусобно одељених области површине S_n.

Општи став који хоћемо да докажемо гласи:

Став VIII. Нека се преко равни z распростиру ма какве, међусобно одељене, отворене области Riemann-ових површина: $D'_\mu (\mu = 1, 2, \ldots)$. Свака област D'_μ нека садржи по једну отворену област D_μ; у свакој области D_μ нека је дата једна аналитичка функција $F_\mu(Z)$, униформна и холоморфна у D_μ, изузев у алгебарским тачкама гранања које се налазе у D_μ и где је довољно да $F_\mu(Z)$ буде континуирана.

Ма како изабрали низ алгебарских Riemann-ових површина $S_n(n=1,2,\cdots)$ које гранично садрже скуп области $D'_\mu(\mu=1,2,\cdots)$, увек постоји низ алгебарских функција $f_n(Z)(n=1,2,\cdots)$ чије површине су $S_n(n=1,2,\cdots)$ и које конвергирају у унутрашњости свију области D_μ униформно одговарајућим функцијама $F_\mu(Z)$.

Доказ. У горњем ставу број области може бити коначан или бесконачан. Претпоставимо прво да је коначан, раван m.

Уочимо један низ алгебарских површина $S_n(n=1,2,\cdots)$ које гранично садржи скуп области $D'_\mu(\mu=1,2,\ldots,m)$. У свакој области D_μ уочимо један низ затворених области $\triangle_n^{(\mu)}(n=1,2,\cdots)$ садржаних у D_μ, које конвергирају области D_μ, коначне су повезаности, и чије контуре $C_n^{(\mu)}$ имају коначне дужине. Као у доказу става I, можемо, очигледно и овде претпоставити, да се скуп области $\triangle_n^{(\mu)}(\mu=1,2,\ldots,m)$ може сматрати за скуп међусобно одељених области површине S_n.

Образац (2) очевидно, важи и онда када $\triangle$ означава неколико одељених области површине S'. Зато нам израз:

$$\sum_{\mu=1}^{m}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n^{(\mu)}}F_\mu(T)\,\alpha_n(T,Z)\,dT,\qquad (n=1,2,\cdots) \tag{21}$$

за Z у области $\triangle_n^{(\mu)}$ површине S_n, даје вредност функције, $F_\mu(Z)$. Трансформацијом тог израза добијамо пак, као што се одмах види, слично као у доказу става I, један низ функција $f_n(Z)$ $(n=1,2,\cdots)$, који доказује горњи став.

Претпоставимо сада, да је број области D_μ бескрајан. Тај се случај лако своди на горњи. Уочимо наиме, првих m области $D_\mu(m=1,2,\cdots)$. Ако низ алгебарских функција које конвергирају за тих m области означимо са $f_{m,n}(Z)(n=1,2,\cdots)$ то ће очигледно, за бројеве n_m који доста брзо расту, низ функција $f_{m,n_m}(Z)(m=1,2,\cdots)$ конвергирати за свих бескрајно много области и став је доказан.

Ако се број области D_μ своди на једну, добијамо опет главни став.

Споменимо један простији облик става VIII који настаје, када области $D'_\mu(\mu=1,2,\cdots)$ границе једна на другу, тако да, избрисасвши заједничке међе, све заједно творе једну отворену област, D'. Тада имамо:

Став IX. *Нека је D' ма каква отворена област једне Riemann-ове површине; нека су $D_\mu(\mu = 1, 2, \cdots)$ отворене области међусобно одељене, садржане у D'; у свакој области D_μ нека је дата једна аналитичка функција $F_\mu(Z)$, униформна и холоморфна у D_μ, изузев у алгебарским тачкама гранања које се налазе у D_μ и где је довољно да $F_\mu(Z)$ буде континуирана.*

Ма како изабрали низ алгебарских Riemann-ових површина $S_n(n = 1, 2, \cdots)$ које гранично садрже област D', увек постоји низ алгебарских функција $f_n(Z)(n = 1, 2, \cdots)$ чије површине су $S_n(n = 1, 2, \cdots)$ и које конвергирају у унутрашњости свију области D_μ униформно одговарајућим функцијама $F_\mu(Z)$.

Ако претпоставимо да је D' област у равни, из става IX добијамо непосредно познате ставове о конвергирању полинома и општих рационалних функција, у више одељених области.

Други одељак.

1. О примени изложеног принципа.

У овом одељку изнећемо неколико примера који примењују принцип изложен у првом делу. Сви проблеми који се могу схватити као примена тог принципа, могу се свести на следећа два основна проблема. Први проблем састоји се у томе, да се за дату област Riemann-ове површине коју се узима као област конвергенције, нађе облик једног низа алгебарских функција, које у тој области могу да апроксимирају коју било аналитичку функцију холоморфну у тој области (изузев можда у алгебарским тачкама гранања, где је довољно да функција буде континуирана); или, ако је дата у овој области једна одређена функција, да се нађе специјалан овакав низ, који апроксимира баш ту функцију. Други проблем састоји се у обратноме: да се за дати конвергентни низ алгебарских функција нађе област конвергенције и да се испита функција коју тај низ претставља.

Нећемо се обазирати на многобројне обрађене или необрађене чињенице, које се могу уврстити у ова два проблема, него ћемо одмах прећи на наше примере.

Први пример, нека служи као илустрација неких наших ставова.

Претпоставимо да је Riemann-ова површина функције $f(Z)$ нашег главног става, површина функције $lg z$. Тада је очигледно, $f(z) \equiv \varphi(lg z)$, где φ означава једну униформну аналитичку функцију. D' означава ма коју отворену област те површине. За површине $S_n (n = 1, 2, \cdots)$ које гранично садрже отворену област D', можемо очигледно, изабрати увек површине функција $\sqrt[n]{(z - a_n)(z - b_n)} (n = 1, 2, \cdots)$, где за $n = \infty$, бројеви a_n теже нули а бројеви b_n бескрајности, ма на који начин. Тада је дакле S_n површина са n листова и две тачке гранања: $z = a_n$ и $z = b_n$. Најпростије је пак, ставити тачке гранања у $z = 0$ и $z = \infty$, тако да S_n буде површина од $\sqrt[n]{z}$; $f_n(Z)$ је функција униформна на S_n, дакле можемо ставити: $f_n(z) = R_n(\sqrt[n]{z})$, где R_n означава извесну рационалну функцију. Образац (11) тада прелази у

$$f(z) = \operatorname*{L}_{n\to\infty} R_n(\sqrt[n]{z}). \tag{22}$$

Ако је D једноставно повезана област, имамо случај става VII, јер тачка $z=\infty$ налази се по својој природи изван D. Дакле, тада можемо ставити: $f_n(z) = P_n(\sqrt[n]{z})$, где P_n означава полином, те (22) прима облик:

$$f(z) = \operatorname*{L}_{n\to\infty} P_n(\sqrt[n]{z}). \tag{23}$$

Исто тако смо могли расподелити полове од f_n на две тачке: $z=\infty$ и $z=0$; означивши са P_n и Q_n полиноме, имали би:

$$f(z) = \operatorname*{L}_{n\to\infty} \left\{ P_n(\sqrt[n]{z}) + Q_n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{z}}\right)\right\}. \tag{24}$$ [1]

2. О једном уопштењу Taylor-овог реда.

Као други пример посматрајмо једну врсту развитака који уопштавају на извесан начин Taylor-ове редове. На Riemann-овој површини S неке аналитичке функције $f(Z)$ описана је једна кружна линија C (која се на S затвара већ после једног обилажења око средишта). Ако је $f(Z)$ униформна и холоморфна у унутрашњости кружне линије C, онда ју ту можемо развити у Taylor-ов ред. Али, ако $f(Z)$ ту није униформна, то више није могуће. Онда се у унутрашњости од C налазе бар две тачке гранања и ми можемо између њих пређи на друге листове површине S, на којима C више не постоји. Целу отворену област површине S коју на овај начин можемо обићи, назовимо D.

Претпоставимо, да се D може сматрати за област једне алгебарске површине и да је C једина међа области D (дакле, да се на другим местима D шири неограничено). У D нека је

[1] У последња два обрасца спада и у уводу поменути развитак логаритма, као и развитци посматрани у моме раду: Један начин аналитичког изражавања мултиформних функција (CXXX. Глас Срп. Краљ. Академије).

$f(Z)$ холоморфна, изузев у тачкама грањања, где је континуирана. Из D настаје потпуна алгебарска површина S', ако област D попунимо једним равним листом, који се надовезује на D дуж кружне линије C и одатле се једнолико распростире у бескрајност.

Према ставу V' постоји низ алгебарских функција исте површине S', континуираних у D и које конвергирају у унутрашњости те области униформно функцији $f(Z)$. Пређимо на формирање једног таквог низа у облику бескрајног реда.

Означимо са $\alpha(Z,U)$ једну алгебарску функцију површине S', и то с обзиром на обе променљиве, а која има пол првог реда, остатка $=1$ по Z у $Z=U$, док се евентуални остали полови налазе скупљени у некој тачки $Z=Z_0$, која се налази у D; за $z=\infty$, нека $\alpha(Z,U)$ тежи на свим листовима нули, бар као $\frac{1}{z^2}$.

Претпоставимо да је Z у D. Рачун остатака примењен на функцију $f(U)\alpha(Z,U)$ даје нам:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(U)\,\alpha(Z,U)\,dU - f(Z) + c = 0\,, \tag{25}$$

где је c константа која долази од пола у Z_0.

Када је U изван D, $\alpha(Z,U)$ је униформна функција од U те, ако засебним знаком обележимо ону детерминацију коју у тој области променљиве U има $\alpha(Z,U)$ можемо место U писати u. Пишимо дакле, место $\alpha(Z,U)$ тада, $\bar{\alpha}(Z,u)$. Ако још и вредности $f(U)$ за U на C обележимо са $\bar{f}(u)$, образац (25) гласи:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \bar{f}(u)\,\bar{\alpha}(Z,u)\,du - f(Z) + c = 0\,. \tag{26}$$

Означимо у равни средиште круга C са a. Пошто је $\bar{\alpha}(Z,u)$ за u изван D холоморфна, то ју можемо развити у Laurent-ов ред. Ако обележимо,

$$\frac{\partial^\nu}{\partial t^\nu}\left[\bar{\alpha}\left(Z, a+\frac{1}{t}\right)\right]\Bigg|_{t=0} = \alpha_\nu(Z)\,, \tag{27}$$

Laurent-ов развитак гласи:

$$\bar{\alpha}(Z,u) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\,\alpha_\nu(Z)\,\frac{1}{(u-a)^\nu}\,. \tag{28}$$

Из (26) и (28) добијамо,

$$f(Z) = c + \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu(Z) \frac{1}{2\pi i \nu!} \int_C \frac{\bar{f}(u)\,du}{(u-a)^\nu}, \tag{29}$$

па ако обележимо

$$\frac{1}{2\pi i \nu!} \int_C \frac{\bar{f}(u)\,du}{(u-a)^\nu} = a_\nu \qquad (\nu = 0, 1, \cdots) \tag{30}$$

добијамо тражени образац,

$$f(Z) = c + \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \alpha_\nu(Z), \tag{31}$$

који важи у унутрашњости целе области D.

Покажимо, како из претпоставке, да је D област равни, следује из (31) Taylor-ов ред. Пошто се сада Z не разликује од z, то имамо,

$$f(z) = c + \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \alpha_\nu(z). \tag{32}$$

Лако је уверити се, да је најпростија функција $\alpha(z, u)$,

$$\alpha(z, u) = \frac{1}{u-z} - \frac{1}{u-z_0}. \tag{33}$$

Образац (27) даје:

$$\alpha_0(Z) = \alpha_1(Z) = 0; \quad \alpha_\nu(Z) = \nu!\,[(z-a)^{\nu-1} - (z_0-a)^{\nu-1}], \qquad (\nu = 1, 2, \cdots) \tag{34}$$

па ако ставимо

$$c - \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu!\, a_\nu (z_0 - a)^{\nu-1} = c_0 \tag{35}$$

и

$$\nu!\, a_\nu = c_{\nu-1} \qquad (\nu = 2, 3, \cdots), \tag{36}$$

добијамо Taylor-ов развитак,

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (z-a)^\nu. \tag{37}$$

Узмимо још један пример за развитак (31). Посматрајмо Riemann-ову површину са два листа, Λ_1 и Λ_2 и са две тачке гранања, $z = +1$ и $z = -1$. C нека је круг описан на Λ_1 око $z = 0$ полупречником > 1. D је тада област са унутрашње стране од C, те обухвата и цели лист Λ_2. За $\alpha(z, u)$ налазимо,

$$\alpha(z, u) = \frac{1}{u+1}\left[\frac{1}{1-\sqrt{\frac{(z+1)(u-1)}{(z-1)(u+1)}}} - \frac{1}{1-\sqrt{\frac{(z_0+1)(u-1)}{(z_0-1)(u+1)}}}\right], \tag{38}$$

одатле рачуном добијамо,

$$\alpha_\nu(z) = h_\nu + \sum_{\mu=0}^{\nu} k_{\nu,\mu} \frac{\sqrt{z-1}\cdot\sqrt{z+1}^{\mu}}{(\sqrt{z-1}-\sqrt{z+1})^{\mu+1}}, \tag{39}$$

где су h_ν и $k_{\nu,\mu}$ одређене константе. Тако, за (31) добијамо развитак облика,

$$f(z) = c + k + \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \sum_{\mu=0}^{\nu} k_{\nu,\mu} \frac{\sqrt{z-1}\cdot\sqrt{z+1}^{\mu}}{(\sqrt{z-1}-\sqrt{z+1})^{\mu+1}}. \tag{40}$$

Ту су, c и a_ν константе зависне од функције $f(z)$, а не од облика области D; k и $k_{\nu,\mu}$ су напротив константе, само зависне од D.

3. Пример испитивања функције претстављене датим низом.

Овај пример може служити као илустрација другог проблема споменутог на почетку овог одељка и односи се на испитивање функције претстављене границом датог низа алгебарских функција следећег, сасвим елементарног облика:

$$f(Z) = \mathop{\mathrm{L}}_{n\to\infty} \sum_{\nu=m}^{M} a_{n,\nu} Z^{\frac{\nu}{n}}, \tag{41}$$

где су m и M два, ма каква цела броја, $m \leqslant M$. Као специјалан случај ове границе имамо познати, у Уводу поменути развитак логаритма.

Ако ставимо $z = \rho e^{\theta i}$, имамо $z^{\frac{\nu}{n}} = \rho^{\frac{\nu}{n}} e^{\frac{\nu}{n}(\theta + 2k_n\pi)i}$, те у обрасцу (41) можемо место Z писати z, ако запамтимо да код разних n, међусобно одговарају детерминације са једнаким k_n.

Можемо увек претпоставити да је $m = 0$, јер ако у (41), из збира излучимо $z^{\frac{m}{n}}$, пошто та количина т. ј. $\rho^{\frac{m}{n}} e^{\frac{m}{n}(\theta + 2k\pi)i}$ $(k_n = k)$ за $n = \infty$ тежи јединици, имамо, са нешто измењеним словима

$$f(z) = \mathop{\mathrm{L}}_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{M} a_{n,\nu} z^{\frac{\nu}{n}}. \tag{42}$$

За збирове у (42) поставимо следећи идентитет:

$$\sum_{\nu=0}^{M} a_{n,\nu} z^{\frac{\nu}{n}} = \sum_{\lambda=0}^{M} n^{\lambda} c_{n,\lambda} (\sqrt[n]{z} - 1)^{\lambda} \qquad (n = 1, 2, \cdots). \tag{43}$$

Он захтева да буде

$$c_{n,\lambda} = \frac{1}{n^{\lambda}} \sum_{\nu=\lambda}^{M} \binom{\nu}{\lambda} a_{n,\nu}. \qquad \begin{pmatrix} n = 1, 2, \ldots \\ \lambda = 0, 1, \ldots, M. \end{pmatrix} \tag{44}$$

Из (42) и (43) следује,

$$f(z) = \sum_{\lambda=0}^{M} \lim_{n \to \infty} n^{\lambda} c_{n,\lambda} (\sqrt[n]{z} - 1)^{\lambda}, \tag{45}$$

па ако обележимо

$$\lim_{n \to \infty} c_{n,\lambda} = A_{\lambda}, \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, M) \tag{46}$$

имамо

$$f(z) = \sum_{\lambda=0}^{M} A_{\lambda} (lg\, z)^{\lambda}. \tag{47}$$

Разуме се, да се претпоставља, да границе (46) постоје (тада постоје и оне у (45)); иначе низ (42) дивергира. Дакле конвергентни развитци облика (41) конвергирају униформно на целој логаритамској површини и претстављају полиноме по $lg\, z$.

LES FONCTIONS ANALYTIQUES REPRÉSENTÉES PAR LES SUITES CONVERGENTES DE FONCTIONS ALGÉBRIQUES.

PAR MILOCH RADOÏTCHITCH

(Résumé)

Le problème de la représentation d'une fonction analytique générale par une suite convergente de fonctions spéciales, n'a jusqu'ici, à peu d'exceptions près, été étudié, que dans le cas où il s'agit de représenter dans un domaine du plan, une fonction uniforme. Cépendant, rien que du point de vue principiel, ce problème mérite d'être traité dans le cas général de fonctions multiformes. C'est ce qui fait l'objet de ce mémoire. Comme fonctions d'approximation, nous avons choisi les fonctions algébriques, qui sont les fonctions multiformes les plus simples. La convergence a lieu dans un domaine quelconque d'une surface de Riemann. Puisque généralement, ce domaine ne peut être conçu comme domaine d'une surface algébrique, il était nécessaire de définir au début du premier chapitre, une manière, dont une suite de surfaces algébriques tendait vers ce domaine:

Définition. Soit D un domaine ouvert d'une surface de Riemann. Nous dirons qu'une suite de surfaces algébriques $S_n (n = 1, 2, \cdots)$ *contient à la limite* le domaine D si, pour n'importe-quel domaine fermé Δ (qu'on peut considérer comme domaine d'une surface algébrique) contenu dans D, il existe un nombre N tel, que pour tout $n > N$, nous pouvons considérer Δ comme domaine de S_n.

Ainsi, notre théorème principal s'énonce de la façon suivante:

Théorème I. *Soit $f(Z)$*[1] *une fonction analytique, D un domaine ouvert de sa surface de Riemann, où $f(Z)$ est holo-*

[1] z désignant la variable du plan imaginaire, Z désigne la même variable envisagée comme point de la surface de Riemann considérée.

morphe, sauf au plus aux points de ramification algébriques, situés dans D et où elle est supposée continue; soit D' un domaine ouvert qui contient D.

Quelque-soit la suite de surfaces algébriques $S_n(n=1,2,\cdots)$ qui contient à la limite le domaine D', il existe toujours une suite de fonctions algébriques $f_n(Z)(n=1,2,\cdots)$ dont les surfaces sont $S_n(n=1,2,\cdots)$ et qui convergent uniformément dans l'intérieur de D vers $f(Z)$.

Ensuite, ajoutant au théorème I le choix libre de pôles des fonctions $f_n(Z)$, nous obtenons le théorème suivant:

Théorème I'. *Soit $f(Z)$ une fonction analytique, D un domaine ouvert de sa surface de Riemann, où $f(Z)$ est holomorphe, sauf au plus aux points de ramification algébriques, situés dans D et où elle est supposée continue; soit D' un domaine ouvert qui contient D; désignons par S_n $(n=1,2,\cdots)$ des surfaces de Riemann, contenant à la limite le domaine D'; soient enfin $\Delta_n(n=1,2,\cdots)$ des domaines fermés contenus dans D, convergeant vers D et tels que Δ_n peut être considéré comme domaine de S_n.*

Il existe toujours une suite de fonctions algébriques $\varphi_n(Z)$ $(n=1,2,\cdots)$ dont les surfaces sont $S_n(n=1,2,\cdots)$, qui convergent uniformément dans l'intérieur de D vers $f(Z)$, chaque $\varphi_n(Z)$ n'ayant comme pôles, qu'un pôle unique dans chaque domaine complémentaire au domaine Δ_n.

Des théorèmes I et I' découlent comme conséquences immédiates, d'autres théorème plus ou moins généraux[1]. N'en citons que le suivant:

Théorème I''. *Soit $f(Z)$ une fonction analytique, uniforme et holomorphe dans un domaine ouvert D d'une surface de Riemann algébrique S', sauf au plus aux points de ramification situés dans D et où elle est supposée continue: Il existe toujours une suite de fonctions algébriques ayant pour surface, S', continues dans D et qui convergent uniformément dans l'intérieur de D vers $f(Z)$.*

Le théorème connu de M. Runge, sur l'approximation d'une fonction analytique dans un domaine plan par les fonctions rationnelles, n'est qu'un cas particulier de ce dernier.

---

[1] voir ma Note: *Sur l'approximation des fonctions analytiques multiformes par les fonctions algébriques* dans les *Comptes rendus* de l'Acad. des Sciences de Paris, t. 185, p 1007. Le théorème I du présent mémoir est un peu plus général que le théorème I de cette Note.

A la fin du premier chapitre nous étendons ces considérations à la convergence simultanée dans plusieurs domaines.

Le sécond chapitre contient quelques considérations particulières. D'abord, c'est l'exemple des fonctions uniformes sur la surface logarithmique. Puis, c'est une éspèce de développement en séries, généralisant les séries de Taylor et dont le domaine de convergence est un domaine d'une surface algébrique, limité par une circonférence. Enfin, c'est un exemple simple du problème inverse: étudier la fonction représentée par un développement donné (formule (41)).