Свом драгом другу и пријатељу Радославу Марковићу, директору за успомену од писца.
24-X-1937 г.
Београд.
Дан. Михњевић

СТРУКТУРА ПАРЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА ПРВОГ РЕДА СА ЈЕДНОМ НЕПОЗНАТОМ ФУНКЦИЈОМ

ТЕЗА

ДАНИЛА Н. МИХЊЕВИЋА

ПРИМЉЕНА ЗА ДОКТОРСКИ ИСПИТ НА СЕДНИЦИ ФИЛОЗОФСКОГ ФАКУЛТЕТА УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ
12 ДЕЦЕМБРА 1933.

ПРЕМА РЕФЕРАТУ ЧЛАНОВА ИСПИТНЕ КОМИСИЈЕ:

Г. Др МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА,
редовног професора Универзитета.

Г. Др НИКОЛЕ САЛТИКОВА,
редовног професора Универзитета.

Г. Др ТАДИЈЕ ПЕЈОВИЋА,
ванредног професора Универзитета.

БЕОГРАД
1935
Штампарија „Слово", Немањина 20

Структура парцијалних једначина првог реда са једном непознатом функцијом

Од

ДАНИЛА МИХЊЕВИЋА.

Структура парцијалних једначина првог реда са једном непознатом функцијом.

ПРЕДГОВОР.

Као што је познато, теорија парцијалних једначина првог реда поникла је од оних специјалних облика тих једначина, које су интегралили Даламбер и Ајлер.

Касније Лагранж је први систематизирао различите Ајлерове примере и груписао их је, поред линеарних једначина, у једанаест различитих облика *). Затим Шарпи **) је пронашао неколико специјалних облика опште парцијалне једначине првог реда са једном непознатом функцијом двеју независно промењљивих, које се могу проинтегралити.

После овога створила се радовима низа математичара општа теорија парцијалних једначина једне непознате функције од више независно промењљивих.

Али заједно с тим су се ставила и обрнута питања. Наиме, тражиле су се и такве парцијалне једначине које би претстављале услове одређене извесним облицима геометријског или аналитичког проблема.

У поменута обрнута питања може се убројити и низ проблема постављених од Монжа и С. Ли-а. Дарбу и Гурса, пак, су тражили оне површине, које ће имати геодезичке линије одређене интегралима специјалног облика. Н. Салтиков саставио је општи облик свих парцијалних једначина, које допуштају интеграле С. Ли-а задате одређене класе ***).

---

*) *N. Saltykow.* Méthodes classiques d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris, 1931. Chap I, p. 4—8.

**) *N. Saltykow.* Etude bibliographique sur le Mémoire inedit de Charpit (Bull. des sciences math. 1930).

***) v. *) Chapitre V pp. 51—53.

Циљ овога рада је решавање општег задатка о изналажењу општег облика свих парцијалних једначина првог реда са једном непознатом функцијом, које ће допуштати између својих интеграла карактеристика унапред задате функције.

Напомињемо да су извесни резултати добивени у овом раду били делимично објављени у Comtes-rendus Париске Академије Наука у седници од 23 октобра 1933 г. У CLXV Гласу Српске Краљевске Академије и у њеном Bulletin-у № 2; а такође су саопштени у Руском Научном Институту у седници математичко-техничког отсека 28-XII-1934 год.

Октобар 1935
Крагујевац.

СТРУКТУРА ПАРЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА СА ЈЕДНОМ НЕПОЗНАТОМ ФУНКЦИЈОМ.

Од

ДАНИЛА МИХЊЕВИЋА.

Глава I.

Функционалне групе парног броја канонских променљивих количина.

§ 1. *Дефиниције.*

Пре шездесет година Sophus Lie је радио на теорији функционалних група, проширујући Jacobi-јев и Bertrand-ов начин за испитивање интеграла површина у задатку трију тела [1]).

Модерне методе интеграљења парцијалних једначина [2]) захтевају данас да се S. Lie-јева теорија допуни са извесним ставовима.

Нека имамо r различитих функција:

$$f_1, f_2, \ldots, f_r, \quad r \leq 2n, \tag{1}$$

---

[1]) *N. Saltykow.* Méthodes classiques d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris. Gauthier Villars 1931, n⁰ 14, 15.

[2]) *N. Saltykow.* Méthodes modernes d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris. Gauthier Villars. 1934.

N. Saltykow. Etude sur l'évolution des méthodes moderues d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris Bruxelles Gauthier Villars 1934.

$2n$ промењљивих количина:

$$x_1,\ x_2, \ldots, x_n,\quad p_1,\ p_2, \ldots p_n, \tag{2}$$

где промењљиве x_i, p_i означавају канонске промењљиве количине прве односно друге класе.

У овом раду ми ћемо увек претпостављати да све функције, са којима имамо посла, претстављају холоморфне или регуларне функције у извесној посматраној области промењљивих количина око њихових почетних вредности.

Претпоставимо да функције (1) чине функционалну групу и формирајмо од њих m различитих функција облика:

$$\Phi_1(f_1, f_2, \ldots, f_r),\quad \Phi_2, \ldots, \Phi_m,\quad m<r, \tag{3}$$

где Φ_i зависе само од промењљивих (1).

Функције (3) звaћемо *изузетне* (ausgezeichnete, distinguée), ако се задовољавају услови да се функције (3) налазе у инволуцији како међу собом тако и са сваком од функција (1).

§ 2. *Гранични број чланова у инволуцији.*

Полазећи из теорије интеграљења парцијалних једначина Fr. Engel [3]) доказује став о максималном броју чланова једне групе у инволуцији.

Дајемо на првом месту следећи непосреднији и ригорознији доказ ове веома важне теореме:

Свака функционална група (1) промењљивих (2) не може имати више од n различитих чланова у инволуцији.

Заиста, да би смо доказали теорему, претпоставимо обрнуто т. ј. да посматрана група (1) садржи у себи $n+1$ различитих чланова у инволуцији и то:

$$f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}. \tag{4}$$

Функције (4) различите су међу собом, према томе може се, без икаквог ограничења општости расуђивања, претпо-

[3]) Theorie der Transformationsgruppen II Absch. unter Mitwirkung von prof. Fr. Engel bearbeitet von Sophus Lie. Leipzig 1890. S. 185.

ставити да су оне различите, на пример, односно $n+1$ следећих променљивих:

$$p_1, p_2, \ldots, p_n, x_n;$$

што повлачи за собом, као што је то добро познато, неједнакост нули следеће функционалне детерминанте:

$$\Delta \equiv D\left(\frac{f_1, f_2, \ldots, f_n, f_{n+1}}{p_1, p_2, \ldots, p_n, x_n}\right) \gtrless 0. \qquad (5)$$

Број *различитих* услова инволуције између $n+1$ функција (4) једнак је $\frac{n}{2}(n+1)$.

Напишимо ове услове на следећи начин:

$$(f_i, f_k) \equiv \Delta^{i,k}_{p_1,x_1} + \Delta^{i,k}_{p_2,x_2} + \ldots + \Delta^{i,k}_{p_n, x_n} \equiv 0, \; i,k = 1,2,\ldots,n, \; n+1 \quad (6)$$

где је краткоће ради обележено:

$$\Delta^{i,k}_{p_j, x_j} \equiv D\left(\frac{f_i, f_k}{p_j, x_j}\right).$$

Према томе, последњи чланови левих страна идентичности (6) т. ј.

$$\Delta^{i,k}_{p_n, x_n}, \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n, \quad n+1), \qquad (7)$$

претстављају $\frac{n}{2}(n+1)$ различитих детерминаната другог реда, које се могу образовати из две последње колоне детермннанте (5).

Обележимо сад са:

$$\Delta^{i,k}_{p_1,p_2,\ldots,p_{n-1}} \equiv \Delta^{1,2,\ldots, i-1, i+1, k-1, k+1,\ldots,n, n+1}_{p_1,p_2,\ldots, p_{n-1}}, \qquad (8)$$
$$(i, k = 1, 2,\ldots, n, n+1)$$

$\frac{n}{2}(n+1)$ минора детерминанте (5), који одговарају кофакторима (7).

Пошто сви минори (5) не могу бити истовремено једнаки нули, јер би то повлачило за собом једнакост нули саме детерминанте (5), то множимо сваку од идентичности (6) са оним од минора (8), који одговара кофактору (7) и на тај начин добијамо идентичности:

$$\Delta^{i,k}_{p_1,p_2,\ldots,p_{n-1}}\,\Delta^{i,k}_{p_1,x_1}+\Delta^{i,k}_{p_1,p_2,\ldots,p_{n-1}}\,\Delta^{i,k}_{p_2,x_2}+\ldots+\Delta^{i,k}_{p_1,p_2,\ldots,p_{n-1}}\,\Delta^{i,k}_{p_n,x_n}\equiv 0 \tag{9}$$

$$i,\ \kappa=1,\ 2,\ldots,n,\ n+1.$$

Ако сад саберемо све $\frac{n}{2}(n+1)$ од идентичности (9), имаћемо онда, према познатој теореми Laplace-а за развијање детерминаната по производима њезиних минора [4]), следећу идентичност:

$$D\begin{pmatrix} f_1, f_2,\ldots, f_{n-1}, f_n\ , f_{n+1} \\ p_1, p_2,\ldots, p_{n-1}, p_1, x_1 \end{pmatrix}+D\begin{pmatrix} f_1, f_2,\ldots, f_{n-1}, f_n\ , f_{n+1} \\ p_1, p_2,\ldots, p_{n-1}, p_2, x_2 \end{pmatrix}+\ldots$$

$$\ldots+D\begin{pmatrix} f_1, f_2,\ldots, f_{n-1}, f_n\ , f_{n+1} \\ p_1, p_2,\ldots, p_{n-1}, p_n\ , x_n \end{pmatrix}\equiv 0. \tag{10}$$

Но првих $n-1$ чланова идентичности (10) ниште се очевидно, јер су то детерминанте са по две једнаке колоне елемената.

Према томе се (10) своди само на идентичност:

$$\Delta\equiv D\begin{pmatrix} f_1, f_2, \ldots, f_n\ , f_{n+1} \\ p_1, p_2, \ldots, p_n\ , x_n \end{pmatrix}\equiv 0.$$

Пошто се овај резултат коси са претпоставком (5), то је немогуће претпоставити да функционална група (1) може садржати у себи $n+1$ различих чланова у инволуцији.

Према томе је доказано да у једној функционалној групи (1) променљивих (2) никад не може бити више од n различитих функција у инволуцији.

§ 3. *Максималан број изузетних функција.*

S. Lie говорећи о броју *изузетних* функција наводи у једном од својих радова из 1873 г. [5]) и један став, који гласи

---

[4]) *Др. Б. Гавриловић.* Теорија детерминаната. Београд. 1899. стр. 62.

[5]) *S. Lie.* Gesammelte Abhandlungen, III B. Leipzig 1922 s. 47.

да онај ~~број изузетних функција може~~ погодити број. који је једнак реду посматране функционалне групе (1).

Бавећи се овим, S. Lie не води рачуна о броју променљивих количина (2), која околност игра важну улогу у посматраном питању.

Заиста, претпоставимо да посматрамо једну функционалну групу променљивих (2), чији је ред већи од n. На пример:

$$f_1, f_2, \ldots, f_n, f_{n+1}, \ldots, f_r, \quad r \leq 2n. \tag{11}$$

Максимални број различитих *изузетких* функција функционалне групе (11) никад не може превазићи n, то је очевидно. Јер, кад би група (11) имала више од n различих изузетних функција, она би имала, према њиховој дефиницији, више од n различитих чланова у инволуцији, што је према теореми § 2 немогуће.

Према томе, поменути став S. Lie-a има место само за функционалне групе реда мањег од n и за инволуционе групе, чији ред очевидно не може превазићи број n.

При утврђивању максималног броја различитих изузетних функција једне функционалне групе, ми ћемо посматрати следеће могућности:

a) Претпоставимо испочетка да посматрамо једну инволуциону групу реда $q \leq n$:

$$f_1, f_2, \ldots, f_q, \quad q \leq n. \tag{12}$$

Пошто сваки од чланова групе (12) задовољава дефиницију изузетних функција, то максимални број изузетних функција те групе једнак је са њеним редом q.

b) Посматрајмо сад функционалну групу реда већег од n.

У овом случају даћемо следећу теорему:

Максимални број различитих изузетних функција, које може садржати у себи једна функционална група променљивих (2):

$$f_1, f_2, \ldots, f_{n+\rho}, \quad 1 \leq \rho < n. \tag{13}$$

једнак је:

$$\mu = n - \rho,$$

т. ј. једнак је броју чланова у реципрочној групи за посматрану групу (13).

За случај $\rho = 1$, ова се теорема подудара са израчунавањима E. Goursat-a [6]).

Докажимо ову теорему помоћу ставова S. Lie-јеве теорије о такозваним поларним (реципрочним) групама.

Према дефиницији [7]), поларна се група за посматрану групу (13) одређује интеграљењем комплетног система линеарних парцијалних једначина:

$$(f_i\,, f) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n+\rho, \quad 1 < \rho \leq n. \tag{14}$$

Пошто су посматране функције (13) различите међу собом, може се претпоставити да су оне различите, на пример, по $n+\rho$ следећих промењљивих:

$$x_{n-\rho+1}\,, x_{n-\rho+2}\,, \ldots, x_n\,, p_1, p_2, \ldots, p_n\,.$$

Другим речима, увек се може претпоставити да није равна нули следећа функционална детерминанта:

$$D\left(\frac{f_1, \ldots, f_\rho, f_{\rho+1}, \ldots, f_{n+\rho}}{x_{n-\rho+1}, \ldots, x_n\,, p_1, \ldots, p_n}\right) \gtrless 0. \tag{15}$$

Због претпоставке (15), систем (14) претставља систем од $n+\rho$ *различитих* једначина, и, према томе, као што је то добро познато, има $n-\rho$ различитих решења, која ћемо обележити са:

$$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{n-\rho}. \tag{16}$$

Решења (16) одређују поларну групу. Али, према познатом ставу [8]), свака изузетна функција поларне групе (16) у исто је време и изузетна функција посматране групе (13).

Одавде следује, пошто функционална група (16) може садржати у себи највише $n-\rho$ различитих изузетних функција, то је и максимални број таквих функција, које се могу налазити у посматраној групи (13), једнак:

$$\mu = n - \rho.$$

Тиме је теорема доказана.

---

[6]) *E. Goursat.* Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris 1891, p. 313.

[7]) *S. Lie.* Gesammelte Abhandlungen, III B. Leipzig 1922, S. 37—38.

[8]) *S. Lie* ibid S. 40. Satz 4.

Из доказане теореме излазе две следеће последице:

1) Претпоставимо испочетка, да је број различитих чланова групе (13) једнак:

$$n+\rho=2n-1, \quad \rho=n-1.$$

Тада ће, према претходном, таква *функционална група $2n-1$ реда имати само једну изузетну функцију.*

2) Претпоставимо затим, да је број различитих чланова групе (13) једнак:

$$n+\rho=2n, \quad \rho=n.$$

Тада ће број изузетних функција изнети:

$$\mu=n-n=0.$$

Према томе, ниједна функционална група $2n$-ог реда промењљивих (2) нема изузетну функцију,

Функционалну групу $2n$-ог реда промењљивих (2) зваћемо у будуће *банална* група.

Глава II.

Потпуни број интеграла.

§ 4. *Довољни и потребни услови за изналажење карактеристичке функције.*

Jacobi je у свом чувеном мемоару [9]) показао како се може саставити један систем од m обичних диференцијалних једначина онда, кад је дато m различитих партикуларних интеграла тог система. Да применимо овај задатак на обичне канонске и одговарајуће им парцијалне једначине.

Посматрајмо $2n-1$ различитих функција:

$$f_1, f_2, \ldots, f_{2n-1} \tag{1}$$

од $2n$ променљивих количина:

$$x_1,\ x_2, \ldots ,\ x_n\ ,\ p_1,\ p_2, \ldots ,\ p_n\ , \tag{2}$$

где је x_i и p_i означавају *канонске* независне променљиве прве односно друге класе.

Уочимо један систем обичних генералисаних канонских једначина са карактеристичком функцијом F:

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial F}{\partial p_1}} = \ldots = \frac{dx_n}{\frac{\partial F}{\partial p_n}} = \frac{-dp_1}{\frac{\partial F}{\partial x_1}} = \ldots = \frac{-dp_n}{\frac{\partial F}{\partial x^n}} \tag{3}$$

---

[9]) Dilucidationes de Aequationum Differentialium Vulgarium Systematis Aerumque Connexione cum Aequationibus Partialibus primi Ordinis (Gesammelte Werke, Bd. IV, s. 188—189 § 9/II).

Н. Н. Салтыковъ. Объ интегрированіи уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи. Харьковъ 1899 г. стр. 22.

Сад се постављају питања: 1) Под којима ће условима дате функције (1) одредити интеграле система (3), и 2) како се може пронаћи карактеристичка функција F по датим функцијама (1).

По смислу постављеног задатка, свака се од датих функција (1) мора налазити у инволуцији са траженом карактеристичком функцијом F. Што значи да карактеристичка функција F мора бити општи интеграл $2n-1$ следећих различитих линеарних парцијалних једначина:

$$(f_i, f) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 2n-1. \tag{4}$$

Систем (4) може бити затворен или отворен.

Лако је утврдити случајеве, када ће систем (4) бити затворен и према томе моћи ће се пронаћи тражена карактеристичка функција F.

Систем (4) биће затворен, очевидно, онда, кад су функције (1) дате у канонском облику интеграла.

Наиме, нека функције (1) имају следећи облик:

$$\left.\begin{array}{l} H(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n); \quad \varphi_i(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_r); \\ \psi_i(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n); \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \end{array}\right\} \tag{5}$$

при чему су задовољени такозвани канонски услови и то:

$$(H, \varphi_i) \equiv 0; \; (H, \psi_i) \equiv 0; \; (\varphi_i, \varphi_k) \equiv 0; \; (\psi_i, \psi_k) \equiv 0; \; (\varphi_i, \psi_k) = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \gtrless k \end{cases}$$

$$i, k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Тада ће тражена функција F имати облик:

$$F \equiv \Psi(H),$$

где је Ψ једна произвољна функција.

Заиста, због горе наведених канонских услова постоје онда идентичности:

$$(F, \varphi_i) \equiv \frac{\partial \psi}{\partial H}(H, \varphi_i) \equiv 0; \quad (F, \psi_i) \equiv \frac{\partial \psi}{\partial H}(H, \psi_i) \equiv 0; \; i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Према томе можемо извести следећи закључак:

Ако $2n-1$ функција (1) променљивих (2) сачињавају један канонички систем интеграла (5), онда ће тражена карактеристичка функција бити једна произвољна функција *онога од интеграла (5), који се налази у инволуцији са свима осталим интегралама.*

Нека је, на пример, потребно саставити парцијалну једначину првог реда:

$$F(x_1,\ x_2,\ x_3,\ p_1,\ p_2,\ p_3)=0,$$

за коју ће поменути систем интеграла линеарне парцијалне једначине карактеристика гласити:

$$H\equiv p_1+x_2(p+p_3);\ \ \varphi_1\equiv p_1;\ \ \varphi_2\equiv p_3;\ \ \psi_1\equiv x_1-\frac{1}{p_2+p_3};\ \psi_2\equiv x_3-x_2.$$

Пошто дате функције задовољавају канонске услове, то ће тражена карактеристичка функција имати следећи облик:

$$F\equiv\Psi[p_1+x_2(p_2+p_3)],$$

где је Ψ произвољна функција.

Претпоставимо сад да дате функције (1) чине једну функционалну групу. Тада, како је то добро познато, систем (4) је затворен, те се тражена карактеристичка функција F одређује, у овом случају, интеграљењем тог система.

Као што смо видели, постављено питање о изналажењу карактеристичке функције, или, што је исто, о састављању парцијалних једначина првог реда, решава се веома лако, ако задати систем функција (1) задовољава горе наведене услове.

Други од ових услова је генералнији него први и заједно са тиме је *довољан* за то да би се могла саставити тражена парцијална једначина.

Заједно са тиме јавља се питање, да ли постоје још који други услови, када је постављени задатак могућ.

Веома сам захвалан професору Н. Салтикову, који је скренуо моју пажњу на ту околност, да услов, да би задате функције (1) образовали функционалну групу, је не само *довољан* већ и *потребан* услов за то да би се могла израчунати тражена карактеристичка функција F.

За то докажимо сад ову теорему:

Да би функције (1) одређивале потпуни систем интеграла карактеристика, за то је потребно и довољно да оне чине једну функционалну групу.

Заиста, претпоставимо да је F карактеристичка функција за посматране функције (1), онда су ове функције, очевидно, интеграли следеће линеарне једначине:

$$(F, f) = 0 \tag{6}$$

па сачињавају за њу потпуни број интеграла.

Према томе и заграде Пуасона за свака два од ових интеграла дају опет интеграл парцијалне једначине (6), а то значи да функције (1) морају сачињавати једну функционалну групу.

Обрнуто, ако функције (1) чине функционалну групу, онда је, према горе доказаном, увек могуће одредити карактеристичку функцију те групе.

Према томе је формулисана теорема доказана.

Једначина (6) доводи до следећег веома важног закључка. Наиме, једначина (6) осим $2n—1$ интеграла (1) има још и очевидни интеграл F. Али, пошто једначина (6) не може имати више од $2n—1$ различитих интеграла, то одавде следује да је очевидни интеграл F једна функција датих интеграла (1).

Пошто се F налази у инволуцији са свима функцијама групе (1), *то је она изузетна функција за ову групу.*

Из напред изложеног излази овај закључак.

Чим је дато $2n—1$ различитих функција (1) $2n$ независно промењивих количина (2), па се тражи карактеристичка функција F, прво потребно је да видимо да ли функције (1) чине функционалну групу.

Ако овај услов није задовољан, онда не постоји тражена функција F. Али, ако функције (1) чине функционалну групу, то се тражена карактеристичка функција одређује интеграљењем комплетног система $2n—1$ линеарних једначина (4), или, што је исто, само једне одговарајуће једначине у тоталним диференцијалима.

§ 5. *Изналажење карактеристичке функције.*

Претпоставимо сад да задате функције (1) чине функционалну групу. У таквом случају систем (4) претставља затворени систем $2n—1$ различитих парцијалних једначина са $2n$ промењивих (2) и према томе има *само једно* решење.

Али, према § 4, ово ће се решења поклапати са изузетном функцијом групе $2n-1$-ог реда (1).

Према томе се изналажење карактеристичке функције F може у посматраном случају свести на изналажене изузетне функције функционалне групе (1).

Као што је то добро познато[10]), ова се изузетна функција налази интеграљењем следећег комплетног система $2n-2$ парцијалних једначина:

$$(f_1, f) \equiv (f_1, f_2)\frac{\partial f}{\partial f_2} + (f_1, f_3)\frac{\partial f}{\partial f_3} + \; . \; . \; . + (f_1, f_{2n-1})\frac{\partial f}{\partial f_{2n-1}} = 0,$$

$$(f_2, f) \equiv (f_2, f_1)\frac{\partial f}{\partial f_1} + (f_2, f_3)\frac{\partial f}{\partial f_3} + \; . \; . \; . + (f_2, f_{2n-1})\frac{\partial f}{\partial f_{2n-1}} = 0,$$

. . . .

$$(f_{2n-1}, f) \equiv (f_{2n-1}, f_1)\frac{\partial f}{\partial f_1} + (f_{2n-2}, f_2)\frac{\partial f}{\partial f_2} + \ldots + (f_{2n-2}, f_{2n-1})\frac{\partial f}{\partial f_{2n-1}} = 0$$

или њима одговарајуће само једне једначине у тоталним диференцијалима.

Нека је интеграл те једначине:

$$\Phi = C,$$

где је C произвољна константа.

Тада ће се тражена карактеристичка функција добити у облику:

$$F \equiv \psi(\Phi),$$

где је ψ произвољна функција.

Узмимо на пример систем пет следећих различитих функција:

$$3x_1p_1 - p_1p_2p_3; \quad 3x_2p_2 - p_1p_2p_3; \quad 3x_3p_3 - p_1p_2p_4; \quad \frac{p_2}{p_1}; \quad \frac{p_3}{p_1},$$

које очевидно сачињавају функционалну групу.

Лако је израчунати њену изузетну функцију, и то:

$$x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 - p_1p_2p_3.$$

---

[10]) *S. Lie*, Gesammelte Abhandlungen T. IV Zw. Abt. S. 42.
N. Saltykow. Sur la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction inconnue. Paris 1925 p. 100.

Према ~~томе ће тражена карактеристична~~ функција имати облик:

$$F \equiv \psi(x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 - p_1 p_2 p_3),$$

где је ψ произвољна функција.

§ 6. *Непосредни доказ једне теореме из теорије функционалних група.*

У § 3 доказана је теорема да једна функционална група $2n-1$ реда променљивих (2) увек има једну и само једну изузетну фунцију.

Ова теорема доказана је помоћу теорије поларних група.

Даћемо сад други непосредни доказ исте теореме.

Као што је то познато[11]), група (1) имаће једну и само једну изузетну функцију онда, кад у детерминати те групе:

$$\begin{vmatrix} 0 & (f_1, f_2) & \dots & (f_1, f_{2n-1}) \\ (f_2, f_1) & 0 & \dots & (f_2, f_{2n-1}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (f_{2n-1}, f_1) & (f_{2n-1}, f_2) & \dots & 0 \end{vmatrix} \tag{7}$$

која је идентички једнака нули, постојаће бар један први минор, различити од нуле.

Функције (1) различите су међу собом. Без икаквог ограничења општости разсуђивања, може се претпоставити, да се услов различитости изражава неједнакошћу нули следеће функционалне детерминанте:

$$\Delta \equiv D\left(\frac{f_1, f_2, \dots, f_n, f_{n+1}, \dots, f_{2n-1}}{p_1, p_2, \dots, p_n, x_1, \dots, x_{n-1}}\right) \gtrless 0,$$

која се још очевидно може написати у облику:

---

[11]) *N. Saitykow.* Méthodes modernes d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue. Paris, Gauthier Villars. 1934 Chap. III n⁰ 17.

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial p_1} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial p_n} & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial p_1} & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial p_n} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_{2n-1}}{\partial p_1} & \ldots & \frac{\partial f_{2n-1}}{\partial p_n} & \frac{\partial f_{2n-1}}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_{2n-1}}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial f_{2n-1}}{\partial x_n} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix} \gtrless 0. \quad (8)$$

Ако се у детерминанти (8) n последњих колона преместе на место n првих, одна се добија:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & -\frac{\partial f_1}{\partial p_1} & \ldots & -\frac{\partial f_1}{\partial p_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} & -\frac{\partial f_2}{\partial p_1} & \ldots & -\frac{\partial f_2}{\partial p_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_{2n-1}}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_{2n-1}}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial f_{2n-1}}{\partial x_n} & -\frac{\partial f_{2n-1}}{\partial p_1} & \ldots & -\frac{\partial f_{2n-1}}{\partial p_n} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix} \gtrless 0. \quad (9)$$

Множењем детерминаната (8) и (9) добија се следећа заоквирена детерминанта:

$$\Delta^2 \equiv \begin{vmatrix} 0 & (f_1, f_2) & \ldots & (f_1, f_{2n-1}) & \frac{\partial f_1}{\partial p_n} \\ (f_2, f_1) & 0 & \ldots & (f_2, f_{2n-1}) & \frac{\partial f_2}{\partial p_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (f_{2n-1}, f_1) & (f_{2n-1}, f_2) & \ldots & 0 & \frac{\partial f_{2n-1}}{\partial p_n} \\ -\frac{\partial f_1}{\partial p_n} & -\frac{\partial f_2}{\partial p_n} & \ldots & -\frac{\partial f_{2n-1}}{\partial p_n} & 0 \end{vmatrix} \gtrless 0. \quad (10)$$

Ако детерминанту (10) развијемо по елементима последње врсте и колоне, добијемо према познатој формули Cauchy-ja[12]) неједнакост:

$$\Delta^2 \equiv \sum_{i,k} \frac{\partial f_i}{\partial p_n} \frac{\partial f_k}{\partial p_n} \cdot B_{ik} \gtrless 0, \tag{11}$$

где B_{ik} означавају баш све прве миноре детерминанте (7).

Пошто сума (11), по претпоставци, није једнака нули, то је очевидно да све вредности B_{ik} не могу бити истовремено једнаки нули.

Према томе у детерминанти (7) постоји барем један први минор различит од нуле. А то значи да посматрана функционална група (1) садржи у себи само једну изузетну функцију.

---

[12]) *Др. Б. Гавриловић.* Теорија детерминаната. Београд 1899 стр. 69.

Глава III.

Непотпуни систем интеграла карактеристика.

§ 7. *Један задати интеграл.*

Претпоставимо да је дата свега једна функција f_1 од $2n$ променљивих:

$$x_1,\ x_2,\dots,x_n\ ,\ p_1,\dots,p_n\ . \qquad (1)$$

Задатак изналажења карактеристичке функције F своди се, очевидно, у овом случају на одређивање општег интеграла следеће линеарне парцијалне једначине:

$$(f_1,\ f) \equiv \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_1}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial f_1}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\right) = 0. \qquad (2)$$

Као што је добро познато, једначина (2) осим очевидног интеграла f_1 има још $2n—2$ интеграла, које ћемо обележити са:

$$u_1,\ u_2,\dots,u_{2n-2}. \qquad (3)$$

Према томе се тражена карактеристичка функција F добија у облику:

$$F \equiv \psi(f_1,\ u_1,\ u_2,\dots,u_{2n-2}), \qquad (4)$$

где је ψ произвољна функција.

На такав начин можемо исказати следећи став:

Ако је дата само једна функција f_1 променљивих (1)' онда тражена карактеристичка функција (4) постоји увек и претставља у посматраном случају произвољну функцију од дате функције f_1 и још $2n—2$ аргумената (3), који се одређују интеграљењем парцијалне једначине (2).

Нека се траже, например, све парцијалне једначине првог реда које ће међу својим интегралима карактеристика допуштати дату функцију:

$$f_1 \equiv x_1 + p_3 p_4.$$

Пошто одговарајућа једначина (2) осим интеграла f_1 има још $2n$—2 различита решења.

$$x_3 + p_1 p_2, \; x_4 + p_1 p_3, \; x_2, \; x_5, \; x_6, \ldots, x_n, \; p_2, \; p_3, \ldots, p_n,$$

то ће тражена карактеристичка функција (4) имати облик:

$$F \equiv \psi(x_1 + p_3 p_4, \; x_1 + p_1 p_4, \; x_4 + p_1 p_3, \; x_2, \; x_5, \; x_6, \ldots, x_n, \; p_2, \; p_3, \ldots, p_n),$$

где је ψ једна произвољна функција.

§ 8. *Потпуни број интеграла у инволуцији.*

Нека је дато n различитих функција у инволуцији:

$$f_1, \; f_2, \ldots, f_n \tag{5}$$

промењљивих (1) па се тражи карактеристичка функција парцијалне једначине првог реда, која ће међу својим интегралима карактеристика допуштати n датих функција (5).

У посматраном случају тражена карактеристичка функција не може бити *различита* од задатих функција (5). И то с разлога, што према доказаном у § 2, у једној групи промењљивих (1) може бити највише n *различитих* чланова у инволуцији.

Према томе постављени задатак има само једно решење, и то:

$$F \equiv \psi(f_1, \; f_2, \ldots, f_n), \tag{6}$$

где је ψ произвољна функција.

Да решење (6) заиста одговара задатку очевидно је, јер увек, пошто се функције (5) налазе у инволуцији, постоје идентичности:

$$(f_i, F) \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \psi}{\partial f_k} (f_i, f_k) \equiv 0, \quad i = 1, \; 2, \ldots, n.$$

Према томе можемо извести следећи закључак:

Ако је задато n различитих функција у инволуцији (5) *промењљивих* (*1*), *онда тражена карактеристичка функција F постоји увек и претставља једну произвољну функцију од датих функција* (*5*).

Тако, на пример, за функције у инволуцији

$$f_1 \equiv px; \quad f_2 \equiv qy$$

карактеристичка ће функција бити:

$$F \equiv \psi(px,\ qy),$$

где је ψ произвољна функција.

§ 9. *Непотпуни број интеграла у инволуцији.*

Нека је дато $r \leq n-1$ различитих функција у инволуцији:

$$f,\ f_2, \ldots, f_r\ , \quad r \leq n-1 \tag{7}$$

промењљивих (1) па се тражи карактеристичка функција парцијалне једначине првог реда, која ће међу својим интеграмима карактеристика допуштати r датих функција (7).

Постављени задатак, како ћемо одмах видети, има два решења.

Наиме једно *партикуларно*, а друго *опште*.

Слично претходном § 8, одмах се може наћи очевидно партикуларно решење у облику произвољне функције од датих функција (6)

$$F \equiv \psi(f_1,\ f_2, \ldots, f_r\ ) = 0, \tag{8}$$

где је ψ произвољна функција.

Али, да бисмо нашли *опште* решење постављеног зазадатка, морамо интегралити систем парцијалних једначина:

$$(f_i\ ,\ f) = 0, \quad i = 1,\ 2, \ldots, r \leq n-1. \tag{9}$$

Систем (9) је нормални, јер се дате функције (7) налазе у инволуцији. Функције (7) претстављају r очевидних решења система (9). Ако се $2n-2r$ различитих решења обележе са:

$$u_1,\ u_2, \ldots, u_{2n-2r} \tag{10}$$

онда ће се тражена карактеристичка функција добити у облику:

$$F \equiv \psi(f_1, f_2, \ldots, f_r, u_1, u_2, \ldots, u_{2n-2r}),$$

где је ψ произвољна функција.

Према томе можемо извести следећи закључак:

Ако је дато $r \leq n-1$ различитих функција у инволуцији (7) променљивих (1) онда увек постоји тражена карактеристичка функција F. Ова функција претставља произвољну функцију од r оргумената (7) и још од $2n-2r$ аргумената (10), који се одређују интеграљењем нормалног система парцијалних једначина (9).

Нека су, на пример, дате две функције у инволуцији.

$$f_1 \equiv p_1 - p_2 + p_3 \quad \text{и} \quad f_2 \equiv x_1 + x_2 + x_3,$$

па се тражи одговарајућа карактеристичка функција F.

Одмах се добије *партикуларно* очевидно решење у облику:

$$F \equiv \psi(p_1 - p_2 + x_3,\ x_1 + x_2 + x_3),$$

где је ψ произвољна функција.

За изналажење општег решења потребно је интегралити систем (9), који у датом случају прима облик:

$$(f_1, \overline{f}) \equiv \frac{\partial \overline{f}}{\partial x_1} - \frac{\partial \overline{f}}{\partial p_3} = 0; \quad (f_2, \overline{f}) \equiv \frac{\partial \overline{f}}{\partial p_1} + \frac{\partial \overline{f}}{\partial p_2} + \frac{\partial \overline{f}}{\partial p_3} = 0, \tag{11}$$

где је непозната функција $\overline{f}$ зависи од шест следећих независно промењљивих количина:

$$x_1,\ f_1,\ f_2,\ p_1,\ p_2,\ p_3.$$

Лако је видети да систем (11) допушта четири следећа интеграла:

$$f_1,\ f_2,\ u_1 \equiv p_2 - p_1,\quad u_2 \equiv p_3 - p_1 + x_1.$$

Према томе ће опште решење постављеног задатка бити:

$$F \equiv \psi(p_1 - p_2 + x_3,\ x_1 + x_2 + x_3,\ p_2 - p_1,\ p_3 - p_1 + x_1) = 0, \tag{12}$$

где је ψ произвољна функција.

Лако се уверити у то да једначина (12) заиста има задате интеграле f_1 и f_2.

Заиста, f_1 и f_2 задовољавају идентичности:

$$(f_1, F) \equiv \frac{\partial \psi}{\partial f_1}(f_1, f_1) + \frac{\partial \psi}{\partial f_2}(f_1, f_2) + \frac{\partial \psi}{\partial u_1}(f_1, u_1) + \frac{\partial \psi}{\partial u_2}(f_1, u_2) \equiv 0,$$

$$(f_2, F) \equiv \frac{\partial \psi}{\partial f_1}(f_2, f_1) + \frac{\partial \psi}{\partial f_2}(f_2, f_2) + \frac{\partial \psi}{\partial u_1}(f_2, u_1) + \frac{\partial \psi}{\partial u_2}(f_2, u_2) \equiv 0.$$

§ 10. *Функционална група r интеграла* ($r < n-1$).

Нека се тражи парцијална једначина првог реда, која ће међу интегралима своје линеарне парцијалне једначине карактеристика допуштати дату функционалну групу $r < 2n-1$ реда:

$$f_1, f_2, \ldots, f_r, \quad r < 2n-1 \tag{13}$$

промењљивих (1).

Разуме се да функције (13) нису све у инволуцији.

У овом случају се може наћи, поред општег, једно очевидно партикуларно решење, када ће дата група (13) садржати изузетне функције.

Према томе, кад дата група (13) има неки број μ изузетних функција:

$$\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_\mu, \quad \mu \leq 2n-r,$$

онда ће тражена карактеристичка функција имати облик:

$$F \equiv \psi(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_\mu), \tag{14}$$

где је ψ једна произвољна функција.

Као што је то добро познато, функционална група (13) увек има бар једну изузетну функцију онда, кад је ред те групе непаран број, облика $r = 2m+1$. Али, ако је ред групе (13) паран $r = 2m$, група (13) има изузетне функције само онда, када се за њу идентички ништи детерминанта:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} 0 & (f_1, f_2) & \ldots & (f_1, f_{2m}) \\ (f_2, f_1) & 0 & \ldots & (f_2, f_{2m}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (f_{2m}, f_1) & (f_{2m}, f_2) & \ldots & 0 \end{vmatrix} \tag{15}$$

Према томе партикуларно решење (14) могуће је само у тим случајева, кад је ред дате групе (13) непаран, или, у противном случају онда, кад се идентички ништи детерминанта (15).

Међутим у посматраном случају увек је могуће саставити тражену карактеристичку функцију F.

Заиста ради тога, као што смо то видели, потребно је интегралити следећи комплетни систем r једначина:

$$(f_i\,,\ f)=0, \quad i=1, 2,..., r<2n-1, \tag{16}$$

Ако се $2n-r$ различитих решења система (16) обележе са:

$$u_1,\ u_2,...,\ u_{2n-r}, \tag{17}$$

тражена ће карактеристичка функција имати облик:

$$F\equiv\psi(u_1,\ u_2,...,\ u_{2n-r}), \tag{18}$$

где је ψ произвољна функција.

Лако је видети да канонички систем обичних диференцијалних једначина, који одговара нађеној карактеристичкој функцији (18), допушта, као своје интеграле, задате функције (13).

Заиста напишимо тај канонички систем. Наиме:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{\sum\limits_{k=1}^{2n-r}\frac{\partial\psi}{\partial u_n}\frac{\partial u_k}{\partial p_1}}=\ldots=\frac{dx_n}{\sum\limits_{k=1}^{2n-r}\frac{\partial\psi}{\partial u_k}\frac{\partial u_k}{\partial p_n}}=\frac{-dp_1}{\sum\limits_{k=1}^{2n-r}\frac{\partial\psi}{\partial u_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_1}}=\\ =\ldots=\frac{-dp_n}{\sum\limits_{k=1}^{2n-r}\frac{\partial\psi}{\partial u_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_n}}=\rho.\end{aligned} \tag{19}$$

Ако се $2n$ једначина:

$$dx_s=\rho\sum_{k=1}^{2n-r}\frac{\partial\psi}{\partial u_k}\frac{\partial u_k}{\partial p_s};\ dp_s=-\rho\sum_{k=1}^{2n-r}\frac{\partial\psi}{\partial u_n}\frac{\partial u_k}{\partial x_s},\quad s=1, 2,..., n.$$

које се добијају из система (19), помноже по реду са $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_s}$ односно са $\dfrac{\partial f_i}{\partial p_s}$, па се резултати саберу, добија се:

$$df_i = \rho \sum_{k=1}^{2n-r} \frac{\partial \psi}{\partial u_k} (u_k, f_i), \quad i = 1, 2, \ldots, r.$$

Са друге пак стране постоје идентичности:

$$(f_i, u_k) \equiv 0; \quad i = 1, 2, \ldots, r; \quad k = 1, 2, \ldots, 2n-r,$$

јер су аргументи (17) интеграли система (16).

На такав начин за сваку од функција (13) добијамо из каноничког система (19) идентичност:

$$df_i \equiv 0; \quad i = 1, 2, \ldots, r,$$

која и показује да су функције (13) заиста интеграли тог система.

Према томе можемо извести следећи закључак:

Ако је дато $r < 2n-1$ различитих функција (13) промењљивих (1) које чине функционалну групу, тражена карактеристичка функција постоји увек и претставља једну произвољну функцију $2n-r$ аргумената (17), који се одређују интеграљењем затвореног система r линеарних парцијалних једначина (16).

§ 11. *Интеграли који не чине функционалну групу.*

Нека је дато $r < 2n-1$ различитих функција промењљивих (1):

$$f_1, f_2, \ldots, f_r, \quad r < 2n-1, \tag{20}$$

које не чине функционалну групу, па се тражи карактеристичка функција парцијалне једначине првог реда, која ће међу интегралима своје линеарне парцијалне једначине карактеристика допуштати функције (20).

Претпоставимо најпре да дате функције (20) могу произвести једну функционалну групу реда: $r + \rho \leq 2n-1$:

$$f_1, f_2, \ldots, f_r, f_{r+1}, \ldots, f_{r+\rho}; \quad \rho + r \leq 2n-1. \tag{21}$$

Тада ће, према претходном § 10, састављена карактеристичка функција за групу (21), допуштати међу интегралима своје линеарне парцијалне једначине карактеристика и r датих функција (20).

Претпоставимо сад да функције (20) производе једну *баналну* функционалну групу $2n$ реда

$$f_1, f_2, .., f_{2n} \tag{22}$$

Тада за функције (22) не постоји карактеристичке функције, а према томе је непостоји ни за дате функције (20).

Заиста, као што смо то видели, изналажење карактеристичке функције захтева интеграљење затвореног система парцијалних једначина:

$$(f_i, f) = 0; \quad i = 1, 2, ..., 2n. \tag{23}$$

Због различитости функција (22), систем (23) претставља један систем од $2n$ различитих линеарних хомогених једначина, који нема решења осим баналног решења у облику једне произвољне константе.

Према томе можемо извести следећи закључак:

Ако $r < 2n-1$ различитих функција (20) производе једну функционалну групу $r+\rho \leq 2n-1$, онда је овај услов не само п о т р е б а н већ је и д о в о љ а н за постојање тражене карактеристичке функције F, која претставља онда једну произвољну функцију $2n-r-\rho$ аргумената, који се одређују интеграљењем затвореног система линеарних парцијалних једначина:

$$(f_i, f) = 0; \quad i = 1, 2, ..., r+\rho. \tag{24}$$

Али, ако функције (20) производе једну баналну функционалну групу (22), онда за њих не постоји ниједна карактеристичка функција F.

Тако, на пример, за функције:

$$f_1 \equiv p_1^2 + p_2^2 \quad \text{и} \quad f_2 \equiv x_1^2 + x_2^2,$$

које не чине функционалну групу, могуће је израчунати карактеристичку функцију. Јер дате функције заједно са функцијом:

$$(f_1, f_2) \equiv f_3 \equiv 2(p_1x_1 + p_2x_2)$$

чине функционалну групу трећег реда.

Тражена се карактеристичка функција, у овом случају, лако добија у облику:

$$F \equiv \psi(x_1p_2 - x_2p_1),$$

где је ψ произвољна функција.

На против две функције:

$$f_1 \equiv p_1^3 + p_2^3 \quad \text{и} \quad f_2 \equiv x_1^3 + x_2^3,$$

пошто производе само једну баналну функционалну групу не могу бити интеграли никакве парцијалне једначине првог реда.

§ 12. *Банална подгрупа интеграла.*

Да завршимо ову главу са следећим ставом:

Ако r различитих функција (20) производе једну функционалну групу $r+\rho \leq 2n-1$ реда (21), у којој се налази банална подгрупа m различитих функција:

$$f_k(x_1, x_2, \ldots, x_\alpha, p_1, p_2, \ldots, p_\beta), \; k = 1, 2, \ldots, m; \; \alpha+\beta = m \tag{25}$$

онда тражена карактеристичка функција F, не зависи од коњугираних независно променљивих:

$$x_1, x_2, \ldots, x_\beta, p_1, p_2, \ldots, p_\alpha. \tag{26}$$

Заиста, ради доказа узмимо само оне од једначина (24), које одговарају функцијама (25). Наиме:

$$\begin{gathered}(f_k, f) \equiv \sum_{h=1}^{\beta} \frac{\partial f_k}{\partial p_h} \frac{\partial f}{\partial x_h} - \sum_{s=1}^{\alpha} \frac{\partial f_k}{\partial x_s} \frac{\partial f}{\partial p_s} = 0 \\ k = 1, 2, \ldots, m; \quad \alpha+\beta = m.\end{gathered} \tag{27}$$

Функције (25) различите су међу собом; ово значи да није једнака нули следећа функционална детерминанта:

$$D\left(\frac{f_1, \ldots, f_\alpha, f_{\alpha+1}, \ldots, f_m}{x_1, \ldots, x_\alpha, p_1, \ldots, p_\beta}\right) \gtrless 0.$$

Али тада ће систем (27), као систем од m сагласних хомогених једначина са m променљивих: $\dfrac{\partial f}{\partial x_h}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial p_s}$, имати само једно решење и то:

$$\frac{\partial f}{\partial x_h}=0; \quad \frac{\partial f}{\partial p_s}=0; \quad h=1,\ 2,\ldots,\beta; \quad s=1,\ 2,\ldots,\alpha; \quad \alpha+\beta=m.$$

Откуда следује да тражена карактеристичка функција неће зависити од променљивих количина (26).

Тако, на пример, четири функције:

$$f_1 \equiv p_1^2+p_2^2+x_3;\ f_2 \equiv x_1^2-x_2^2;\ f_3 \equiv p_3+p_4 \text{ и } f_4 \equiv x_3-x_4+p_4, \quad (28)$$

које не чине функционалну групу, производе још три нове функције:

$$(f_1,\ f_2) \equiv f_5 \equiv 4(p_1x_1-p_2x_2); \quad (f_1,\ f_5) \equiv 8(p_1^2-p_2^2) \equiv f_6 \text{ и}$$
$$(f_2,\ f_5) \equiv f_7 \equiv -8(x_1^2+x_2^2). \quad (29)$$

Функције (28) и (29) чине функционалну групу *седмог* реда. Јер је за њих како је то лако видети:

$$(f_1,\ f_2) \equiv f_5; \quad (f_1,\ f_i) \equiv 0, \quad i=4{,}6; \quad (f_1,\ f_5) \equiv f_6; \quad (f_1,\ f_3) \equiv -1;$$
$$(f_1,\ f_7) \equiv -u;$$
$$(f_2,\ f_k) \equiv 0; \quad k=3,\ 4,\ 7; \quad (f_2,\ f_5) \equiv f_7; \quad (f_2,\ f_6) \equiv -u;$$
$$(f_3,\ f_h) \equiv 0, \quad h=4,\ 5,\ 6,\ 7;$$
$$(f_4,\ f_s) \equiv 0, \quad s=5,\ 6,\ 7; \quad (f_5,\ f_6) \equiv \frac{1}{f_2^2}[f_7(f_5^2+f_2f_6)]-$$
$$-f_5\sqrt{(f_7^2-64f_2^2)(f_5+2f_2f_6)};$$
$$(f_5,\ f_7) \equiv -64f_2; \quad (f_6,\ f_7) \equiv -64f_5,$$

где је краткоће ради обележено:

$$32(p_1x_1+p_2x_2) \equiv u \equiv \frac{1}{f_1}\,[\sqrt{(2f_2f_6-f_5^2)(64f_2^2-f_7^2)}-f_5f_7)].$$

Функционална група (28), (29), како је то лако видети, садржи у себи баналну подгрупу петог реда:

$$f_1,\ f_2,\ f_5,\ f_6,\ f_7.$$

Јер ове функције зависе само од пет променљивих

$$x_1, x_2, x_3, p_1, p_2 \qquad (30)$$

па је функционална детерминанта ове подгрупе није равна нули. Наиме:

$$D\left(\frac{f_1, f_2, f_5, f_6, f_7}{x_1, x_2, x_3, p_1, p_2}\right) \equiv 4096 x_1 x_2 (x_1 p_2 - x_2 p_1) \gtrless 0.$$

Према томе тражена карактеристичка функција неће зависити од коњугираних промењљивих за промењљиве (30), т. ј. од количина

$$x_1, x_2, p_1, p_2, p_3. \qquad (31)$$

Заиста у посматраном случају систем (24) прима облик:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2; \qquad \frac{\partial f}{\partial p_k} = 0, \quad k = 1, 2, 3;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} + \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial f}{\partial p_4} + \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0,$$

који, како је то лако видети, има интеграл:

$$x_3 - x_4 + p_4 .$$

Према томе ће тражена карактеристичка функција имати облик:

$$F \equiv \psi(x_3 - x_4 + p_4),$$

где је ψ произвољна функција, која заиста не зависи од промењљивих (31).

Глава IV.

Парцијалне једначине са задатим диференцијалним једначинама карактеристика.

§ 13. *Потпуни број једначина.*

Нека је дат систем $2n-1$ сагласних диференцијалних једначина:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{-dp_1}{P_1} = \ldots = \frac{-dp_n}{P_n} \tag{1}$$

где су изрази:

$$X_1, .., X_n,\ P_1, ..., P_n \tag{2}$$

функције $2n$ канонских промењљивих:

$$x_1,\ x_2, ..., x_n,\ p_1, ..., p_n\,. \tag{3}$$

У низу (2) постоје бар два израза различита од нуле Без икаквог ограничења општости разсуђивања, може се претпоставити да је један од њих, напр., X_1 није раван нули: т. ј.

$$X_1 \gtrless 0.$$

Сада се поставља питање *потребних* и *довољних* услова, које морају задовољити изрази (2) за то, да би се систем (1) могао довести у канонски облик обичних диференцијалних једначина:

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial F}{\partial p_1}} = \ldots = \frac{dx_n}{\frac{\partial F}{\partial p_n}} = \frac{-dp_1}{\frac{\partial F}{\partial x_1}} = \ldots = \frac{-dp_n}{\frac{\partial F}{\partial x_n}}\,. \tag{4}$$

Ради тога је, очевидно, потребно да су задовољене $2n-1$ следећих идентичности:

$$X^s(F) \equiv 0, \quad s = 1, 2, \ldots, n \quad \text{и} \quad P^j(F) \equiv 0, \quad j = 2, 3, \ldots, n. \tag{5}$$

Где симболи X^s и P^j означавају:

$$X^s(F) \equiv \frac{\partial F}{\partial x_s} - \frac{P_s}{X_1}\frac{\partial F}{\partial p_1}; \quad P^j(F) \equiv \frac{\partial F}{\partial p_j} - \frac{X_j}{X_1}\frac{\partial F}{\partial p_1}.$$

Идентичности (5) показују да тражена карактеристичка функција F мора бити општи интеграл следећег система $2n-1$ линеарних парцијалних једначина:

$$X^s(f) = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, n; \quad P^j(f) = 0, \quad j = 2, 3, \ldots, n. \tag{6}$$

Али да би поменути општи интеграл постојао, то је *потребно* и *довољно* да систем (8) буде затворен.

Ради тога је пак потребно постојање $(2n-1)(n-1)$ следећих услова инволуције система (6):

$$\left.\begin{aligned}
&X^s\left(\frac{P_i}{X_1}\right) - X^i\left(\frac{P_s}{X_1}\right) = 0, \quad i, s = 1, 2, \ldots, n,\\
&X^s\left(\frac{X_j}{X_1}\right) - P^j\left(\frac{P_s}{X_1}\right) = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, n, \; j = 2, 3, \ldots, n,\\
&P^j\left(\frac{X_i}{X_1}\right) - P^i\left(\frac{X_j}{X_1}\right) = 0, \quad i, j = 2, 3, \ldots, n.
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Ако су услови (7) задовољени, онда се интеграл система (6) одређује интеграљењем следеће једначине у тоталним диференцијалима:

$$\sum_{s=1}^{n} (P_s\, dx_s + X_s\, dp_s) = 0. \tag{8}$$

Нека је интеграл једначине (8)

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = C,$$

где је C произвољна константа.

Онда ће се општи интеграл система (6) добити у облику:

$$F \equiv \psi(\Phi),$$

где је ψ произвољна функција.

Према томе можемо извести следећи закључак:

Ако изрази (2), који се налазе у датом систему 2n—1 диференцијалних једначина (1) задовољавају (2n—1) (n—1) потребних и довољних услова (7) онда се систем (1) своди на канонички систем, чија се каратеристичка функција (F) налази интеграљењем само једне једначине у тоталним диференцијалима (8).

На пример узмимо систем трију диференцијалних једначина:

$$\frac{dx_1}{x_1^2\sqrt{p_2}} = \frac{dx_2}{x_2^2\sqrt{p_1}} = \frac{-dp_1}{4x_1p_1\sqrt{p_2}} = \frac{-dp_2}{4x_2p_2\sqrt{p_1}}\,.$$

Према пређашњим формулама одговарајућа карактеристичка функција гласи:

$$F \equiv \psi(x_1^2\sqrt{p_1} + x_2^2\sqrt{p_2}),$$

где је ψ произвољна функција.

§ 14. *Једна дата једначина.*

Нека је дата обична диференцијална једначина:

$$\frac{dx_1}{1} = -\frac{dp_1}{P_1}\,, \tag{9}$$

где је P_1 једна одређена функција промењљивих (3), па се тражи карактеристичка функција F једног канонског система обичних диференцијалних једначина, који ће међу својим диференцијалним једначинама садржавати и дату једначину (9).

По смислу задатка мора бити задовољена само једна од идентичности (5) и то:

$$X'(F) \equiv \frac{\partial F}{\partial x_1} - P_1\frac{\partial F}{\partial p_1} \equiv 0.$$

Одавде следује да тражена карактеристичка функција мора бити општи интеграл следеће парцијалне једначине:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} - P_1\frac{\partial f}{\partial p_1} = 0. \tag{10}$$

Једначина (10) допушта $2n-2$ очевидних интеграла:

$$x_2,\ x_3, \ldots, x_n\ ,\ p_2,\ p_3, \ldots, p_n\ . \tag{11}$$

Што се тиче последњег $2n-1$-ог интеграла, то се он налази из саме једначине (9) која очевидно одговара једначини (10), сматрајући у њој количине (11) као константе.

Ако се овај интеграл једначине (10) обележи са:

$$u_1$$

онда ће се тражена карактеристичка функција F добити у облику:

$$F \equiv \psi(u_1,\ x_2, \ldots, x_n\ ,\ p_2, \ldots, p_n\ ), \tag{12}$$

где је ψ произвољна функција.

Лако је видети да функција (12) решава постављени задатак. Заиста, систем (4) прима за функцију (12) облик:

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial\psi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial p_1}} = \frac{dx_2}{\frac{\partial\psi}{\partial p_2}+\frac{\partial\psi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial p_2}} = \ldots = \frac{-dp_1}{\frac{\partial\psi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}} = \ldots = \frac{-dp_n}{\frac{\partial\psi}{\partial x_n}+\frac{\partial\psi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_n}}$$

очевидно је да се прва и $n+1$ размере последњег система чине једначину еквивалентну са једначином (9).

Према томе можемо исказати следећи закључак:

Ако је дата само једна диференцијална једначина (9), онда је увек могуће саставити карактеристичку функцију каноничког система обичних диференцијалних једначина (4), међу којима ће се налазити и дата једначина (9). Ова се карактеристичка функција налази интеграљењем саме једначине (9), где се променљиве (11) морају сматрати као константе.

§ 15. *Случај кад је дато r $(1<r<2n-1)$ једначина.*

Нека је дат систем $r<2n-1$ обичних диференцијалних једначина:

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{dx_1}{1} = \dfrac{dx_2}{X_2} = \ldots = \dfrac{dx_{\alpha+1}}{X_{\alpha+1}} = \dfrac{-dp_1}{P_1} = \ldots = \dfrac{-dp_\beta}{P_\beta} \\ \alpha+\beta=r \quad 1<r<2n-1. \end{array}\right\} \tag{13}$$

где су коефицијенти:

$$X_2,\dots, X_{\alpha+1},\ P_1,\dots, P_\beta \tag{14}$$

одређене функције променљивих (3), па се тражи карактеристичка функција F канонског система једначина (4), који ће међу својим једначинама садржат r датих једначина (13).

Према задатку тражена функција F мора задовољити r следећих од идентичности (5):

$$X^s(F) \equiv \frac{\partial F}{\partial x_s} - P_s \frac{\partial F}{\partial p_s} \equiv 0, \quad s = 1, 2,\dots, \beta,$$

$$P^j(F) \equiv \frac{\partial F}{\partial p_j} - X_s \frac{\partial F}{\partial p_1} \equiv 0, \quad j = 2, 3,\dots, \alpha+1.$$

Откуда следује да ова функција мора бити општи интеграл система r парцијалних једначина:

$$\left.\begin{aligned} X^s(f) &= \frac{\partial f}{\partial x_s} - P_s \frac{\partial f}{\partial p_1} = 0, \quad s = 1, 2,\dots, \beta \\ P^j(f) &= \frac{\partial f}{\partial p_j} - X_j \frac{\partial f}{\partial p_1} = 0, \quad j = 2, 3,\dots, \alpha+1. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Да би систем (15) био интеграбилан, потребно је и довољно постојање $\frac{r}{2}(r-1)$ следећих идентичности:

$$\left.\begin{aligned} & X^s(P_i) - X^i(P_s) \equiv 0, \quad i,\ s = 1, 2,\dots, \beta \\ & X^s(X_j) - P^j(P_s) \equiv 0, \quad \begin{matrix} s = 1, 2,\dots, \beta \\ j = 2, 3,\dots, \alpha+1 \end{matrix} \\ & P^j(X_i) - P^i(X_j) \equiv 0, \quad i, j = 2, 3,\dots, \alpha+1. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Претпоставимо да су услови (16) задовољени.

Тада се систем (15) може интегралити на следећи начин.

Пре свега он допушта $2n-r-1$ следећих очевидних интеграла:

$$x_{\beta+1},\dots, x_n,\ p_{\alpha+2},\dots, p_n. \tag{17}$$

Последњи се $2n-r$ интеграл налази, уз помоћ интеграла (17), помоћу интеграљења само једне једначине у тоталним диференцијалима, која одговара систему (15) и то:

$$\sum_{s=1}^{\beta} P_s\, dx_s + \sum_{i=1}^{\alpha+1} X_i\, dp_i = 0, \tag{18}$$

где треба сменити $X_1 \equiv 1$.

Нека је интеграл једначине (18):

$$u = C,$$

где је C произвољна константа.

Тада ће тражена карактеристичка функција имати облик:

$$F \equiv \psi(u,\ x_{\beta+1}, \ldots, x_n,\ p_{\alpha+2}, \ldots, p_n), \tag{19}$$

где је ψ произвољна функција.

Да је добивени резултат тачан може се уверити на исти начин, као и у претходном § 14.

Према томе можемо извести следећи закључак:

Дати систем r ($1 < r < 2n-1$) сагласних обичних диференцијалних једначина (13) налази се као део у каноничком систему (4) само онда, када његови коефицијенти (15) задовољавају $\frac{r}{2}(r-1)$ потребних и довољних услова (16). Карактеристичка функција канонског система (4) налази се тада у облику (19) помоћу интеграљења само једне једначине у тоталним диференцијалима (18), где се променљиве (17) морају сматрати као константне количине.

§ 16. *Случај Charpit'a.*

У претходном § 15 био је проучен случај, када се може саставити парцијална једначина првог реда по унапред задатом делу (13) њеног каноничког система диференцијалних једначина карактеристика. *При чему се постављени задатак решавао без обзира на то да ли је задати систем (13) претстављао сам за себе један интеграбилни систем.* Као примену тог решења, поставимо сад питање састављања парцијалне једначине првог реда по унапред задатом делу каноничког система диференцијалних једначина карактеристика, *под условом да се тај задати део може сам за себе интегралити.*

Овако постављени задатак претставља генерализацију случаја Charpit-a [13]) на произвољни број променљивих.

Претпоставимо, на пример, да је задат следећи систем $n-1$ обичних диференцијалних једначина:

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{-dp_2}{P_2} = \ldots = \frac{-dp_n}{P_n}, \tag{20}$$

где су коефицијенти:

$$P_2,\ P_3, \ldots, P_n \tag{21}$$

функције од n независно променљивих количина:

$$x_1,\ p_2,\ p_3, \ldots, p_n\,. \tag{22}$$

Лако је видети да коефицијенти (21) задовољавају услове (16).

Према томе се тражена карактеристичка функција налази интеграљењем једначине (18), која, у посматраном случају, има облик:

$$dp_1 + \sum_{j=2}^{n} P_j\, x_j = 0, \tag{23}$$

где се променљиве (22) морају сматрати, као константе,

Због овог интеграл једначине (23) очевидно је:

$$w \equiv p_1 + \sum_{j=2}^{n} P_j\, x_j = C, \tag{24}$$

где је C произвољна константа.

На такав начин тражена карактеристичка функција имаће облик:

$$F \equiv \psi(w,\ x_1,\ p_2, \ldots, p_n),$$

где је ψ произвољна функција.

Овој функцији одговара очевидно следећа парцијална једначина првог реда:

---

[13]) *N. Saltykow.* — Étude bibliographique sur le mémoire de Charpit. (Bull. des Sciences Mathématiques 2⁰ série T. LIV 1930).

Lacroix. — Traité du calcul différentiel et du calcul intégral. t. II. Paris 1814. pp. 550 et suivantes.

$$p_1+\sum_{j=2}^{n} P_j x_j = \Phi(x_1,\ p_2,\ p_3,\ldots, p_n), \qquad (25)$$

где је Φ једна произвољна функција.

Једначина (25) се може интегралити на следећи начин.

Напишимо образац за тотални диференцијал непознате функције z у облику:

$$dz = p_1 dx_1 + \sum_{j=2}^{n} p_j\, dx_j\ .$$

Ако му додамо и одузмемо израз:

$$\sum_{j=2}^{n} p_j\, dx_j$$

добићемо онда:

$$dz = p_1 dx_1 + \sum_{j=2}^{n} d(d_j x_j) - \sum_{j=2}^{n} x_j\, dp_j\ . \qquad (26)$$

Са друге пак стране имамо из система (21), који одговара једначини (25):

$$dp_j = P_j\, dx_1, \quad j=2,\ 3,\ldots,\ n. \qquad (27)$$

Пошто сменимо вредности (27) у једначини (26), добијамо:

$$dz = \sum_{j=2}^{n} d(p_j x_j) + w dx_1$$

или због (25):

$$dz = \sum_{j=2}^{n} d(p_j x_j) + \Phi dx_1.$$

Обележимо сад са:

$$f_j(x_1,\ p_2,\ldots, p_n) = C_j, \quad j = 2,\ 3,\ldots,\ n,$$

где C_j означавају произвољне константе, $n-1$ интеграла система (21), који се могу решити по $n-1$ промењљивих

$$p_2,\ p_3,\ldots, p_n\ ;$$

и нека је резултат таквог решења:

$$p_j = \varphi_j(x_1;\ C_2,\ldots,\ C_n), \quad j = 2,\ 3,\ldots,\ n\ . \qquad (29)$$

Сменимо ли вредности (29) у једначини (28), добијемо једначину са раздвојеним променљивим:

$$dz = \sum_{j=2}^{n} d(p_j\, x_i) + \theta(x_1)\, dx_1\,,$$

где $\theta(x_1)$ означава резултат замене вредности (29) у функцији Φ, чијом се интеграљењем и одређује потпуни интеграл дате једначине (25).

Једначина (25) претставља генерализацију, за ма који број променљивих, првог од поменутих случајева Charpit-a, под претпоставком да тражена парцијална једначина не зависи експлицитно од непознате функције z.

Глава V.

Максимални број изузетних функција функционалне групе од непарног броја променљивих.

§ 17. *Гранични број чланова у инволуцији за једну функционалну групу.*

Посматрајмо r различитих функција:

$$f_1, f_2, \ldots, f_r, \quad r<2n, \tag{1}$$

$2n+1$ променљивих количина:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n. \tag{2}$$

Претпоставимо да функције (1) чине функционалну групр. Као што је то познато [14]), то значи да оне задовољавају условима:

$$\left.\begin{array}{l} [f_h, f_k] \equiv \dfrac{1}{w} \Pi_{hk}, \quad h, k = 1, 2, \ldots, r; \quad [w, f_s] - w \dfrac{\partial f_s}{\partial z} = \Pi_s \\ \qquad\qquad s = 1, 2, \ldots, r \leq 2n, \end{array}\right\} \tag{3}$$

где се све Π_{hk} и Π_s изражавају као функције чланова групе (1), а W означава реципрочну вредност Војлерових заграда за неке две неинволуционе функције од функција (1), т. ј.

$$w = \frac{1}{[f_i, f_j]}; \quad [f_i, f_j] \gtrless 0.$$

Добро је познато да једна функционална група (1) про-

[14]) *N. Saltykow.* Sur la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction inconnue. Paris 1925. Chap. IX p. 131.

мењљивих (2) ~~реда r ($n+1 \le r \le 2n$) може~~ садржати у себи $n+1$ различитих чланова у инволуцији.

Тако, на пример, функционална група:

$$f_1 \equiv x + \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+1}}\,; \quad f_2 \equiv y + \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+1}}\,; \quad f_3 \equiv z - \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}$$

садржи у себи $n+1=3$ различите инволуционе функције, које сачињавају инволуциону групу трећег реда.

Сад се јавља питање, да ли једна функционална група (1) може имати више од $n+1$ различитих инволуционих функција.

Докажимо следећу теорему:

Једна функционална група (1) променљивих (2) не може садржати у себи више од $n+1$ различитих функција у инволуцији.

Заиста, претпоставимо обрнуто да једна функционална група садржи у себи, на пример, $n+2$ различитих функцуја у инволуцији, и то:

$$f_1,\, f_2,\, \ldots,\, f_{n+2}, \tag{4}$$

за које се све Војлерови заграде индентички ниште. Т. ј.

$$[f_i\,,\, f_k] = 0, \quad i,\ k = 1, 2, \ldots, n+2. \tag{5}$$

Трансформујмо сад функције (4) на облик, који неће зависити експлицитно од непознате функције z, помоћу следећих формула:

$$p_i = -\frac{\dfrac{\partial V}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial V}{\partial z}} = \frac{-q_i}{q_{n+1}}, \tag{6}$$ [15]

Ако трансформоване функције обележимо са цртом изнад симбола f, то добијемо после трансформације (6) *скуп* функција:

$$\bar{f}_1,\, \bar{f}_2,\, \ldots,\, \bar{f}_{2n+2}\,, \tag{7}$$

од $2n+2$ променљивих количина:

[15] Н. Н. Салтыковъ. Теорія характеристикъ и ея примѣненія. С. Петербургъ 1911 стр. 580.

$$x_1,\ x_2, \ldots,\ x_{n+1},\ q_1,\ q_2, \ldots,\ q_{n+1}, \tag{8}$$

где је стављено ради једноставности писма

$$z = x_{n+1}.$$

Пошто се обрасци помоћу којих код трансформација (6) прелази од заграда Поасона на заграде Војлера гласе:

$$(\overline{f}_i, \overline{f}_k) \equiv -\frac{1}{q_{n+1}}[f_i, f_k], \quad i, k = 1, 2, \ldots, n+2 \text{ [16]},$$

то имамо из њих због услова (5):

$$(f_i, f_k) \equiv 0, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n+2.$$

На тај начин следује да се свих $n+2$ функција (7) $2n+2$ промењљивих (8) налазе у међусобној инволуцији.

Али је ово немогуће, пошто према доказаном у § 2 свака функционална група $2n+2$ промењљивих (8) може садржати у себи највише $n+1$ различитих инволуционих функција.

Према томе је немогуће претпоставити да у функционалној групи (1) има $n+2$ различитих инволуционих функција. Што и доказује теорему.

§ 18. *Максимални број изузетних функција.*

Пређимо сад на испитивање максималног броја изузетних функција једне функционалне групе (1) промењљивих (2).

Пре свега, очевидно је да једна група (1) не може садржати у себи више од $n+1$ различитих изузетних функција, јер према теореми § 17 група (1) нема више од $n+1$ инволуционих функција.

Да би смо тачније утврдили максимални број изузетних функција групе (1), посматрајмо два следећа случаја у зависности од реда те групе; наиме, случај кад је ред мањи од броја $n+1$ и случај кад је ред групе већи од $n+1$.

У првом случају, као што је то познато [17]), максимални

---

[16]) Н. Н. Салтыковъ ibid стр. 581.

[17]) *E. Goursat*, Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris 1891, p. 313.

број изузетних функција изражава се обрасцем:

$$\mu = r - 2,$$

где је μ број изузетних функција.

За други случај уочимо једну функционалну групу реда $n+\rho$ променљивих (2):

$$f_1, f_2, \ldots, f_{n+\rho}, \quad 1 < \rho \leqq n+1. \tag{9}$$

Пошто трансформујемо помоћу формула (6) функције (9), добијемо функције:

$$\overline{f}_1, \overline{f}_2, \ldots, \overline{f}_{n+\rho}, \quad 1 < \rho \leqq n+1. \tag{10}$$

Као што је познато,[18]) функције (10) чине функционалну групу, кад се њима придружи још једна, различита од њих, функција:

$$\overline{f}_{n+\rho+1} \equiv q_{n+1}\, \overline{W}, \tag{11}$$

где W означава реципрочну вредност Војлерових заграда за неке две неинволуционе функције посматране групе (9).

Према доказаном у § 3, функционалнална група $n+\rho+1$ реда (10) и (11) променљивих (8) садржи у себи највише $n-$ $-\rho+1$ различитих изузетних функција.

Обележимо их са:

$$\overline{\Phi}_i\,(\overline{f}_1, \overline{f}_2, \ldots, \overline{f}_{n+\rho}, \overline{f}_{n+\rho+1}), \quad i=1, 2, \ldots, n-\rho+1. \tag{12}$$

Ако се сад вратимо од променљивих (8) на старе променљиве (2), прећи ћемо од функционалне групе (10), (11) на посматрану групу (9) и од изузетних функција (12) на изузетне функције:

$$\Phi_i\,(f_1, f_2, \ldots, f_{n+\rho}), \quad i=1, 2, \ldots, n-\rho+1,$$

Јер као што је то познато[19]), функција (11) после обрнуте трансформације не претставља функцију различиту од функција (9).

На тај начин је доказана теорема:

[18]) Н. Н. Салтыковъ. Теорія характеристикъ и ея примѣненія. С. Петербургъ 1911, стр. 582.

[19]) Н. Н. Салтыковъ ibid. стр. 584.

Ако је ред функционалне групе (1) променљивих (2) $n+\rho$, онда се максимални број μ изузетних функција те групе одређује обрасцем:

$$\mu=n-\rho+1, \quad 1<\rho\leq n+1.$$

Из доказане теореме следују два важна закључка.

I. Ако је ред функционалне групе (1) једнак:

$$r=2n+1 \quad \text{т. ј.} \quad \rho=n+1,$$

онда је број изузетних функција те групе једнак:

$$\mu=n-n-1+1=0.$$

Према томе ниједна функционална група $2n+1$-ог реда променљивих (2) не садржи у себи изузетне функције.

II. Претпоставимо сад да је ред групе (1) једнак:

$$r=2n \quad \text{т. ј.} \quad \rho=n,$$

онда је максимални број изузетних функција те групе једнак:

$$\mu=n-n+1=1.$$

Према томе свака функционална група $2n$-ог реда променљивих (2) увек има само једну изузетну функцију.

Покажимо сад како се мења максимални број изузетних функција једне функционалне групе, у зависности од реда те групе при фиксираном n. Ми ћемо ово показати на партикуларном случају кад је $n=5$.

Према томе се уопште могу посматрати групе функција од 1-ог до n-ог реда.

Али, у случају кад је посматрана група инволуциона, њен ред, према показаном у § 7, не може бити већи од 6.

Што се тиче самог максималног броја изузетних функција, то се он одређује следећом таблицом:

<table>
<tr><td colspan="2">Ред групе</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Макс. број изузетних функција</td><td>инволуциона група</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td colspan="5">не постоји група</td></tr>
<tr><td>неинволуциона група</td><td>не пост.</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td></tr>
</table>

§ 19. *Једна теорема из теорије детерминаната.*

Ако је косо-симетрична детерминанта парног 2r-ог реда једнака нули, онда су и сви њени минори једнаки нули.

Заиста, уочимо косо-симетричну детерминанту парног реда:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{12r} \\ -a_{12} & 0 & \dots & a_{22r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_{12r} & -a_{22r} & \dots & 0 \end{vmatrix}. \tag{13}$$

Као што је то познато[20]), адјунгована ће детерминанта за (13) имати следећи облик:

$$\Delta' \equiv \begin{vmatrix} 0 & A_{12} & \dots & A_{12r} \\ -A_{12} & 0 & \dots & A_{22r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -A_{12r} & -A_{2\,2r} & \dots & 0 \end{vmatrix}, \tag{14}$$

где A_{ik} означавају прве миноре детерминанте (13).

Као што је то познато[21]), према особинама косо-симетричних детерминаната добијамо следећи резултат:

$$A_{ik} = \pm a_{ik}\sqrt{\Delta}. \tag{15}$$

Пошто је, по претпоставци, детерминанта $\Delta \equiv 0$, то из резултата (15) следује да су једнаки нули и сви њени први минори, т. ј.:

$$A_{ik} = 0, \quad i,\ k = 1,\ 2, \dots, 2r.$$

§ 20. *Изналажење изузетне функције, кад је одговарајући систем парцијалних једначина затворен.*

Пређимо сад на детаљно расматрање различитих случајева, који се могу јавити при изналажењу изузетних функција функционалних група промењљивих (2).

---

20) *Др. Б. Гавриловић.* Теорија детерминаната. Београд 1899, стр. 94, 153.

21) *Др. Б. Гавриловић.* ibid. стр. 95, 154.

При овоме, ми полазимо од основних ставова проф. Н. Салтикова, изложених у његовом раду: „Sur la Théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction inconnue“ стр. 133—137.

Нека је дата функционална група (1) промењљивих (2).

Као што је то познато [22]), изналажење изузетних функција групе (1) захтева интеграљење следећег система линеарних парцијалних једначина:

$$[f_s, f] \equiv \sum_{\sigma=1}^{r} \Pi_{s\sigma} \frac{\partial f}{\partial f_\sigma} = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, r \leq 2n, \tag{16}$$

$$\sum_{\sigma=1}^{r} \Pi_\sigma \frac{\partial f}{\partial f_\sigma} = 0. \tag{17}$$

Уопште говорећи, једначине (16) чине један отворен систем, и онда се улога једначине (17) састоји у томе што она претставља *довољни* услов за то да би се систем (16) претворио у затворен помоћу допуне једначине (17).

Али се може лако десити да је једначина (17) идентички задовољена, због тога што су све количине Π_σ идентички једнаке нули. Тада је очевидно да једначине (16) чине саме за себе један затворен систем.

Према томе проучићемо испочетка случај кад је систем (16) затворен.

Претпоставимо за то да је посматрана група (1) непарног $r = 2m+1$-ог ($m < n$) реда. Наиме, да она има облик:

$$f_1, f_2, \ldots, f_{2m+1}, \quad m < n. \tag{18}$$

Као што је то добро познато, детерминанта групе (18):

$$\Delta \begin{vmatrix} 0 & \Pi_{12} & \ldots & \Pi_{1\,2m+1} \\ -\Pi_{12} & 0 & \ldots & \Pi_{2\,2m+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\Pi_{1\,2m+1} & -\Pi_{2\,2m+1} & \ldots & 0 \end{vmatrix} \tag{19}$$

[22]) *N. Saltykow.* Sur la Théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction inconnue. Paris, 1925. Chap. IX, p. 133.

увек се ништи, јер је она косо-симетрична детерминанта непарног реда.

Из овог следује, да се група (18), пошто сигурно има једну изузетну функцију, може написати у облику:

$$f_1, f_2, \ldots, f_{2m}, \Phi, \tag{20}$$

где је Φ изузетна функција групе (20) или, што је исто, групе (18).

Детерминанта групе (20) се своди тада, очевидно, на косо-симетричну детерминанту парног $2n$-тог реда.

Ако се ова детерминанта ништи, онда се, према теореми § 19, ниште и сви њени први минори, и према томе ће група (18) имати три изузетне функције и т. д.

Према томе можемо исказати следећу теорему:

Ако је систем (16) затворен, а посматрана функционална група (18) промењљивих (2) је непарног реда $2m+1$, онда она садржи у себи или 1, или 3, или 5 и т. д. изузетних функција, у зависности од реда првог минора детерминанте (19), који се неће идентички ништити. Поменуте изузетне функције налазе се тада интеграљењем комплетног система (16).

Посматрајмо сад једну функционалну групу промењљивих (2) парног реда $2m$:

$$f_1, f_2, \ldots, f_{2m}, \quad m<n\ ^{*}), \tag{21}$$

за коју је систем (16) затворен.

Тада ће детерминанта групе (21) бити косо-симетрична *парног* реда.

Ако се ова детерминанта не ништи идентички, група (21) нема изузетних функција.

Али, ако се детерминанта групе (21) ништи идентички, онда се, према теореми § 19, ниште и сви њени први минори; и према томе ће група (21) имати *две* изузетне функције и т. д.

Према томе можемо формулисати следећу теорему:

Једна функционална група (21) промењљивих (2), за коју је систем (16) затворен, може имати или 0, или 2, или 4,

---

*) Како ћемо видети за $m=n$ систем (16) је увек отворен.

и т. д. различитих изузетних функција, у зависности од реда првог минора детерминанте (19), који се неће идентички ништити. Поменуте изузетне функције налазе се интеграљењем комплетног система (16).

§ 21. *Примери.*

Да илуструјемо изложено у претходном § 20 са примерима.

I. Пример. Нека је дата функционална група *трећег* реда:

$$\left.\begin{aligned} & f_1 \equiv (zp+q)(2x+1)-z^2; \quad f_2 \equiv 2x(zp+q)-z^2; \\ & f_3 \equiv \frac{p}{q}; \qquad w \equiv \frac{1}{[f_2, f_3]} \equiv -\frac{q}{2(zp+q)}; \\ & \Pi_{12} \equiv 0; \ \Pi_{13} \equiv 1; \ \Pi_{23} \equiv 0; \ \Pi_i \equiv 0; \ i = 1, 2, 3, \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

за коју систем (16), како је то лако видети, гласи:

$$\frac{\partial f}{\partial f_3} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial f_1} + \frac{\partial f}{\partial f_2} = 0.$$

Пошто је он очевидно затворен, то се тражена изузетна функција лако налази из последње једначине у облику:

$$\Phi \equiv f_2 - f_1.$$

Других изузетних функција нема, јер у детерминанти групе (22) постоји први минор, који није раван нули.

II. Пример. Посматрајмо функционалну групу четвртог реда:

$$\left.\begin{aligned} & f_1 \equiv zp_1; \quad f_2 \equiv \frac{p_2}{p_1} + x_3 - x_1; \quad f_3 \equiv \frac{p_5 x_5}{p_4} - x_4 - x_3 + x_1; \\ & f_4 \equiv -\frac{p_1 + p_2}{zp_1^2}; \\ & w \equiv \frac{1}{[f_1, f_4]} \equiv \frac{1}{z}; \quad \Pi_{12} \equiv -1; \quad \Pi_{13} \equiv 1; \quad \Pi_{14} \equiv 0; \\ & \Pi_{23} \equiv f_4 + \frac{1}{f_1}; \\ & \Pi_{24} \equiv -\frac{2f_4}{f_1} - \frac{1}{f_1^2}; \ \Pi_{34} \equiv -\Pi_{24}; \ \Pi_i \equiv 0; \ i = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Систем (16) прима за групу (23) облик нормалног система, који се своди на две следеће једначине, независне међу собом:

$$\frac{\partial f}{\partial f_2}-\frac{\partial f}{\partial f_3}=0; \qquad \frac{\partial f}{\partial f_1}+\left(f_4+\frac{1}{f_1}\right)\frac{\partial f}{\partial f_2}-\frac{1}{f_1}\left(2f_4+\frac{1}{f_1}\right)\frac{\partial f}{\partial f_4}=0 \qquad (24)$$

Према томе група (23) садржи у себи две различите изузетне функције, које се лако добивају из система (24) у облику:

$$\Phi_1\equiv f_1^2f_4+f_1, \qquad \Phi_2\equiv f_1f_4+f_2+f_3.$$

III. Пример. Посматрајмо најзад следећу функционалну групу четвртог реда:

$$\left.\begin{array}{l} f_1\equiv zp_1; \quad f_2\equiv\dfrac{p_2}{p_1}+x_3-x_1; \quad f_3\equiv zp_4x_3+x_1-x_2-x_5; \\ \qquad\qquad f_4\equiv-\dfrac{p_1+p_2}{zp_1^2}; \\ w\equiv\dfrac{1}{[f_1,f_3]}\equiv\dfrac{1}{z}; \quad \Pi_{12}\equiv-1; \quad \Pi_{13}\equiv 1; \quad \Pi_{14}\equiv 0; \quad \Pi_{23}\equiv f_4; \\ \Pi_{24}\equiv-\dfrac{1}{f_1}\left(2f_4+\dfrac{1}{f_1}\right); \quad \Pi_{34}\equiv\dfrac{2f_4}{f_1}; \quad \Pi_i\equiv 0; \quad i=1,2,3,4. \end{array}\right\} \qquad (25)$$

Систем (16), написан са групу (25), затворен је, то се види из тога што су све вредности Π_i једнаке нули.

Али пошто се детерминанта групе (25) не ништи идентички, то ова група нема изузетне функције.

§ 22. *Изналажење изузетних функција, када је одговарајући систем парцијалних једначина (16) отворен.*

Посматрајмо прво једну функционалну групу парног 2ρ-ог реда променљивих (2):

$$f_1, f_2, \ldots, f_{2\rho}, \quad \rho<n. \qquad (26)$$

Пошто је, по претпоставци, одговарајући систем (16), отворен, то постоји једначина (17).

Али тада бар једна од једначина система (16) је последица оних других једначина истог система (16). Ово је очевидно, јер број једначина (16) и (17) превазилази тада број променљивих (26).

Према томе се идентички ништи детерминанта групе (26)

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} 0 & \Pi_{12} & \ldots & \Pi_{12\rho} \\ -\Pi_{12} & 0 & \ldots & \Pi_{22\rho} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\Pi_{12\rho} & -\Pi_{22\rho} & \ldots & 0 \end{vmatrix} . \qquad (27)$$

Пошто је детермината (27) косо-симетрична парног реда и пошто се она ништи, то ће се, према доказаном у § 19, ништити и сви њени први минори.

Тада се једначине (16) своде на систем $2\rho-2$ једначина, које заједно са једначином (17) образују затворен систем $2\rho-1$ једначина са 2ρ променљивих (26), и према томе у групи (26) постоји једна изузетна функција.

Због ове функције, испитивање детерминанте (27) се своди на испитивање косо-симетричне детерминанте парног $2\rho-2$ реда, која према детерминанти (27) претставља њен главни минор другог реда, наиме:

$$\begin{vmatrix} 0 & \Pi_{12} & \ldots & \Pi_{12\rho-2} \\ -\Pi_{12} & 0 & \ldots & \Pi_{22\rho-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\Pi_{12\rho-2} & -\Pi_{22\rho-2} & \ldots & 0 \end{vmatrix} . \qquad (28)$$

Ако се ова детерминанта (28) парног реда ништи идентички, онда ће се ништити и сви њени први минори, а то значи и сви минори трећег реда детерминанте (27).

Тада се систем (16) своди на $2\rho-4$ једначине, које заједно са једначином (17) образују затворени систем $2\rho-3$ једначина и, према томе, функционална група (26) садржи у себи *три* различите изузетне функције и т. д.

Према томе можемо исказати следећу теорему:

Свака функционална група парног реда (26) променљивих (2), за коју је систем (16) отворен, садржи у себи или 1, или 3, или 5 и т. д. изузетних функција, у зависности *од реда првог минора детерминанте (27), који се идентички не ништи. Поменуте изузетне функције се налазе интеграљењем затвореног система независних једначина (16) и (17).*

Посматрајмо на пример функционалну групу четвртог реда:

$$\left.\begin{array}{l} f_1 \equiv 3x_1 - \dfrac{z}{p_1}; \quad f_2 \equiv zp_1p_2 + x_2; \quad f_3 \equiv \dfrac{p_2 - p_3}{p_1}; \\ f_4 \equiv x_3; \quad w \equiv \dfrac{1}{[f_3, f_4]} \equiv -p_1; \\ \Pi_{12} \equiv 0: \quad \Pi_{13} \equiv -3f_3; \quad \Pi_{14} \equiv 0; \quad \Pi_{23} \equiv 1; \\ \Pi_{24} \equiv 0; \ \Pi_{34} \equiv 0; \ \Pi_1 \equiv -3; \ \Pi_i \equiv 0, \ i = 2, 3, 4. \end{array}\right\} \quad (29)$$

Покажимо да ће група (29) имати *једну* изузетну функцију.

Пошто детерминанта групе (29), која се ништи идентички, садржи у себи минор другог реда различит од нуле, то се систем (16) своди на две следеће различите једначине:

$$3f_3 \frac{\partial f}{\partial f_1} - \frac{\partial f}{\partial f_2} + \frac{\partial f}{\partial f_4} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial f_3} = 0. \tag{30}$$

Систем (30) се затвара, ако му се придружи једначина (17), која у посматраном случају има облик:

$$\frac{\partial f}{\partial f_1} = 0. \tag{31}$$

Према томе се изузетна функција групе (29) налази интеграљењем затвореног система трију једначина (30) и (31) у облику:

$$\Phi \equiv f_2 + f_4.$$

Посматрајмо сад једну функционалну групу непарног $2\rho+1$-ог реда променљивих (2):

$$f_1, f_2, \ldots, f_{2\rho+1}, \quad \rho < n \tag{32}$$

Напишимо детерминанту групе (32):

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} 0 & \Pi_{12} & \ldots & \Pi_{1\,2\rho+1} \\ -\Pi_{12} & 0 & \ldots & \Pi_{2\,2\rho+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\Pi_{1\,2\rho+1} & -\Pi_{2\,2\rho+1} & \ldots & 0 \end{vmatrix}. \qquad (33)$$

Пошто је детерминанта (33) косо-симетрична непарног реда, то се она ништи увек.

Претпоставимо сад, прво, да у детерминанти (33) постоји бар један први минор, који није раван нули.

Тада се систем (16) своди на 2ρ једначина које заједно са (17) образују затворени систем $2\rho+1$ различитих хомогених једначина са $2\rho+1$ промењљивих (32).

Према томе, посматрана функционална група (32), у овом случају, не садржи изузетне функције.

Претпоставимо сад да се у детерминанти (33) ниште сви први минори.

Тада се систем (16) своди на један систем са бројем једначина мањим од 2ρ.

Због тога ће посматрана група (32) садржати у себи бар једну изузетну функцију.

Ако ову функцију узмемо место последњег члана групе (32), детерминанта (33) се своди на облик:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} 0 & \Pi_{12} & \ldots & \Pi_{1\,2\rho} & 0 \\ -\Pi_{12} & 0 & \ldots & \Pi_{2\,2\rho} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\Pi_{1\,2\rho} & -\Pi_{2\,2\rho} & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix}. \qquad (34)$$

Према облику детерминанте (34) јасно је, да се њено испитивање своди на испитивање првог главног минора, који претставља косо-симетричну детерминанту парног реда:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} 0 & \Pi_{12} & \ldots & \Pi_{12\rho} \\ -\Pi_{12} & 0 & \ldots & \Pi_{22\rho} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\Pi_{12\rho} & -\Pi_{22\rho} & \ldots & 0 \end{vmatrix}. \tag{35}$$

Пошто се први минор (35), по претпоставци, ништи, то се, на основу § 19, ниште и сви његови први минори, а то значи сви *други* минори детерминанте (34).

Према томе се систем (16) своди на један систем од $2\rho-2$ једначина, које заједно са једначином (17) образују затворени систем $2\rho-1$ једначина са $2\rho+1$ промењљивих (32).

Посматрана група (32) имаће тада *две* различите изузетне функције.

Због њих испитивање детерминанте (33) функционалне групе (32), може се свести на испитивање косо-симетричне детерминанте *непарног* реда $2\rho-1$.

Јасно је да се за ову детерминанту могу учинити исте претпоставке као и за детерминанту (33).

Према томе можемо исказати следећу теорему.

Свака функционална група непарног реда (32) промењљивих (2), за коју је систем (16) отворен, садржи у себи или 0, или 2, или 4 и т. д. изузетних функција у зависности од реда првог минора детерминанте (33), који се не ништи идентички. Ове се изузетне функције налазе интеграљењем затвореног система независних једначина (16) и (17).

Узмимо, на пример, функционалну групу:

$$\left.\begin{aligned} & f_1 \equiv 3x_1 - \frac{z}{p_1}; \quad f_2 \equiv z p_1 p_2 + x_2; \quad f_3 \equiv \frac{p_2 - p_3}{p_1}; \\ & w \equiv \frac{1}{[f_2 . f_3]} \equiv -p_1; \\ & \Pi_{12} \equiv 0; \quad \Pi_{13} \equiv 3f_3; \quad \Pi_{23} \equiv 1; \quad \Pi_1 \equiv -3; \quad \Pi_2 \equiv \Pi_3 \equiv 0. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Лако је видети да група (36) непарног *трећег* реда *нема* изузетне функције, јер њена детерминанта, садржи први минор различит од нуле.

Заиста једначине (16) и (17) примају у датом случају облик:

$$\frac{\partial f}{\partial f_3}=0; \quad 3f_3\frac{\partial f}{\partial f_1}-\frac{\partial f}{\partial f_2}=0; \quad \frac{\partial f}{\partial f_1}=0,$$

откуда се види да не постоји решење, различито од произвољне константе.

Наведимо, најзад, пример функционалне групе *петог* реда, која садржи *две* различите изузетне функције.

Наиме, посматрајмо следећу групу:

$$\left.\begin{aligned}
&f_1\equiv zp_1+\frac{x_2p_2}{p_3}+x_3; \quad f_2\equiv z^2-2zp_1x_1; \quad f_3\equiv\frac{p_2+p_1}{p_3};\\
&f_4\equiv\frac{p_1}{p_3}; \quad f_5\equiv\frac{x_2p_2}{p_3}+x_3;\\
&w\equiv\frac{1}{[f_1, f_3]}\equiv\frac{p_3^2}{p_1}; \quad \Pi_{1k}\equiv 0, \quad k=2,5; \quad \Pi_{1i}\equiv 1, \quad i=3,4;\\
&\Pi_{2l}\equiv 0, \quad l=3, 4, 5; \quad \Pi_{34}\equiv 0;\\
&\Pi_{j5}\equiv -1, \quad j=3, 4; \quad \Pi_g\equiv\frac{2}{f_4}, \quad g=1, 5;\\
&\Pi_2\equiv\frac{2}{f_4^2}(f_1-f_5); \quad \Pi_h\equiv 0; \quad h=3, 4.
\end{aligned}\right\} \quad (37)$$

Лако је видети да се детерминанта групе (37) ништи са свима својим минорима првог реда.

Према томе се одговарајући систем (16) своди само на две следеће различите једначине:

$$\frac{\partial f}{\partial f_1}+\frac{2}{f_4}(f_1-f_5)\frac{\partial f}{\partial f_2}+\frac{\partial f}{\partial f_5}=0; \quad \frac{\partial f}{\partial f_3}+\frac{\partial f}{\partial f_4}=0,$$

које заједно са једначином (17) у облику:

$$\frac{\partial f}{\partial f_1}+\frac{1}{f_4}(f_1-f_5)\frac{\partial f}{\partial f_2}+\frac{\partial f}{\partial f_5}=0$$

чине један затворени систем, из кога се лако добијају две изузетне функције у облику:

$$\Phi_1 \equiv f_3 - f_4; \quad \Phi_2 \equiv f_1 - f_5.$$

Глава VI.

Интеграли у инволуцији.

§ 23. *Један задати интеграл.*

Пређимо сад на састављање парцијалних једначина првог реда или, што је исто, одговарајућих карактеристичких функција, које ће међу интегралима своје линеарне парцијалне једначине карактеристика допуштати унапред задате функције.

Почнимо са случајем само једне задате функције:

$$f_1 \tag{1}$$

$2n+1$ променљивих количина:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n, \tag{2}$$

Нека се тражи парцијална једначина првог реда:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0, \tag{3}$$

која ће међу својим интегралима карактеристика допуштати дату функцију (1).

Задатак се очевидно своди на изналажење карактеристичке функције F, која ће бити општи интеграл линеарне парцијалне једначине

$$[f_1, f] = 0. \tag{4}$$

Један од интеграла ове једначине је очевидно функција (1).

Ако се са

$$u_1, u_2, \ldots, u_{2n-1} \tag{5}$$

обележе $2n-1$ различитих интеграла генералисаног каноничког система обичних диференцијалних једначина карактеристика:

$$\frac{dx_1}{\dfrac{\partial f_1}{\partial p_1}} = \ldots = \frac{dx_n}{\dfrac{\partial f_1}{\partial p_n}} = \frac{dz}{\sum\limits_{s=1}^{n} p_s \dfrac{\partial f_1}{\partial p_s}} = \frac{-dp_1}{\dfrac{df_1}{dx_1}} = \ldots = \frac{-dp_n}{\dfrac{df_1}{dx_n}}, \qquad (6)$$

који одговара једначини (4) онда ће тражена карактеристичка функција имати облик:

$$F \equiv \psi(f_1, u_1, u_2, \ldots, u_{2n-1}),$$

где је ψ произвољна функција.

Према томе можемо извести следећи закључак:

Ако је дата једна функција (1) променљивих (2), онда тражена карактеристичка функција постоји увек и претставља произвољну функцију од дате функције f_1 и још од $2n-1$ аргумената (5), који се одређују интеграљењем линеарне једначине (4).

Посматрајмо сад партикуларни случај, кад функција (1) има облик:

$$f_1(x, y, z). \qquad (7)$$

Генералисани канонички систем (6) прима онда облик:

$$\frac{dx}{0} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{0} = -\frac{dp}{\dfrac{\partial f_1}{\partial x} + p\dfrac{\partial f_1}{\partial z}} = \frac{-dq}{\dfrac{\partial f_1}{\partial y} + q\dfrac{\partial f_1}{\partial z}}.$$

Из последњег система лако се добивају интеграли:

$$x,\ y,\ z,\ \frac{\dfrac{\partial f_1}{\partial x} + p\dfrac{\partial f_1}{\partial z}}{\dfrac{\partial f_1}{\partial y} + q\dfrac{\partial f_1}{\partial z}}.$$

Према томе ће се тражена карактеристичка функција бити:

$$F \equiv \psi\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\dfrac{\partial f_1}{\partial x} + p\dfrac{\partial f_1}{\partial z}}{\dfrac{\partial f_1}{\partial y} + q\dfrac{\partial f_1}{\partial z}}\right),$$

где је ψ произвољна функција, а у место једне од вредности x, y, z може се узети f_1.

Због тога ће се тражена једначина (3) моћи написати у облику:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}+p\frac{\partial f_1}{\partial z}=\Phi(x,y,z)\left[\frac{\partial f_1}{\partial y}+q\frac{\partial f_1}{\partial z}\right],$$

где је Φ произвољна функција.

Последња једначина очевидно има облик једне линеарне парцијалне једначине односно парцијалних извода p и q:

$$Pp+Qq=R, \tag{8}$$

где су P, Q и R одређене функције променљивих:

$$x,\ y,\ z \tag{9}$$

Према томе, кад је задата само једна функција (7) променљивих (9), могуће је саставити само линеарну парцијалну једначину (8), која ће, као један од своја два интеграла карактеристика, допуштати дату функцију (7).

§ 24. *Потпуни број интеграла у инволуцији.*

Нека је дато $n+1$ различитих функција у инволуцији:

$$f_1, f_2, \ldots, f_{2n-1} \tag{10}$$

променљивих (2), па се тражи карактеристичка функција F једначине (3), која ће међу интегралима своје линеарне парцијалне једначине карактеристика допуштати $n+1$ датих функција (10).

Пре свега, због § 17, тражена карактеристичка функција F не може бити различита од датих функција (10).

Због тога се одмах добија тражено решење у облику:

$$F\equiv\psi(f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}), \tag{11}$$

где је ψ произвољна функција.

Да решење (11) заиста одговара задатку, очевидно је. Јер је увек, пошто се функција (10) у инволуцији:

$$[f_i, F] \equiv \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial \psi}{\partial f_k} [f_i, f_k] \equiv 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Према томе излази следећи закључак:

Ако је задато $n+1$ различитих функција у инволуцији (10) променљивих (2), тражена карактеристичка функција F постоји увек и претставља произвољну функцију од датих функција (10).

Изложена теорија примењује се на проблеме постављене од S. Lie-a. Тако Ph. Engelhardt [23]) тражи парцијалне једначине чије ће карактеристике бити геодетске линије у облику кругова константног радиуса r.

Уочимо ради тога једну од карактеристика. Ако са p, q и -1 обележимо коефициенте правца тангентне равни карактеристике у тачки M, која је нормална према равни карактеристике, онда се пројекције полупречника OM на координатне осе добијају у облику:

$$C_1 - x = \frac{rp}{\sqrt{p^2+q^2+1}}; \quad C_2 - y = \frac{rq}{\sqrt{p^2+q^2+1}};$$
$$C_3 - z = -\frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \tag{12}$$

где C_1, C_2 и C_3 означавају координате центра карактеристике.

Пројекције (12) још се могу, очевидно, написати у облику следећих функционалних зависности:

$$f_1 \equiv x + \frac{rp}{\sqrt{p^2+q^2+1}} = C_1; \quad f_2 \equiv y + \frac{rq}{\sqrt{p^2+q^2+1}} = C_2;$$
$$f_3 \equiv z - \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+1}} = C_3. \tag{13}$$

[23]) *Ph. Engelhardt*. Untersuchungen über die im Schlusswort des Lie'schen Werkes „Geometrie der Berührungstransformationen" angedeuteten Probleme. Leipzig 1910, S. 28—29.

Ако бисмо сад варирали вредности C, C_2 и C_3, функционалне зависности (13) или, што је исто, пројекције (12) одређивале би у простору све могуће положаје радиуса r *међу којима било би и таквих који не припадају карактеристикама тражене парцијалне једначине.*

Покушајмо сад пронаћи спрегове вредности C_1, C_2, C_3, за које ће функције f_1, f_2, f_3 претстављати интеграле карактеристика неке парцијалне једначине првог реда.

На такав начин се задатак своди на изналажење карактеристичке функције за функције:

$$f_1, f_2, f_3 \tag{14}$$

Пошто се функције (14) налазе у инволуцији, то, према резултату § 24, тражена карактеристичка функција има облик:

$$F \equiv \psi(f_1, f_2, f_3),$$

где је ψ произвољна функција.

Према томе ће тражена парцијална једначина бити:

$$\psi\left(x+\frac{rp}{\sqrt{p^2+q^2+1}},\quad y+\frac{rq}{\sqrt{p^2+q^2+1}},\quad z-\frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+1}}\right)=0. \tag{15}$$

Очевидно је да једначина (15) допушта међу својим интегралима карактеристика функције (14), јер се свака од њих налаза у инволуцији са функцијом Ψ.

Због тога је лако такође саставити и потпуни интеграл парцијалне једначине (15).

Заиста, чим се функције (14) изједначе са произвољним константама C_1, C_2, C_3, добиће се зависности (12).

Ако их квадрирамо и саберимо резултате, добијамо потпуни интеграл једначине (15) у облику:

$$(x-C_1)^2+(y-C_2)^2+(z-C_3)^2=r^2, \tag{16}$$

где су због једначине (15) произвољне константе везане условом:

$$\psi(C_1, C_2, C_3)=0, \tag{17}$$

т. ј. нису независне међу собом.

Једначине (16) и (17) претстављају претпоставке Ph. Engelhard-a које се при нашем начину решавања задатка јављају као њихове последице.

§ 25. *Непотпуни систем интеграла у инволуцији.*

Нека је дато $r < n-1$ различитих функција у инволуцији променљивих (2):

$$f_1, f_2, \ldots, f_r, \quad r < n+1, \tag{18}$$

па се за парцијалну једначину (3) тражи карактеристичка функција F, која ће међу интегралима своје линеарне парцијалне једначине карактеристика допуштати дате функције (18).

У посматраном случају, слично § 9, одмах се може наћи једно партикуларно решење у облику произвољне функције од датих функција (18), наиме:

$$F \equiv \psi(f_1, f_2, \ldots, f_r),$$

где је ψ произвољна функција, јер се она налази у инволуцији са сваком од функција (18).

Опште се пак решење одређује интеграљењем нормалног система r једначина:

$$[f_i, f] = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, r. \tag{19}$$

Ако, поред r очевидних интеграла (18) система (19), осталих $2n-2r+1$ интеграла обележимо са:

$$u_1, u_2, \ldots, u_{2n-2r+1} \tag{20}$$

онда ће се тражена карактеристичка функција добити у облику:

$$F \equiv \psi(f_1, f_2, \ldots, f_r, \quad u_1, u_2, \ldots, u^2{}_{n-2r+1}),$$

где је ψ произвољна функција.

Према томе следује закључак:

Ако је дато $r < n+1$ *различитих функција у инволуцији* (18) *промен љивих* (2), *онда увек постоји тражена карактеристичка функција* F. *Ова се функција одређује у облику произвољне функције од* r *датих функција* (18) *и још од* $2n-2r+1$ *аргумената* (20), *који се налазе интеграљењем нормалног система* (19).

Глава VII.

Функционалне групе интеграла.

§ 26. *Потпуни број интеграла.*

Нека је дато $2n$ различитих функција:

$$f_1, f_2, \ldots, f_{2n} \tag{1}$$

$2n+1$ променљивих количина:

$$x_1, \ldots, x_n, \ z, \ p_1, \ldots, p_n, \tag{2}$$

које чине функционалну групу па се тражи карактеристичка функција парцијалне једначине првог реда;

$$F(x_1, \ldots, x_n, \ p_1, \ldots, p_n) = 0, \tag{3}$$

која ће међу интегралима своје линеарне парцијалне једначине карактеристика допуштати $2n$ датих функција (1).

Лако је видети да у посматраном случају тражена карактеристичка функција F *не може бити различита од датих функција (1).*

Заиста, линеарна парцијална једначина:

$$[F, f] = 0,$$

где је F тражена карактеристичка функција има потпуни број $2n$ различитих интеграла (1). Према томе, пошто је F такође интеграл ове једначине, функција F мора бити изузетна функција групе (1).

Због тога је за одређивање карактеристичке функције F, као што смо то видели у § 20, потребно интегралити систем $2n+1$ парцијалних једначина:

$$\sum_{\sigma=1}^{2n} \Pi_{s\sigma} \frac{\partial f}{\partial f_\sigma} = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, 2n; \tag{4}$$

$$\sum_{\sigma=1}^{2n} \Pi_{s\sigma} \frac{\partial f}{\partial f_\sigma} = 0. \tag{5}$$

Лако је доказати, на начин аналоган оном у § 18, да се група (1) претвара у једну групу $2n+1$ реда од $2n+2$ канонских променљивих. Према томе, ова група, а у исто време и дата група (1), имају само по једну изузетну функцију. Одавде излази да се систем једначина (4) и (5) своди само на $2n-1$ различитих једначина, које одређују једну изузетну функцију групе (1).

Ако се ова изузетна функција обележи са Φ, онда ће се тражена карактеристичка функција добити у облику:

$$F \equiv \psi(\Phi),$$

где је ψ произвољна функција.

Из напред наведеног изводимо овај закључак:

Ако је дато $2n$ различитих функција (1) променљивих (2), које чине функционалну групу, тражена карактеристичка функција F постоји увек и претставља произвољну функцију од изузетне функције групе (1), која се одређује интеграљењем затвореног система $2n-1$ различитих једначина (4) и (5).

На пример нека је дата функционална група четвртог реда:

$$f_1 \equiv (zp+q)(2x+1) - z^2; \quad f_2 \equiv 2x(zp+q) - z^2; \quad f_3 \equiv \frac{p}{q};$$

$$f_4 \equiv z - y(zp+q);$$

$$w \equiv \frac{1}{[f_2, f_3]} \equiv -\frac{q}{2(zp+q)}; \quad \Pi_{1i} \equiv 0, \quad i = 2, 4; \quad \Pi_{k3} \equiv 1, \quad k = 1, 2;$$

$$\Pi_{24} \equiv 0;$$

$$\Pi_{34} \equiv -\frac{1}{2} f_3; \quad \Pi_s \equiv 0, \quad s = 1, 2, 3; \quad \Pi_4 \equiv \frac{1}{2}.$$

Изузетна функција Φ дате групе одређује се интеграљењем затвореног система трију једначина:

$$\frac{\partial f}{\partial f_1}+\frac{\partial f}{\partial f_2}=0;\quad \frac{\partial f}{\partial f_i}=0,\quad i=3,\,4,$$

па има облик:

$$\Phi \equiv f_1 - f_2.$$

Према томе ће тражена парцијална једначина (3) бити:

$$F \equiv \psi(\Phi) = \psi(zp+q) = 0,$$

где је ψ произвољна функција.

§ 27. *Непотпуни број интеграла.*

Претпоставимо сад да је дато $r<2n$ различитих функција:

$$f_1, f_2, \ldots, f_r\,,\quad r<2n, \tag{6}$$

променљивих (2) које чине функционалну групу, па се тражи парцијална једначина првог реда (3), која одговара датој групи интеграла (6).

Постављени задатак може имати *партикуларно решење* и тражена карактеристичка функција F може се наћи као функција од датих функција (6), у случају када посматрана функционална група садржи у себи изузетне функције. А то значи онда, када функције (6) задовољавају за то довољне услове, проучене у §§ 20 и 22.

Међутим, за групу (6) увек постоји опште решење.

Заиста, ради тога је потребно интегралити систем линеарних парцијалних једначина:

$$[f_i\,,\,f]=0,\quad i=1,\,2,\ldots,\,r<2n. \tag{7}$$

Као што је то познато, систем (7) је, у променљивим (2), увек отворен, али га затвара само једна парцијална једначина облика:

$$[w,\,f]-w\,\frac{\partial f}{\partial z}=0. \tag{8}$$

Пошто су функције (6) различите међу собом, једначине (7) и (8) образују затворени систем $r+1$ различитих линеарних парцијалних једначина:

Ако се са:

$$u_1, u_2, \ldots, u_{2n-r}, \quad r<2n \tag{9}$$

обележе $2n-r$ различитих решења система (7) и (8) онда ће се тражена карактеристичка функција добити у облику:

$$F \equiv \psi(u_1, u_2, \ldots, u_{2n-r}),$$

где је ψ произвољна функција.

Одавде излази закључак:

Ако је дато $r<2n$ различитих функција (6) променљивих (2), које чине функционалну групу, онда тражена карактеристичка функција постоји увек и преставља произвољну функцију $2n-r$ аргумената (9), који се одређују интеграљењем система $r+1$ различитих парцијалних једначина (7) и (8).

§ 28. *Интеграли, који не чине функционалну групу.*

Претпоставимо најзад да је дато $r<2n$ различих функција:

$$f_1, f_2, \ldots, f_r, \quad r<2n, \tag{10}$$

променљивих (2), које не чине функционалну групу, па се тражи парцијална једначина првог реда (3) за коју ће каракристичка функција допуштати, међу интегралима своје линеарне парцијалне једначине карактеристика, r датих функција (10).

Могу се јавити, очевидно, два следећа случаја.

1) Дате функције (10) производе једну функционалну групу $r+\rho \leq 2n$ реда.

У таквом случају, како је то показано у §§ 26—27, увек постоји тражена карактеристичка функција, а према томе је увек могуће саставити парцијалну једначину (3), која ће одговарати групи (10).

Може се десити да функције (10) производе једну баналну групу $2n+1$ реда

$$f_1, f_2, \ldots, f_{2n+1}.$$

У овом случају задатак је немогућ.

Из напред изложеног следује овај закључак:

Чим је дато $r<2n$ различитих функција (10) промен-љивих (2), које не чине функционалну групу, па се тражи од-говарајућа парцијална једначина (3), прво је потребно да ви-димо да ли функције (10) производе једну не баналну групу. Ако овај услов није задовољен, не постоји одговарајућа јед-начина (3).

Али, ако функције (10) производе једну не баналну функ-ционалну групу онда је овај услов не само што је потре-бан већ је и довољан за то да би се могла саставити од-говарајућа парцијална једначина првог реда (3).

Глава VIII.

Парцијалне једначине, експлицитно зависне од z, са унапред задатим диференцијалним једначинама карактеристика.

§ 29. *Потпуни број једначина,*

Уочимо неки систем од $2n$ обичних диференцијалних једначина:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dz}{Z} = \frac{-dp_1}{P_1} = \ldots = \frac{-dp_n}{P_n}, \qquad (1)$$

где су изрази:

$$X_1, \ldots, X_n\,,\ Z,\ P_1, \ldots, P_n \qquad (2)$$

функције $2n+1$ променљивих количина:

$$x_1, \ldots, x_n\,,\ z,\ p_1, \ldots, p_n\,. \qquad (3)$$

Сада се поставља питање потребних и довољних услова, које морају задовољавати изрази (2) за то, да би се систем (1) могао довести у генералисани канонски облик обичних диференцијалних једначина:

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial F}{\partial p_1}} = \ldots = \frac{dx_n}{\frac{\partial F}{\partial p_n}} = \frac{dz}{\sum\limits_{s=1}^{n} p_s \frac{\partial F}{\partial p_s}} = \frac{-dp_1}{\frac{dF}{dx_1}} = \ldots = \frac{-dp_n}{\frac{dF}{dx_n}}\,. \qquad (4)$$

Увек се може претпоставити да један од израза (2), на пример X_1, није раван нули, а онда се, по себи се разуме, мора претпоставити да је и:

$$\frac{\partial F}{\partial p_1} \gtrless 0.$$

Ако се уведу скраћенице:

$$\chi^s [F] \equiv \frac{dF}{dx_1} - \frac{P_s}{X_1} \frac{\partial F}{\partial p_1}; \quad P^j [F] \equiv \frac{\partial F}{\partial p_j} - \frac{X_j}{X_1} \frac{\partial F}{\partial p_1},$$

то ће тражени услови бити задовољени, када су задовољене следеће $2n$ идентичности:

$$\left.\begin{aligned} &\chi^s [F] \equiv 0, \quad s = 1, 2, \ldots, n \quad P^j [F] \equiv 0, \quad j = 2, 3, \ldots, n; \\ &\sum_{s=1}^{n} p_s \frac{\partial F}{\partial p_s} - \frac{Z}{X_1} \frac{\partial F}{\partial p_1} \equiv 0. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Пошто се у последњој од идентичности (5) замене вредности $\frac{\partial F}{\partial p_j}$ помоћу n—1 претходних идентичности, добија се:

$$\sum_{s=1}^{n} p_s X_s - Z \equiv 0. \qquad (6)$$

На такаг начин идентичност (6) претставља први тражени потребни услов, који морају задовољавати функције X_s и Z.

Осим тога $2n$—1 првих од идентичности (5) показују да функција F мора бити општи интеграл следећег система линеарних парцијалних једначина:

$$\chi^s [f] = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, n; \quad P^j [f] = 0, \quad j = 2, 3, \ldots, n. \qquad (7)$$

Лако је видети да је систем (7) увек отворен.

Заиста, Поасонове заграде дају за прву и $n+k$—1 од једначина (7) следећу вредност:

$$(\chi', P^k) \equiv \frac{X_k}{X_1} \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{T_k}{X_1} \frac{\partial f}{\partial p_1} \right), \qquad (8)$$

где је обележено:

$$T_k \equiv \frac{X_1^2}{X_k} \left[\frac{d}{dx_1} \left(\frac{X_k}{X_1} \right) - \frac{\partial}{\partial p_k} \left(\frac{P_1}{X_1} \right) \right] + X_k \frac{\partial}{\partial p_1} \left(\frac{P_1}{X_k} \right),$$

која се очевидно не ништи нити идентички нити на основу једначина (7).

Због тога, да би постојало решење система (7), *потребно* је да се он затвара *само са једном* једначином, која се добија кад се израз (8) изједначи са нулом. Т. ј.

$$\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{T_k}{X_1} \frac{\partial f}{\partial p_1} = 0. \tag{9}$$

Помоћу једначине (9), систем (7) лако се претвара у следећи систем $2n$ различитих једначина:

$$\left.\begin{aligned} \chi^s(f) &\equiv \frac{\partial f}{\partial x_s} - \frac{Q_s}{X_1} \frac{\partial f}{\partial p_1} = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, n; \\ P^j(f) &\equiv \frac{\partial f}{\partial p_j} - \frac{X_j}{X_1} \frac{\partial f}{\partial p_1} = 0, \quad j = 2, 3, \ldots, n; \\ Z(f) &\equiv \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{T_k}{X_1} \frac{\partial f}{\partial p_1} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

где је стављено:

$$Q_s \equiv P_s - p_s T_k.$$

Систем (10) биће затворен, ако су задовољени $(2n-1)\,n$ следећих услова инволуције система (10):

$$\left.\begin{aligned} &\chi^s\left(\frac{Q_i}{X_1}\right) - \chi^i\left(\frac{Q_s}{X_1}\right) \equiv 0, \quad i, s = 1, 2, \ldots, n; \\ &\chi^s\left(\frac{X_j}{X_1}\right) - P^j\left(\frac{Q_s}{X_1}\right) \equiv 0, \quad \begin{matrix} s = 1, 2, \ldots, n \\ j = 2, 3, \ldots, n \end{matrix} \\ &\chi^s\left(\frac{T_k}{X_1}\right) - Z\left(\frac{Q_s}{X_1}\right) \equiv 0, \quad s = 1, 2, \ldots, n; \\ &P^j\left(\frac{X_i}{X_1}\right) - P^i\left(\frac{X_j}{X_1}\right) \equiv 0, \quad j, i = 2, 3, \ldots, n; \\ &P^j\left(\frac{T_k}{X_1}\right) - Z\left(\frac{X_j}{X_1}\right) \equiv 0, \quad j = 2, 3, \ldots, n. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Према томе, идентичности (6) и (11) претстављају $(2n-1)\,n+1$ *потребних* и *довољних* услова, које морају задовољавати изрази (2) за то да би се систем (1) сводио на генерализован канонички систем (4).

Ако су услови (6) и (11) задовољени, онда се карактеристичка функција F система (4) налази помоћу интеграљења следеће једначине у тоталним диференцијалима:

$$T_k\, dz + \sum_{s=1}^{n} (Q_s\, dx_s + X_s\, dp_s) = 0. \tag{12}$$

Нека је интеграл једначине (12):

$$\Phi = C,$$

где је C произвољна константа.

Тада се тражена карактеристичка функција добија у облику:

$$F \equiv \psi(\Phi),$$

где је ψ произвољна функција.

Према томе следује закључак:

Дати систем 2п сагласних обичних диференцијалних једначина (1), своdиће се на генералисани канонички систем (4) онда, када ће изрази (2) задовољавати потребне и довољне услове (6) и (11). Тражена карактеристичка функција F одређује се онда у облику произвољне функције од аргумента, који се одређује интеграљењем само једне једначине у тоталним диференцијалима (12).

Тако на пример за систем:

$$\frac{dx}{-q} = \frac{dy}{-p} = \frac{dz}{-2pq} = \frac{-dp}{2zp} = \frac{-dq}{2zq},$$

пошто су услови (6) и (11) задовољени, добићемо одговарајућу карактеристичку функцију у облику:

$$F \equiv \psi(z^2 + pq),$$

где је ψ произвољна функција.

§ 30. *Једна једначина.*

Нека је дата само једна обична диференцијална једначина па се тражи одговарајућа карактеристичка функција генералисаног каноничког система (4).

1) Претпоставимо испочетка да дата једначина има облик:

$$\frac{dx_1}{1}=\frac{dx_2}{X_2}, \tag{13}$$

где коефицијенат X_2 зависи од $2n+1$ променљивих (2).

Тада мора бити задовољена само једна од идентичности (5), наиме:

$$P^2[F]\equiv 0.$$

Из последње идентичности следује да тражена карактеристичка функција F мора бити општи интеграл парцијалне једначине:

$$\frac{\partial f}{\partial p_2}-X_2\frac{\partial f}{\partial p_1}=0. \tag{14}$$

Једначина (14) има $2n-1$ интеграла:

$$x_1,\dots, x_n\,,\ z,\ p_3,\dots, p_n\,; \tag{15}$$

Последњи се $2n$-ти интеграл налази, уз помоћ интеграла (15), интеграљењем обичне диференцијалне једначине:

$$\frac{dp_2}{1}=\frac{dp_1}{-X_2}\,. \tag{16}$$

Ако се интеграл једначине (16) обележи са:

$$u=C,$$

где је C произвољна константа, онда ће се тражена карактеристичка функција добити у облику:

$$F\equiv\psi(u,\ x_1,\dots, x_n\,,\ z,\ p_3,\dots, p_n\,),$$

где је ψ произвољна функција.

2) Претпоставимо даље да дата једначина има облик:

$$\frac{dx_1}{1}=\frac{dz}{Z},$$

где Z зависи од променљивих (2).

Тада мора бити задовољена последња од идентичности (5).

Према томе се задатак изналажења карактеристичке функције своди на интеграљење парцијалне једначине:

$$(p_1-Z)\frac{\partial f}{\partial p_1}+\sum_{j=2}^{n}p_j\frac{\partial f}{\partial p_j}=0. \tag{17}$$

Једначина (17) има $n+1$ очевидних интеграла:

$$x_1,\ x_2,\ldots,x_n,\ z. \tag{18}$$

Осем тога, из система $n-1$ обичних диференцијалних једначина, који одговара (17):

$$\frac{dp_1}{p_1-Z}=\frac{dp_2}{p_2}=\ldots=\frac{dp_n}{p_n} \tag{19}$$

лако добијамо $n-2$ интеграла једначине (17):

$$\frac{p_3}{p_2},\ \frac{p_4}{p_2},\ldots,\frac{p_n}{p_2}. \tag{20}$$

Ако се последњи $2n$-ти интеграл једначине (17), који се добија, уз помоћ интеграла (18) и (20), из прве и још неке од размера (19) обележи са:

$$u,$$

онда ће се тражена карактеристичка функција добити у облику:

$$F\equiv\psi\left(u,\frac{p_3}{p_2},\ \frac{p_4}{p_2},\ldots,\frac{p_n}{p_2},x_1,\ldots,x_n,z\right),$$

где је ψ произвољна функција:

3) Претпоставимо затим да задата једначина има облик:

$$\frac{dx_1}{1}=\frac{-dp_1}{P_1},$$

где P_1 зависи од променљивих (2).

Тада мора бити задовољена прва од идентичности (5), и према томе се задатак своди на интеграљење парцијилне једначине:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}+p_1\frac{\partial f}{\partial z}-P_1\frac{\partial f}{\partial p_1}=0. \tag{21}$$

Једначина (21) има $2n-2$ очевидних интеграла:

$$x_2, \ldots, x_n, \; p_2, \ldots, p_n . \tag{22}$$

Ако се са:

$$u_1 \text{ и } u_2$$

обележе два различита интеграла једначине (21), који се добивају из одговарајућег система обичних диференцијалних једначина:

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dz}{p_1} = \frac{-dp_1}{P_1},$$

онда ће се тражена карактеристичка функција добити у облику:

$$F \equiv \psi(u_1, u_2, x_2, \ldots, x_n, p_2, \ldots, p_n),$$

где је ψ произвољна функција.

4) Претпоставимо још да дата једначина има облик:

$$\frac{dp_1}{1} = \frac{dp_2}{P_2},$$

где P_2 зависи од променљивих (2).

Како је лако увидети, задатак изналажења карактеристичке функције се своди тада на интеграљење парцијалне једначине:

$$P_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_2} + (p_1 P_2 - p_2) \frac{\partial f}{\partial z} = 0. \tag{23}$$

Једначина (23) има $2n-2$ очевидних интеграла

$$x_3, \ldots, x_n, \; p_1, \ldots, p_n .$$

Ако се са:

$$u_1 \text{ и } u_2$$

обележе два различита интеграла једначине (23), који се добијају из одговарајућег система обичних диференцијалних једначина:

$$\frac{dx_1}{P_2} = \frac{dx_2}{-1} = \frac{dz}{p_1 P_2 - p_2},$$

онда ће се тражена карактеристичка функција имати облик:

$$F \equiv \psi(u_1, u_2, x_3, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n),$$

где је ψ произвољна функција.

5) Претпоставимо најзад да дата једначина има облик:

$$\frac{dz}{1} = \frac{-dp_1}{P_1},$$

где P_1 зависи од променљивих (2).

У овом случају, за изналажење карактеристичке функције F потребно је интегралити једначину:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial f}{\partial z} - P_1 \sum_{s=1}^{n} p_s \frac{\partial f}{\partial p_s} = 0. \tag{24}$$

Једначина (24) има $n-1$ очевидних интеграла:

$$x_2,\ x_3, \ldots, x_n. \tag{25}$$

Осем тога лако је видети да одговарајући систем диференцијалних једначина карактеристика даје још $n-1$ интеграла једначине (24):

$$\frac{p_2}{p_1},\ \frac{p_3}{p_1}, \ldots, \frac{p_n}{p_1}. \tag{26}$$

Ако се са:

$$u_1 \quad \text{и} \quad u_2$$

обележе још два интеграла, који се добивају из истог система уз помоћ (25) и (26), то ће тражена карактеристичка функција имати облик:

$$F \equiv \psi\left(u_1, u_2, \frac{p_2}{p_1}, \frac{p_3}{p_1}, \ldots, \frac{p_n}{p_1}, x_2, \ldots, x_n\right),$$

где је ψ произвољна функција.

§ 31. *Непотпуни број једначина.*

Нека је потребно саставити парцијалну једначину првог реда, која би међу својим диференцијалним једначинама карактеристика допуштала следеће једначине:

$$\left.\begin{aligned}&dp_1+\sum_{r=2}^{\beta} X_r\, dp_r+\sum_{i=1}^{\beta} Q_i\, dx_i+T dz+\frac{U}{p_{\alpha+1}}\, dp_{\alpha+1}=0,\\&p_{\alpha+1}\, dp_{\alpha+\mu}-p_{\alpha+\mu}\, dp_{\alpha+1}=0, \quad \mu=2, 3,\ldots, n-\alpha.\end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

Пошто из последњих $n-\alpha-1$ једначина (33) лако добијамо интеграле система (20):

$$\frac{p_{\alpha+2}}{p_{\alpha+1}}, \ldots, \frac{p_n}{p_{\alpha+1}},$$

то, бележећи са u интеграл система (30), који добијамо из прве од једначина (33), добијамо тражену парцијалну једначину у облику:

$$F \equiv \psi\left(u, x_{\beta+1}, \ldots, x_n, \frac{p_{\alpha+2}}{p_{\alpha+1}}, \ldots, \frac{p_n}{p_{\alpha+1}}\right)=0,$$

где је ψ произвољна функција.

Глава IX.

Генерализација случајева Charpit'a.

§ 32. *I Тип једначина.*

Lacroix[24]) показује неколико случајева, које је пронашао Charpit[25]), када се може саставити општи облик парцијалне једначине првог реда $E(x, y, z, p, q)=0$ за чије се интеграљење може дати извесна метода.

Покажимо сад да се у глави VIII изложено може са успехом применити за генерализацију поменутих случајева на произвољни број променљивих.

Претпоставимо, прво, да посматрамо неки систем n обичних диференцијалних једначина:

$$\frac{dx_1}{1}=\frac{dp_2}{P_2}=\ldots=\frac{-dp_n}{P_n} \tag{1}$$

чији коефицијенти:

$$P_2,\ldots, P_n \tag{2}$$

зависе само од n променљивих количина:

$$x_1,\ p_2,\ldots, p_n\,. \tag{3}$$

Пошто коефицијенти система (1) зависе само од променљивих (3) то се систем (1) може сам за себе интегралити.

Нека је:

---

[24]) *Lacroix.* — Traité du calcul différentiel et du calcul intégral t. II. 2-e éd. Paris 1914, p. 550.

[25]) *N. Saltykow.* — Etude bibliographique sur le Mémoire de Charpit. (Bull. des sciences math., 2⁰ série, T. LIV. 1930).

$$f_j\,(x_1, p_2, \ldots, p_n) = C_j \qquad (4)$$
$$j = 2, 3, \ldots, n,$$

где C_j означавају произвољне константе, n—1 различитих интеграла система (1), које се могу решити по n—1 променљивих:

$$p_2, \ldots, p_n\,. \qquad (5)$$

Сад се поставља питање састављања такве парцијалне једначине првог реда:

$$F(x_1, \ldots, x_n\,,\; z,\; p_1, \ldots, p_n\,) = 0, \qquad (6)$$

чији би се генералисани канонички систем обичних диференцијалних једначина карактеристика:

$$\frac{dx_1}{\dfrac{\partial F}{\partial p_1}} = \ldots = \frac{dx_n}{\dfrac{\partial F}{\partial p_n}} = \frac{dz}{\sum\limits_{s=1}^{n} p_s\,\dfrac{\partial F}{\partial p_s}} = \frac{-dp_1}{\dfrac{dF}{dx_1}} = \ldots = \frac{-dp_n}{\dfrac{dF}{dx_n}} \qquad (7)$$

својим одговарајућим делом поклапао са системом (1).

Ради овог потребно је, као што смо то видели, постојање n—1 следећих идентичности:

$$\chi_j\,[f] \equiv 0, \quad j = 2, 3, \ldots, n,$$

које показују да тражена карактеристичка функција F мора бити интеграл система следећих n—1 линеарних парцијалних једначина:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + p_j\,\frac{\partial f}{\partial z} - P_j\,\frac{\partial f}{\partial p_1} = 0, \quad j = 2, 3, \ldots, n. \qquad (8)$$

Пошто функције (2) зависе само од променљивих (3), то је систем (8) затворен, а према томе посматрани систем (1) заиста претставља један део генералисаног каноничког система (7) неке парцијалне једначине (6).

Систем (8) врло лако се интеграли на следећи начин. Пре свега, он допушта n очевидних интеграла

$$x_1,\; p_2, \ldots, p_n\,. \qquad (9)$$

Остала пак се два интеграла налазе из двеју једначина у тоталним диференцијалима, које одговарају систему (8):

$$dz - \sum_{j=2}^{n} p_j \, dx_j = 0, \quad dp_1 + \sum_{j=2}^{n} P_j \, dx_j = 0,$$

откуда се због интеграла (9) одмах добија још два интеграла система (8):

$$w \equiv z - \sum_{j=2}^{n} p_j x_j \quad \text{и} \quad p_1 + \sum_{j=2}^{n} P_j x_j \,.$$

Према томе ће тражена парцијална једначина (6) имати следећи облик:

$$F \equiv p_1 + \sum_{j=2}^{n} P_j x_j - \psi(w, x_1, p_2, \ldots, p_n) = 0, \qquad (10)$$

где је ψ произвољна функција.

Једначина (10) претставља генерализацију за случај $2n+1$ променљивих првога од већ поменутих случајева Charpit'a.

Једначина (10) се може интегралити на следећи начин. Напишимо израз за тотални диференцијал:

$$dz = p_1 dx_1 + \sum_{j=2}^{n} p_j \, dx_j \,.$$

Ако се последњем изразу дода и одузме израз:

$$\sum_{j=2}^{n} x_j \, dp_j$$

онда се добија једначина:

$$dw = p_1 dx_1 - \sum_{j=2}^{n} x_j \, dp_j \,. \qquad (11)$$

Једначина (11), због система (1), се може написати, очевидно, у следећем облику:

$$dw = \left(p_1 + \sum_{j=2}^{n} P_j x_j\right) dx_1$$

или због (10) у облику:

$$dw = \psi(w, x_1, p_2, \ldots, p_n) \, dx_1. \qquad (12)$$

Обележимо сад са:

$$p_j = \varphi_j\,(x_1, C_2, \ldots, C_n), \quad j = 2, 3, \ldots, n \tag{13}$$

резултат решења једначина (4) по променљивим (5).

Ако се решења (13) замене у једначину (12), онда се добија једначина

$$dw = \Phi(x_1, C_2, \ldots, C_n, w)\,dx_1$$

чи.им се интеграљењем и одређује потпуни интеграл дате једначине (10).

Једначина (10) добијена је у претпоставци да је *главна* променљива x_1.

По себи се разуме да, пошто се свака од променљивих $x_1, \ldots, x_n$ може сматрати као главна, на исти начин можемо добити n једначине аналогне једначини (10).

Све ове једначине ћемо звати I тип једначина Charpit'a. Наиме:

$$p_s + \sum_{i=1}^{s-1} P_i\, x_i + \sum_{\rho=s}^{n-s} P_{\rho+s} x_{\rho+s} = \psi(x_s, p_1, \ldots, p_{s-1}, p_{i+1}), \tag{I}$$

где s означава једну ма коју од вредности $1, 2, \ldots, n$.

§ 33. *II Тип једначина.*

Посматрајмо сад следећи систем n—1 сагласних обичних диференцијалних једначина:

$$\frac{dp_1}{1} = \frac{dp_2}{P_2} = \ldots = \frac{dp_n}{P_n} \tag{14}$$

чији су коефицијенти:

$$P_2, \ldots, P_n \tag{15}$$

функције само n променљивих количина:

$$p_1, p_2, \ldots, p_n. \tag{16}$$

Потражимо сад парцијалну једначину првог реда (6), чији ће се генералисани канонички систем (7) својим одговарајућим делом поклапати са посматраним системом (14).

По смислу задатка, тражена карактеристичка функција F мора бити општи интеграл следећег система $n—1$ линеарних парцијалних једначина:

$$\frac{df}{dx_j} - P_j \frac{df}{dx_1} = 0, \quad j = 2, 3, \ldots, n,$$

или

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x_j} + (p_j - P_j\, p_1)\frac{\partial f}{\partial z} - P_j \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \\ &\qquad j = 2, 3, \ldots, n. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Пошто коефицијенти (15) зависе само од промењивих (16), то је систем (17) затворен.

После овог се систем (17) лако интеграли на следећи начин.

Пре свега, он, очевидно, има n интеграла (16).

Осем тога из двеју једначина, које одговарају систему (17)

$$dx_1 + \sum_{j=2}^{n} P_j\, dx_j = 0, \quad dz - \sum_{j=2}^{n} (p_j - P_j p_1)\, dx_j = 0,$$

лако добијамо још два следећа интеграла система (17):

$$x_1 + \sum_{j=2}^{n} P_j x_j \quad \text{и} \quad w \equiv z - \sum_{j=2}^{n} (p_j - P_j p_1)\, x_j\,, \tag{18}$$

Према томе ће тражена једначина (6) имати следећи облик:

$$x_1 + \sum_{j=2}^{n} P_j x_j - \psi(w, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0, \tag{19}$$

где је Ψ произвољна функција.

Једначина (19) се може интегралити на следећи начин.

Пошто интеграли система (14) одређују вредности за p_j у облику:

$$p_j = \varphi_j\, (p_1, C_1, \ldots, C_{n-1}), \quad j = 2, 3, \ldots, n, \tag{20}$$

где су $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ произвољне константе, то је очевидно да све вредности p, које су одређене једначинама (19) и (20), претварају образац за тотални диференцијал:

$$dz = \sum_{s=1}^{n} p_s \, dx_s \tag{21}$$

у једну диференцијалну једначину у тоталним диференцијалима. Ова се може претворити у обичну диференцијалну једначину. За то написаћемо једначину (21) на следећи начин:

$$d\left(z - \sum_{j=2}^{n} p_j x_j - x_1 p_1\right) = -x_1 dp_1 - \sum_{j=2}^{n} x_j \, dp_j =$$

$$= -\left(x_1 + \sum_{j=2}^{n} x_j P_j\right) dp_1.$$

На основу једначине (19), написана једначина постаће:

$$d\left(z - \sum_{j=2}^{n} p_j x_j + p_1 \sum_{j=2}^{n} P_j x_j - p_1 \psi\right) = -\psi dp_1. \tag{22}$$

Једначина (22), због (18), се може написати у облику:

$$dw = p_1 d\Psi(w, \ p_1, \ p_2, \dots, p_n),$$

или на основу (20):

$$dw = p_1 d\Phi(w, \ p_1, \ C_1, \ C_2, \dots, C_{n-1}). \tag{23}$$

Из једначине (23) добијамо тражену обичну диференцијалну једначину:

$$\left(1 - p_1 \frac{\partial \Phi}{\partial w}\right) dw = p_1 \frac{\partial \Phi}{\partial p_1} \, dp_1.$$

Нека интеграл последње једначине гласи:

$$\theta(w, \ p_1, \ C_n) = 0, \tag{24}$$

где је C_n једна произвољна константа. Резултат избацивања вредности $w, p_1, p_2, \dots, p_n$ из образаца (24), (20), (19) и (18) одређује тада потпуни интеграл једначине (19).

Очевидно је да се могу добити n једначина аналогичних једначини (19), које ће сачињавати II тип тражених једначина, наиме:

$$\left.\begin{aligned} &x_s + \sum_{i=1}^{s-1} P_i\, x_i + \sum_{\rho=1}^{n-s} x_{s+\rho}\, P_{s+\rho} - \psi(w_s\,,\ p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0, \\ &w_s = z - \sum_{i=1}^{s-1} (p_i - P_i\, p_s) - \sum_{\rho=1}^{n-s} (p_{s+\rho} - P_{s+\rho}\, p_s\,), \end{aligned}\right\} \quad \text{(II)}$$

где s означава једну ма коју од вредности 1, 2,..., n.

§ 34. III *Тип једначина.*

Нека је дато n—1 следећих сагласних обичних диференцијалних једначина:

$$\frac{dx_j}{\chi_j\,(x_j\,,\ p_j\,)} = -\frac{dp_j}{P_j\,(x_j\,,\ p_j\,)}, \quad j = 2, 3, \ldots, n, \tag{25}$$

где функције X_j и P_j задовољавају услове

$$\chi_j \equiv \frac{\partial T_j\,(x_j\,,\ p_j\,)}{\partial p_j}, \quad P_j \equiv \frac{\partial T_j\,(x_j\,,\ p_j\,)}{\partial x_f}, \quad j = 2,\ 3, \ldots, n,$$

па се тражи одговарајућа парцијална једначина (6).

Изналажење тражене карактеристичке функције F се своди тада на интеграљење система линеарних парцијалних једначина:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + p_j \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\dfrac{\partial T_j}{\partial x_j}}{\dfrac{\partial T_j}{\partial p_j}} \frac{\partial f}{\partial p_j} = 0, \quad j = 2, 3, \ldots, n.$$

За овај систем, осем очевидних интеграла x_1 и p_1, остали интеграли се одређују интеграљењем система једначина у тоталним диференцијалима:

$$\frac{\partial T_j}{\partial x_j}\, dx_j + \frac{\partial T_j}{\partial p_j}\, dp_j = 0, \quad j = 2, 3, \ldots, n, \tag{26}$$

$$dz - \sum_{j=2}^{n} p_j\, dx_j = 0. \tag{27}$$

Једначине (26) одређују интеграле:

$$T_j(x_j, p_j) = C_{j-1}, \quad j = 2, 3, \ldots, n. \tag{28}$$

где C_{j-1} означавају $n-2$ произвољне константе. Ове једначине дају вредности за p_j:

$$p_j = \varphi_j(x_j, C_{j-1}), \quad j = 2, 3, \ldots, n.$$

Због тога се из једначине (27) добија:

$$dU \equiv dz - \sum_{j=2}^{n} \varphi_j(x_j, C_{j-1})\, dx_j = 0, \quad U = C_n,$$

Отуда следује:

$$U \equiv z - \sum_{j=2}^{n} \Phi_j(x_j, T_j), \quad \Phi_j(x_j, C_{j-1}) \equiv \int \varphi_j(x_j, C_j)\, dx_j,$$

где C_n означава нову произвољну константу.

Према томе, тражена парцијална једначина може се написати у облику:

$$p_1 = \psi(x_1, T_2, T_3, \ldots, T_n, U), \tag{29}$$

где је ψ произвољна функција.

Једначина облика (29) може се лако интегралити.

Заиста, услед интеграла карактеристика у инволуцији (28) и једначине (29) имамо:

$$dz = \psi(x_1, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}, U)\, dx_1 + \sum_{j=2}^{n} \varphi_j(x_j, C_j)\, dx_j,$$

или

$$dv = \psi(x_1, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}, v), dx_1, \tag{30}$$

где је уведено обележење:

$$v \equiv z - \sum_{j=2}^{n} \Phi_j(x_j, C_j). \tag{31}$$

Интегралење обичне диференцијалне једначине (30) одређује тражени потпуни интеграл, који изражава уопште количину v, иначе њену вредност (31), као једну функцију од независне промењиве x_1, произвољних констаната $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ и још једне константе C_n, добивене интегралењем једначине (30).

Општи облик посматраних једначина (III) типа Charpit'a можемо обележити овако:

$$\left.\begin{aligned} p_s &= \psi(x_s\,,\ T_1,\ T_2,\ldots,\ T_{s-1},\ T_{s+1},\ldots,\ T_n\,,\ U_s\,), \\ U_s &= z-\sum_{j=1}^{s-1}\Phi_j\,(x_j,\ T_j)-\sum_{\rho=1}^{n-s}\Phi_{s+\rho}\,(x_{s+\rho}\ T_{s+\rho}) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III)}$$

при чему T_j означавају функције само од x_j и p_j, а Φ_j, $\Phi_{s+\rho}$ одређују се на горе изложени начин; где s означава једну ма коју од вредности низа бројева $1, 2,\ldots, n$.

§ 35. *IV Тип једначина.*

Нека је дато n—1 следећих обичних диференцијалних једначина:

$$dz=\frac{dp_2}{P_2}=\ldots=\frac{-dp_n}{P_n}\,, \tag{32}$$

где је

$$P_j = p_j\,f_1(p\sigma,\ z)),\quad j=2,3,\ldots,n,$$

где σ означава неку одређену вредност из низа бројева $2,3,\ldots,n$

Тражена карактеристичка функција одређује се тада интеграљењем затвореног система n—1 линеарних парцијалних једначина:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}+p_j\,\frac{\partial f}{\partial z}-p_j\,f_1\sum_{s=1}^{n}p_s\,\frac{\partial f}{\partial p_s}=0,\quad j=2,3,\ldots,\ n.$$

Осем очевидног интеграла x_1, остали интеграли се одређују интегралењем система једначина у тоталним диференцијалима:

$$dp_s+p_s\,f_1\sum_{j=2}^{n}p_j\,dx_j=0,\quad s=1,2,\ldots,\ n, \tag{33}$$

$$dz-\sum_{j=2}^{n}p_j\,dx_j=0, \tag{34}$$

Једначине (33) се могу претворити у следеће:

$$\frac{dp_j}{p_j} = \frac{dp_\sigma}{p_\sigma}, \; j=1, 2,..., \sigma-1, \sigma+1,... n, \quad dp_\sigma + p_\sigma f_1(p_\sigma, z)\, dz = 0,$$

па према томе одређују интеграле:

$$\frac{p_j}{p_\sigma} = C_j, \quad j=1, 2,..., \sigma-1, \sigma+1,..., n, \quad T(p_\sigma, z) = C_\sigma, \tag{35}$$

где су $C_1, C_2,..., C_n$ произвољне константе.

Нека је резултат решења последње од једначина (35) по p_σ:

$$p_\sigma = \varphi(z, C_\sigma), \tag{36}$$

онда се интегралењем једначине (34) добија:

$$U = C_{n+1}, \quad U \equiv \Phi(z, T) - \frac{1}{p_\sigma} \sum_{=2}^{n} x_j\, p_j,$$

$$\Phi(z, C_\sigma) \equiv \int \frac{dz}{\varphi(z, C_\sigma)}.$$

Према томе тражена парцијална једначина прима облик:

$$p_1 = p_\sigma \psi\left(x_1, \frac{p_2}{p_\sigma}, \frac{p_3}{p_\sigma},..., \frac{p_{\sigma-1}}{p_\sigma}, \frac{p_{\sigma+1}}{p_\sigma},..., \frac{p_n}{p_\sigma}, T, U\right). \tag{37}$$

Ова се једначина може лако интегралити ако, прво, приметимо да за њу постају интеграли система карактеристика (32), који се изражавају, сем првог, последњима $n-1$ интегралима (35). Ови се интеграли налазе у инволуцији и заједно са датом једначином одређују све вредности $p_1, p_2,... p_n$, које чине једначину:

$$dz = \sum_{s=1}^{n} p_s\, dx_s$$

диференцијалном једначином у тоталним диференцијалима.

Заиста, ова ће једначина добити облик:

$$dV = \psi(x_1, C_2, C_3,..., C_{\sigma-1}, C_{\sigma+1},..., C_n, V)\, dx_1,$$

где је уведено обележење

$$V \equiv \Phi(Z, C_\sigma) - (C_2 x_2 + ... + C_{\sigma-1} x_{\sigma-1} + x_\sigma +$$
$$+ C_{\sigma+1} x_{\sigma+1} + ... + C_n x_n).$$

~~Интеграљење ове~~ обичне једначине између две промењљиве количине V и x_1 одредиће V у облику једне функције x_1 и $n-1$ произвољних константата $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_{\sigma-1}\ C_{\sigma+1}, \ldots, C_n$. Према томе добивени интеграл одредиће потпуни интеграл парцијалне једначине (37) јер количина V, поред z, уводи још n-ту произвољну константу C_σ.

Општи облик посматраних једначина (IV)-ог типа Charpit-a можемо обележити на следећи начин:

$$\left.\begin{aligned} p_s &= p_\sigma \psi\left(x_s, \frac{p_1}{p_\sigma}, \ldots, \frac{p_{s-1}}{p_\sigma}, \frac{p_{s+1}}{p_\sigma}, \ldots, \frac{p_{\sigma-1}}{p_\sigma}, \frac{p_{\sigma+1}}{p_\sigma}, \ldots \right. \\ &\qquad \left. \ldots, \frac{p_n}{p_\sigma}, \mathrm{T}, \mathrm{U}_s\right) \\ U_s &\equiv \Phi(z, \mathrm{T}) - \frac{1}{p_\sigma}(x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_{s-1} p_{s-1} + \\ &\qquad + x_{s+1} p_{s+1} + \ldots + x_n p_n), \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV)}$$

при чему T зависи од p_σ и z, где s и σ означавају две ма које вредности низа бројева $1, 2, \ldots, n$.

§ 36. *V Тип једначина.*

Претпоставимо, најзад, да посматрамо следећи систем $2n-2$ обичних диференцијалних једначина:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \ldots = \frac{dx_{n-1}}{X_{n-1}} = \frac{dz}{Z} = \frac{-dp_1}{P_1} = \ldots = \frac{-dp_{n-1}}{P_{n-1}}, \qquad (38)$$

где све X_j и P_j претстављају парцијалне изводе по x_j односно по p_j од једне те исте функције:

$$\theta(x_1, \ldots, x_{n-1}, p_1, \ldots, p_{n-1}).$$

Т. ј,

$$\left.\begin{aligned} X_j &\equiv \frac{\partial\theta}{\partial p_j} \\ P_j &\equiv \frac{\partial\theta}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, 3, \ldots, n-1, \end{aligned}\right\} \qquad (39)$$

а функција Z задовољава услов:

$$Z \equiv \sum_{j=1}^{n-1} p_j \frac{\partial\theta}{\partial p_j} - \theta \tag{40}$$

па се тражи одговарајућа парцијална једначина (6).

Да би се решио постављени задатак, потребно је, како је то лако видети, интегралити следећи систем линеарних парцијалних једначина:

$$\frac{\partial f}{\partial p_j} - \frac{\dfrac{\partial\theta}{\partial p_j}}{\dfrac{\partial\theta}{\partial p_1}} \frac{\partial f}{\partial p_1} = 0, \quad j=2, 3, \ldots, n-1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\dfrac{\partial\theta}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial\theta}{\partial p_1}} \frac{\partial f}{\partial p_1} = 0, \quad i=1, 2, \ldots, n-1,$$

$$\sum_{r=1}^{n} p_r \frac{\partial f}{\partial p_r} + \left(\frac{\theta}{\dfrac{\partial\theta}{\partial p_1}} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{p_j \dfrac{\partial\theta}{\partial p_j}}{\dfrac{\partial\theta}{\partial p_1}} \right) = 0$$

или

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial p_j} - \frac{\dfrac{\partial\theta}{\partial p_j}}{\dfrac{\partial\theta}{\partial p_1}} \frac{\partial f}{\partial p_1} = 0, \quad j=2, 3, \ldots, n-1, \\
&\frac{\partial f}{\partial p_n} + \frac{\theta}{p_n \dfrac{\partial\theta}{\partial p_1}} \frac{\partial f}{\partial p_1} = 0, \\
&\frac{\partial f}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\dfrac{\partial\theta}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial\theta}{\partial p_1}} \frac{\partial f}{\partial p_1} = 0, \quad i=1, 2, \ldots, n-1.
\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Систем (41) се претвара, како је то лако видети, у следећи затворени систем $2n-1$ једначина:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial p_i} + \frac{p_n}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial p_n} = 0, \\ &\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{P_n}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial p_n} = 0, \end{aligned}\right\} \quad i = 1, 2, .., n-1$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

који има два следећа интеграла:

$$x_n \text{ и } \frac{p_n}{\theta}\,.$$

Према томе ће тражена парцијална једначина (6) имати облик:

$$F \equiv p_n - \psi(x_n)\,\theta(x_1,..., x_{n-1}, p_1,..., p_{n-1}) = 0, \qquad (42)$$

где је ψ произвољна функција.

Очевидно је да једначини (42) одговара следећи V тип једначина Charpit-а:

$$p_s = \psi(x_n)\,\theta(x_1,..., x_{s-1}, x_{s+1},..., x_n, p_1,..., p_{s-1}, p_{s+1},..., p_n), \qquad (V)$$

где s означава једну ма коју од вредности $1, 2,..., n$.

При интеграљењу једначина овог облика, променљива x_s се раздваја.